

(美) Singiresu S. Rao 著 李欣业 张明路 编译

Li Xinye Zhang Minglu



Fourth Edition

Mechanical Vibrations

机械振动

(第4版)



清华大学出版社



美国迈阿密大学Singiresu S. Rao教授的力作《机械振动》(MECHANICAL VIBRATIONS)一书的第4版,不仅详尽地给出了线性振动部分的理论分析与近似分析方法,包括单自由度、两自由度、多自由度、无限自由度即连续系统的振动分析方法,还分别介绍了非线性振动和随机振动的分析方法。非线性振动和随机振动在工程实际中也是广泛存在的,所以对于初学者来说同样是不可或缺的。书中所提供的大量实例和图片对于初学者来说十分有益,这不仅有利于对基本概念的理解,更有助于培养他们对实际问题的抽象和简化能力。作者在每一章的最后都提供了利用MATLAB、C++语言和Fortran语言求解的算例,充分体现了传统的振动分析方法与现代计算机技术的完美结合。书中提供的30多个设计型题目会让读者初步体会到解决实际工程问题的乐趣。

本书可供机械工程、交通运输工程、车辆工程、工程力学、航空航天工程等专业的本科生或研究生使用,也可供相关专业的工程技术人员参考。



[http:// www.pearsoned.com](http://www.pearsoned.com)

ISBN 978-7-302-19506-1



9 787302 195061 >

定价: 79.00元

Mechanical Vibrations

机械振动

(第4版)

清华大学出版社
北京

北京市版权局著作权合同登记号 图字 01-2007-2035 号

Simplified Chinese edition copyright © 2009 by PEARSON EDUCATION ASIA LIMITED and TSINGHUA UNIVERSITY PRESS.

Original English language title from Proprietor's edition of the Work.

Original English language title: Mechanical Vibrations. Fourth Edition by Singiresu S. Rao.

Copyright © 2004

ISBN: 0-13-048987-5

All Rights Reserved.

Published by arrangement with the original publisher, Pearson Education, Inc., publishing as Pearson Prentice Hall.

This edition is authorized for sale only in the People's Republic of China (excluding the Special Administrative Region of Hong Kong and Macau).

本书中文简体翻译版由 Pearson 授权给清华大学出版社在中国境内(不包括中国香港、澳门特别行政区)出版发行。

本书封面贴有 Pearson Education (培生教育出版集团) 激光防伪标签, 无标签者不得销售。

版权所有, 侵权必究。侵权举报电话: 010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

机械振动(第4版) / (美) 饶(Rao, S. S.) 著; 李欣业, 张明路编译. —北京: 清华大学出版社, 2009. 8

书名原文: Mechanical Vibrations, Fourth Edition

ISBN 978-7-302-19506-1

I. 机… II. ①饶… ②李… ③张… III. 机械振动 IV. TH113.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 016630 号

责任编辑: 张秋玲

责任校对: 刘玉霞

责任印制: 李红英

出版发行: 清华大学出版社

地 址: 北京清华大学学研大厦 A 座

<http://www.tup.com.cn>

邮 编: 100084

社 总 机: 010-62770175

邮 购: 010-62786544

投稿与读者服务: 010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈: 010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 刷 者: 北京密云胶印厂

装 订 者: 北京市密云县京文制本装订厂

经 销: 全国新华书店

开 本: 185×230

印 张: 45.75

字 数: 991 千字

版 次: 2009 年 8 月第 1 版

印 次: 2009 年 8 月第 1 次印刷

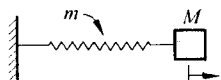
印 数: 1~3000

定 价: 79.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题, 请与清华大学出版社出版部联系调换。
联系电话: 010-62770177 转 3103 产品编号: 024889-01

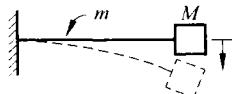
等效质量、等效弹簧与等效黏性阻尼器

等效质量



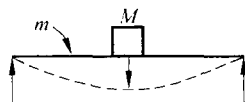
质量为 m 的弹簧末端连接一个质量 M

$$m_{eq} = M + \frac{m}{3}$$



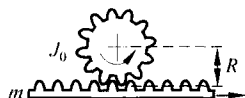
质量为 m 的悬臂梁在自由端具有一个集中质量 M

$$m_{eq} = M + 0.23m$$



质量为 m 的简支梁在跨度中点具有一个集中质量 M

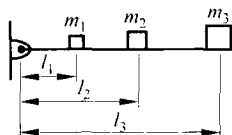
$$m_{eq} = M + 0.5m$$



平动质量与转动质量耦合的情况

$$m_{eq} = m + \frac{J_0}{R^2}$$

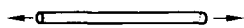
$$J_{eq} = J_0 + mR^2$$



铰支杆上的若干集中质量

$$m_{eq1} = m_1 + \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 m_2 + \left(\frac{l_3}{l_1}\right)^2 m_3$$

等效弹簧



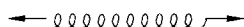
受轴向载荷作用的杆
(l 为杆的长度, A 为杆的横截面积)

$$k_{eq} = \frac{EA}{l}$$



受轴向载荷作用的变截面杆
(D 和 d 分别为两个端面的直径)

$$k_{eq} = \frac{\pi EDd}{4l}$$



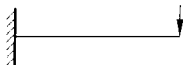
轴向载荷作用下的螺旋弹簧
(d 为簧丝直径, D 为簧圈的平均直径, n 为有效圈数)

$$k_{eq} = \frac{Gd^4}{8nD^3}$$



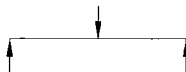
载荷作用在跨度中点的两端固定梁

$$k_{eq} = \frac{192EI}{l^3}$$



载荷作用在自由端的悬臂梁

$$k_{eq} = \frac{3EI}{l^3}$$



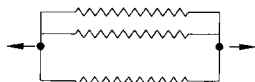
载荷作用在跨度中点的简支梁

$$k_{eq} = \frac{48EI}{l^3}$$



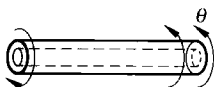
串联弹簧

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n}$$



并联弹簧

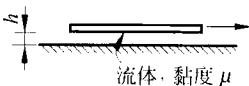
$$k_{eq} = k_1 + k_2 + \dots + k_n$$



发生扭转变形的空心轴
(l 为长度, D 为外径, d 为内径)

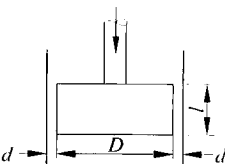
$$k_{eq} = \frac{\pi G}{32l} (D^4 - d^4)$$

等效黏性阻尼器



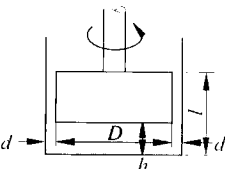
两个平行表面间有相对运动
(A 为较小板的面积)

$$c_{eq} = \frac{\mu A}{h}$$



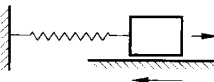
缓冲器(活塞在缸体中作轴向运动)

$$c_{eq} = \mu \frac{3\pi D^3 l}{4d^3} \left(1 + 2 \frac{d}{D} \right)$$



扭转阻尼器

$$c_{eq} = \frac{\pi \mu D^2 (l-h)}{2d} + \frac{\pi \mu D^3}{32h}$$



干摩擦(库仑阻尼)
(fN 为摩擦力, ω 为频率, X 为振幅)

$$c_{eq} = \frac{4fN}{\pi \omega X}$$

原著前言

本书是为本科大学生准备的一本关于振动工程课程的入门读物,依然保持了前几版的风格,比如在振动理论、计算与应用方面的介绍都是以尽可能简单的方式给出的。与前3版一样,第4版仍然加强了关于振动分析中的计算机技术的介绍。此外,还对一些基本概念和原理做出了进一步说明,以便加强对物理含义和概念的理解,这些都有赖于在本科生阶段学习力学所积累的经验。书中所选的大量例题和习题都是为了说明一些重要的原理和概念。来自我身边的教授和学生们的良好反应和鼓励促使我写出了这本书的第4版。在第4版中,还增加了一些新的特色,并对许多题目进行了修改和重写。而这些新增加的内容大多数都是由这本书的旧版的使用者和评论者提出的。一些重要的变化体现在以下几个方面:

(1) 新增加了900多道思考题,以帮助学生复习和检查对课本内容的理解。这些思考题包括多项选择题、简答题、判断题、连线题和填空题。

(2) 专门增加了一个附录以对MATLAB程序的设计作一个基本的介绍。

(3) 每一章都包括若干应用MATLAB求解的算例。

(4) 每一章都给出了若干应用MATLAB、C++和Fortran程序求解振动问题的通用程序。

(5) 在每一章的结尾还给出了一些新的问题包括习题,这些问题是要利用MATLAB、C++和Fortran程序进行求解的,为的是使学生充分领略许多重要的计算和编程细节。

(6) 思考题的答案以及MATLAB、C++和Fortran程序的源代码都放在这本书的网站上。

(7) 全书新增加了50多个说明性的例子。

(8) 全书新增加了100多道习题。

1. 特点

机械振动中的每一个题目都自成一章,所有的概念都给出了详尽的解释,所有的推导都给出了全部的细节。全书加强了利用计算机进行数值计算的介绍。每一章中都给出了基于MATLAB的例题。每一章中都有一些交互式的MATLAB、C++和Fortran程序,这些程序中的大多数都是以用来求解一般问题的子程序形式出现的。这些程序是为初学者专门设计的。虽然这些程序都经过了调试,但是不承诺保证它们的精度。在每一章里都给出了基于利用各种计算机程序的例题和习题,以使使学生充分领略许多重要的计算和编程细节。

在某种程度上,某些题目的介绍可能是以不太方便的方式给出的。第9~11章讨论的问题可以划为此类。大多数教科书都会在不同的场合讨论隔振器、吸振器和平衡问题。既

然研究振动的主要目的之一就是要控制振动响应,所以第9章中的每一个题目都是和振动控制直接相关的。第10章介绍振动测量仪器和激振器、实验模态分析以及设备状态监测。类似地,所有可应用于单自由度和多自由度以及连续系统的数值积分方法构成了第11章的全部内容。

本书的特色之处体现在以下几个方面:

(1) 200多道例题涉及大多数题目。

(2) 900多道思考题帮助复习和检验学生们对教材内容的理解。

(3) 1000多道习题的全部解答专门作成了一个教师手册。

(4) 在各章的最后,共有30多道设计性题目。

(5) 70多个MATLAB、C++和Fortran计算机程序帮助学生理解如何实现教材中讨论的数值方法。

(6) 在每一章和附录的起始页给出了那些对振动理论的发展曾做出过重要贡献的科学家和工程师的传记信息。

(7) 书中给出的MATLAB、C++和Fortran程序、思考题和习题的答案可以在这本书的网站上找到: www.prenhall.com/rao。

2. 符号和单位

在本书的例题和习题中,同时采用了国际制单位和英制单位。在致谢的后面,不仅给出了符号表,还列出了各种物理量的国际制单位和英制单位。在附录E中,又给出了国际制单位应用于振动领域时的简要讨论。用符号上面的箭头表示列向量,用方括号表示矩阵。

3. 内容

本书包括14章正文和6个附录。不同层次的机械振动教学可以灵活地选择这些内容进行讲授。如果此课程只为高年级或二年级的本科生安排一个学期,那么可以讲授第1~5章、第6~8章和第10章的部分内容以及第9章。本课程也可以侧重于计算机应用从而以第11章代替第8章。可供选择的方案还有,如果此课程为高年级安排讲授一年的话,第12~14章也提供了足够的内容。如果对于此课程的学时安排较少,教师可根据学生的基础和教学倾向选择其中的一些题目讲授。由于本书的讲解通俗易懂,所以也可以作为培训工程师的自学教材以及参考文献和计算机程序的源文献。

第1章以简要地讨论振动研究的历史和重要性开头,同时还介绍了振动分析中要用到的基本概念和术语。第2章介绍单自由度无阻尼平动和扭振系统的自由振动分析,还讨论了黏性阻尼、库仑阻尼和滞后阻尼的影响。第3章讨论单自由度系统在简谐激励下的响应。第4章讨论单自由度系统在一般力函数作用下的响应。在这一章里还讨论了卷积积分、拉普拉斯变换以及数值方法的作用。此外,这一章还介绍了响应谱的概念。第5章介绍两自由度系统的自由振动和受迫振动。在这一章里还讨论了自激振动和系统的稳定性问题。第6章介绍多自由度系统的振动分析,在理论上使用了矩阵分析方法。针对受迫振动问题的求解,详细地给出了模态分析的全部过程。第7章介绍了求解离散系统固有频率的几种近

似方法,包括邓克莱(Dunkerley)法、瑞利(Rayleigh)法、霍尔茨(Holzer)法、雅可比(Jacobi)法和矩阵迭代法。第8章讨论连续体的振动,包括弦的振动、杆的振动、轴的振动、梁的振动和薄膜的振动。此外,这一章也介绍了求解连续系统固有频率的近似方法——瑞利(Rayleigh)法和瑞利-李兹(Rayleigh-Ritz)法。第9章讨论如何进行振动控制,包括消振问题、隔振问题和吸振问题。这一章还讨论了旋转和往复运动机械的平衡问题以及轴的弓形回转问题。第10章介绍振动测量仪器、激振器以及信号分析问题。第11章介绍求离散和连续系统动力学响应的几种数值积分方法,包括中心差分法、龙格-库塔法(Runge-Kutta)、侯伯特(Houbolt)法、威尔逊(Wilson)法、纽马克(Newmark)法等。第12章以一维单元为例介绍有限单元方法。第13章介绍非线性振动问题如亚谐和超谐振动、极限环、时变参数系统和混沌问题的一般处理方法。第14章介绍线性系统的随机振动问题。附录A和附录B分别介绍数学关系以及梁和板的变形。附录C、附录D和附录E分别介绍矩阵及其运算、拉普拉斯变换对和单位制。最后,在附录F中简要介绍了MATLAB软件。

S. S. Rao

序

振动问题广泛存在于人们的生活和生产活动中,对各类振动问题进行分析、控制和优化,不但可以改善人们的生活环境,提高各类机械和结构的运行品质,并可延长使用寿命和提高生产率。同时,振动这种周期运动模式也是进一步研究各种复杂动力学行为和过程的基础。结合各种机械的振动问题来讲述机械和结构振动的基本理论与分析方法,可为广大的工程技术人员提供必要的专业技术基础。在国外,动力学已经成为大多数工科专业本科生和研究生的必修课。

美国迈阿密大学 Singiresu S. Rao 教授所著 *Mechanical Vibrations* 一书的第 4 版,不仅详尽地给出了线性振动问题的理论分析与处理方法这些传统内容,还分别介绍了非线性振动和随机振动的分析方法。此外,还有两章专门介绍振动控制与振动测量问题。本书的另外两个显著特色之一是大量丰富的来自工程实际的习题与设计性题目以及特别适合于中国读者的思考题,包括简述题、判断题、选择题、填空题和连线题;其次,本书特别加强了利用计算机(MATLAB 软件、C++ 和 Fortran 语言)进行振动分析的内容。这不仅使得本书的实用性更强,还可以提高读者尤其是年轻读者的兴趣。所有这些特点决定了本书可以使读者充分领略振动问题的机理和培养自己具备利用它们解决实际工程问题的能力。

我相信本书中译本的面市一定会使广大读者受益。

中国工程院院士

陈予恕

2009 年 6 月

前 言

由美国迈阿密大学 Singiresu S. Rao 教授所著的《机械振动(第 4 版)》一书,给人的第一感觉是锐意创新,引领潮流。其翔实的内容、理论与实用并重的风格、与广泛应用的计算机软件的完美结合不仅反映了作者深厚的专业积淀,同时也反映了美国作为世界第一科技强国所崇尚的学术风范。

作为一门传统的专业基础课,机械振动理论与应用可以惠及许多专业的工科大学生,翔实的内容不仅可以为将来从事具体工作打下坚实的理论基础,还可以拓宽专业视野,激发专业嗅觉;理论与实用并重是当今学术界的主流趋势,本书的风格同样可以影响它的使用者;本书的使用者可以充分领略现代计算机技术在振动分析中的魅力,这种魅力同样可以助推他们在从事振动理论与应用方面的研究时取得更大的成就。

引进原版教材虽然是吸收国外先进知识的一条捷径,但一个不可回避的问题是国人的英语水平而译著就可以作到两者兼顾。本书中文译本的面市必将推动我国机械振动课程的教材建设。

本版保留了前几版以尽可能简洁的方式介绍机械振动的基本理论与应用的风格,强调计算机技术与传统理论分析的融合,对基本原理的解释更加详尽,习题和例题更加丰富多彩。一些重要的变化原著作者已在前言中作了说明。

目前国内出版的关于机械振动方面的新书无论是在内容的系统与全面上,还是在实用性 with 计算技术的融合上,都不能与本书相比。

原著包括 14 章正文内容和 6 个附录,适合于不同层次和学时的“机械振动”课程选用。由于振动分析中的数值积分方法(原著第 11 章)和有限元方法(原著第 12 章)的内容,在后续课程中有更详尽的介绍,再加上篇幅的限制,所以这两章和原著第 13.11(非线性振动的数值分析方法)未作编译。至于原著中的 6 个附录(数学关系、梁和板的变形、矩阵及其运算、拉普拉斯变换对、单位制和 MATLAB 简介),则只保留了拉普拉斯变换对和单位制。此外,第 7 章内容变化较大。一是增加了李兹法和子空间迭代法这两节内容;二是对瑞利法和矩阵迭代法进行了改写。这主要是基于如下考虑:一是李兹法和子空间迭代法在利用计算机求多自由度系统的前若干阶固有频率和固有振型方面的优势是其他方法都不能比拟的;二是原著对瑞利法和矩阵迭代法的介绍还不够深入、系统。例如,瑞利法中并未区别瑞利第一商和第二商的概念;矩阵迭代法中,不是从讨论如何求第一阶固有频率及其振型开始,再过渡到如何在此基础上求出各高阶固有频率和高阶振型。

第 1 章介绍振动理论的基础知识;第 2 章讨论有阻尼单自由度系统 and 无阻尼单自由度

系统的自由振动;第3章讨论单自由度系统在简谐激励下的受迫振动问题;第4章讨论单自由度系统在任意激励下的受迫振动问题;第5章讨论两自由度系统的自由振动和受迫振动问题;第6章借助矩阵运算讨论多自由度系统的振动分析方法;第7章介绍确定多自由度系统固有频率和固有振型的近似方法如 Rayleigh 法、Dunkerley 法和矩阵迭代法等;第8章讨论弹性体包括弦、杆、轴、梁和薄膜的振动问题;第9章讨论振动的控制问题;第10章介绍振动的测量与信号分析问题;第11章(对应原著第13章)介绍非线性振动问题的分析方法;第12章(对应原著第14章)介绍随机振动问题的处理方法。

第1~8章的部分内容可以作为本书的基本部分;第9~10章可以作为本书的拓展部分;第11,12章可以作为本书的提高部分。指导者也完全可以根据需要选用本书的部分内容作为辅导材料。

本书第2,4,5,12章和11.8~11.14节由李欣业执笔,第3章由胡竞湘执笔,第6,8章由杨理诚执笔,第7章由钟顺执笔,第9,10章由张明路执笔,第11.1~11.7节由李银山执笔。

特别感谢清华大学出版社张秋玲教授,作为本书的责任编辑,她的慧眼相识才使得此译著的出版成为可能。同时在编辑过程中,为保证译著的质量,她与译者进行了大量的沟通与求证。

硕士研究生杨彦龙、张华彪、杨延鹏、张丽娟和许多本科生在部分章节、习题和程序的编译及校对方面提供了大量的帮助,在此一并致谢。

衷心感谢中国工程院院士陈予恕教授为本书作序。

限于水平,错误与不妥之处难免,恳请广大同行与读者指正。

李欣业 张明路

2008年8月于天津

目 录

第 1 章 振动理论基础	1
1.1 振动的基本概念	2
1.2 振动的分类	4
1.3 振动分析的一般步骤	6
1.4 弹簧元件	8
1.5 质量或惯性元件	15
1.6 阻尼元件	19
1.7 简谐运动	24
1.7.1 简谐运动的矢量表示	25
1.7.2 简谐运动的复数表示	26
1.7.3 复数的代数运算	27
1.7.4 简谐函数的运算	27
1.7.5 定义和术语	30
1.8 谐波分析	32
1.8.1 傅里叶级数展开	33
1.8.2 傅里叶级数的复数形式	34
1.8.3 频谱	34
1.8.4 时域表示法与频域表示法	35
1.8.5 奇函数和偶函数	35
1.8.6 半区间展开	37
1.8.7 系数的数字计算	37
1.9 利用 MATLAB 求解的例子	41
1.10 C++ 程序	45
1.11 Fortran 程序	47
1.12 振动方面的参考文献	48
参考文献	48
思考题	51
习题	54
设计题目	67

第2章 单自由度系统的自由振动	71
2.1 引言	71
2.2 无阻尼平动系统的自由振动	73
2.2.1 根据牛顿第二定律建立系统的运动微分方程	73
2.2.2 用其他方法建立系统的运动微分方程	74
2.2.3 铅垂方向上弹簧-质量系统的运动微分方程	75
2.2.4 运动微分方程的解	76
2.2.5 简谐运动	77
2.3 无阻尼扭转系统的自由振动	85
2.3.1 运动微分方程	86
2.3.2 运动微分方程的解	87
2.4 运动的稳定性条件	89
2.5 瑞利能量法	90
2.6 黏性阻尼系统的自由振动	94
2.6.1 运动微分方程	94
2.6.2 方程的解	94
2.6.3 对数衰减系数	98
2.6.4 黏性阻尼消耗的能量	99
2.6.5 有黏性阻尼的扭振系统	100
2.7 库仑阻尼系统的自由振动	105
2.7.1 运动微分方程	105
2.7.2 方程的解	107
2.7.3 有库仑阻尼的扭振系统	109
2.8 滞后阻尼系统的自由振动	110
2.9 利用 MATLAB 求解的例子	114
2.10 C++ 程序	119
2.11 Fortran 程序	120
参考文献	121
思考题	122
习题	125
设计题目	146
第3章 单自由度系统在简谐激励下的振动	148
3.1 引言	148

3.2	运动微分方程	148
3.3	无阻尼系统在简谐力作用下的响应	149
3.3.1	总响应	151
3.3.2	拍振现象	152
3.4	简谐力作用下有阻尼系统的响应	154
3.4.1	总响应	156
3.4.2	品质因子与带宽	158
3.5	$F(t) = Fe^{i\omega t}$ 作用下阻尼系统的响应	159
3.6	基础作简谐运动时阻尼系统的响应	161
3.6.1	所传递的力	163
3.6.2	相对运动	164
3.7	具有旋转不平衡质量的阻尼系统的响应	166
3.8	库仑阻尼系统的强迫振动	169
3.9	滞后阻尼系统的强迫振动	172
3.10	其他类型阻尼系统的强迫振动	173
3.11	自激振动与稳定性分析	174
3.11.1	动力稳定性分析	174
3.11.2	流体导致的动力不稳定	176
3.12	利用 MATLAB 求解的例子	182
3.13	C++ 程序	188
3.14	Fortran 程序	189
	参考文献	190
	思考题	191
	习题	194
	设计题目	207
第 4 章	单自由度系统在一般激励下的振动	208
4.1	引言	208
4.2	一般周期力作用下的响应	208
4.3	不规则形式的周期力作用下的响应	213
4.4	非周期力作用下的响应	215
4.5	褶积积分	215
4.5.1	对冲量的响应	216
4.5.2	对一般力的响应	219
4.5.3	对基础激励的响应	219

4.6 响应谱	225
4.6.1 基础激励的响应谱	227
4.6.2 地震响应谱	229
4.6.3 冲击环境下的设计	232
4.7 拉普拉斯变换	234
4.8 应用数值方法求解不规则激励下的响应	238
4.9 利用 MATLAB 求解的例子	244
4.10 C++ 程序	248
4.11 Fortran 程序	251
参考文献	252
思考题	253
习题	255
设计题目	265
第5章 二自由度系统的振动	267
5.1 引言	267
5.2 受迫振动的运动微分方程	269
5.3 无阻尼系统的自由振动分析	270
5.4 扭振系统	276
5.5 坐标耦合与主坐标	280
5.6 受迫振动分析	284
5.7 半正定系统	286
5.8 自激振动与稳定性分析	288
5.9 利用 MATLAB 求解的例子	289
5.10 C++ 程序	296
5.11 Fortran 程序	296
参考文献	297
思考题	298
习题	300
设计题目	312
第6章 多自由度系统	314
6.1 引言	314
6.2 连续系统模型化为多自由度系统	314
6.3 运用牛顿第二定律推导运动微分方程	316

6.4	影响系数	319
6.4.1	刚度影响系数	319
6.4.2	柔度影响系数	323
6.4.3	惯性影响系数	327
6.5	以矩阵形式表示的势能与动能	328
6.6	广义坐标与广义力	330
6.7	用拉格朗日方程推导运动微分方程	331
6.8	以矩阵形式表示的无阻尼系统的运动微分方程	334
6.9	特征值问题	335
6.10	特征值问题的解	336
6.10.1	特征方程的解	336
6.10.2	主振型的正交性	340
6.10.3	重特征值	342
6.11	展开定理	344
6.12	无约束系统	344
6.13	无阻尼系统的自由振动	347
6.14	用模态分析法求无阻尼系统的强迫振动	349
6.15	黏性阻尼系统的强迫振动	354
6.16	自激振动及其稳定性分析	358
6.17	利用 MATLAB 求解的例子	360
6.18	C++ 程序	368
6.19	Fortran 程序	369
	参考文献	370
	思考题	371
	习题	375
	设计题目	385
第 7 章	多自由度系统固有频率与振型的近似计算方法	386
7.1	引言	386
7.2	邓克莱法	387
7.3	瑞利法	388
7.3.1	瑞利第一商	389
7.3.2	瑞利第二商	390
7.4	霍尔茨法	392
7.4.1	扭振系统	392

7.4.2 弹簧-质量系统	394
7.5 李兹法	395
7.6 矩阵迭代法	397
7.6.1 用矩阵迭代法求第一阶固有频率和主振型	397
7.6.2 用矩阵迭代法求较高阶的固有频率及主振型	400
7.7 雅可比法	401
7.8 子空间迭代法	403
7.9 标准特征值问题	407
7.9.1 切比雪夫(Chebyshev)分解	408
7.9.2 其他解法	409
7.10 利用 MATLAB 求解的例子	409
7.11 C++ 程序	412
7.12 Fortran 程序	414
参考文献	416
思考题	417
习题	420
设计题目	424
第8章 连续系统的振动	425
8.1 引言	425
8.2 弦或索的横向振动	425
8.2.1 运动微分方程	425
8.2.2 初始条件与边界条件	427
8.2.3 等截面弦的自由振动	427
8.2.4 两端固定弦的自由振动	428
8.2.5 行波的解	430
8.3 杆的纵向振动	431
8.3.1 运动微分方程及其解	431
8.3.2 振型函数的正交性	433
8.4 圆杆或轴的扭转振动	437
8.5 梁的横向振动	439
8.5.1 运动微分方程	439
8.5.2 初始条件	441
8.5.3 自由振动	441
8.5.4 边界条件	442

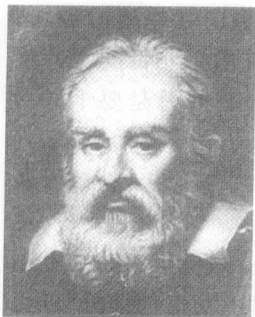
8.5.5	振型函数的正交性	444
8.5.6	强迫振动	446
8.5.7	轴向力的影响	447
8.5.8	转动惯量与剪切变形的影响	449
8.5.9	其他影响	452
8.6	薄膜的振动	453
8.6.1	运动微分方程	453
8.6.2	初始条件与边界条件	454
8.7	瑞利法	455
8.8	瑞利-李兹法	456
8.9	利用 MATLAB 求解的例子	459
8.10	C++ 程序	462
8.11	Fortran 程序	462
	参考文献	463
	思考题	464
	习题	467
	设计题目	474
第 9 章	振动控制	475
9.1	引言	475
9.2	振动列线图和振动标准	475
9.3	抑制振源强度	479
9.4	旋转机械的平衡	479
9.4.1	单面平衡	480
9.4.2	双面平衡	481
9.5	轴的涡动	485
9.5.1	运动微分方程	485
9.5.2	临界速度	487
9.5.3	系统的响应	487
9.5.4	稳定性分析	489
9.6	活塞式发动机的平衡	490
9.6.1	气体压力变化产生的不平衡力	490
9.6.2	运动部件的惯性产生的不平衡力	491
9.6.3	活塞式发动机的平衡	493
9.7	振动的控制	495

9.8	固有频率的控制	495
9.9	阻尼的应用	495
9.10	振动隔离	497
9.10.1	刚性基础的振动隔离系统	498
9.10.2	振源的隔离	500
9.10.3	弹性基础的振动隔离系统	501
9.10.4	部分弹性基础的振动隔离系统	504
9.10.5	冲击隔离	505
9.10.6	主动振动控制	507
9.11	吸振器	508
9.11.1	无阻尼动力吸振器	508
9.11.2	有阻尼动力吸振器	511
9.12	利用 MATLAB 求解的例子	514
9.13	C++ 程序	523
9.14	Fortran 程序	523
	参考文献	524
	思考题	526
	习题	528
	设计题目	537
第 10 章	振动测量与应用	538
10.1	引言	538
10.2	传感器	539
10.2.1	变电阻传感器	539
10.2.2	压电传感器	541
10.2.3	电动式传感器	542
10.2.4	线性变化差动变换传感器	542
10.3	拾振器	543
10.3.1	测振计	545
10.3.2	加速度计	545
10.3.3	速度计	548
10.3.4	相位失真	549
10.4	频率测量仪	551
10.5	激振器	552
10.5.1	机械式激振器	552

10.5.2	电动式激振器	553
10.6	信号分析	554
10.6.1	频谱分析仪	554
10.6.2	带通滤波器	555
10.6.3	恒百分比带宽滤波器和恒带宽滤波器	555
10.7	机械和结构的动态测试	556
10.7.1	测量运行时的变形	556
10.7.2	模态测试	557
10.8	实验模态分析	557
10.8.1	基本观点	557
10.8.2	所需仪器	557
10.8.3	数字信号处理	559
10.8.4	随机信号分析	561
10.8.5	从观察到的峰值确定模态数据	563
10.8.6	根据奈奎斯特图确定模态数据	564
10.8.7	模态形状的测量	566
10.9	机器运行状态监测与诊断	568
10.9.1	振动强度标准	568
10.9.2	设备检修技术	568
10.9.3	机械运行状况监测技术	570
10.9.4	振动监测技术	570
10.9.5	仪器系统	574
10.9.6	监测参数的选取	575
10.10	利用 MATLAB 求解的例子	575
	参考文献	578
	思考题	579
	习题	582
	设计题目	586
第 11 章	非线性振动	587
11.1	引言	587
11.2	非线性振动问题的例子	587
11.2.1	单摆	587
11.2.2	机械颤振, 皮带摩擦系统	589
11.2.3	变质量系统	589

11.3	精确解法	589
11.4	近似分析方法	590
11.4.1	基本原理	591
11.4.2	林兹泰德摄动方法	593
11.4.3	迭代法	594
11.4.4	李兹-伽辽金法	597
11.5	亚谐振动和超谐振动	599
11.5.1	亚谐振动	599
11.5.2	超谐振动	601
11.6	变参数系统(马休方程)	602
11.7	图解法	606
11.7.1	相平面法	606
11.7.2	相速度	609
11.7.3	绘制相轨线的方法	610
11.7.4	根据相轨线求时域解	611
11.8	平衡状态的稳定性	612
11.8.1	稳定性分析	612
11.8.2	奇点的分类	613
11.9	极限环	615
11.10	混沌	616
11.10.1	具有稳定轨道的函数	617
11.10.2	具有不稳定轨道的函数	618
11.10.3	没有激励项时达芬方程的混沌行为	619
11.10.4	有激励项时达芬方程的混沌行为	621
11.11	利用 MATLAB 求解的例子	623
11.12	C++ 程序	632
11.13	Fortran 程序	632
	参考文献	633
	思考题	635
	习题	638
	设计题目	642
第 12 章	随机振动	644
12.1	引言	644
12.2	随机变量与随机过程	645

12.3	概率分布·····	645
12.4	均值与标准差·····	647
12.5	几个随机变量的联合概率分布·····	648
12.6	随机过程的相关函数·····	649
12.7	平稳随机过程·····	650
12.8	高斯随机过程·····	652
12.9	傅里叶分析·····	653
12.9.1	傅里叶级数·····	653
12.9.2	傅里叶积分·····	655
12.10	功率谱密度·····	657
12.11	宽带和窄带随机过程·····	659
12.12	单自由度系统的响应·····	660
12.12.1	脉冲响应函数法·····	660
12.12.2	频响函数法·····	661
12.12.3	响应函数的特点·····	662
12.13	平稳随机激励下的响应·····	663
12.13.1	脉冲响应函数法·····	663
12.13.2	频响函数法·····	664
12.14	多自由度系统的响应·····	668
12.15	利用 MATLAB 求解的例子·····	672
	参考文献·····	675
	思考题·····	676
	习题·····	679
	设计题目·····	684
附录 A	拉普拉斯变换对·····	685
	参考文献·····	686
附录 B	单位·····	687
	参考文献·····	689
附录 C	部分习题答案·····	690



伽利略(Galileo Galilei, 1564—1642), 意大利天文学家、哲学家, 比萨(Pisa)大学和帕度亚(Padua)大学的数学教授, 1609 年成为发明天文望远镜的第一人。1590 年完成了现代动力学的第一篇论文; 其对单摆和弦的振动的研究奠定了振动理论的基础。

(照片引自: Struik D J. A Concise History of Mathematics (2nd rev. ed.), 2nd. New York: Dover Publications, Inc., 1948)

第 1 章 振动理论基础

机械振动是指系统在某一位置(通常是静平衡位置, 简称平衡位置)附近所作的往复运动。显然这是一种特殊形式的机械运动。人类的大多数活动都包括这样或那样的机械振动。例如, 我们能听见周围的声音是由于鼓膜的振动; 我们能看见周围的物体是由于光波振动的结果; 人的呼吸与肺的振动紧密相关; 行走时人的腿和手臂也都在作机械振动; 我们能讲话正是咽喉(和舌头)作机械振动的结果。在振动研究的早期, 学者们的努力主要集中于解释自然现象并建立相应的数学模型以描述系统的机械振动。现在, 许多研究都是为了振动的工程应用, 例如机械设计、基础设计、结构设计、发动机设计、汽轮机设计和控制系统的设计等。

大多数原动机都会由于发动机固有的不平衡而存在振动问题。不平衡可能是由于设计不当或不合格的加工引起的。柴油发动机中的不平衡能引起很强的地面波, 从而产生城市噪声。由于不平衡的影响, 某些机车的车轮在高速运行时能脱离轨道达 1 cm 之多。汽轮机的振动可引起惊人的机械失效。工程师们尚不能避免由于汽轮机叶片的振动而引起的失效问题。某些结构常用来支承较重的离心式机械, 例如内燃机和汽轮机, 或往复运动的机械, 如蒸汽发动机和活塞泵, 它们自然也都承受振动。在所有的这些情况中, 承受振动的结构或机械零件都会由于振动引起的交变应力而导致材料的疲劳失效。此外, 振动还会加剧机械零部件的磨损, 例如轴承和齿轮的磨损以及过大的噪声。振动也会使机械中的紧固件如螺母等变松。切削金属时, 振动会引起颤振从而导致表面加工质量变差。

一旦机械或结构的固有频率与外部激励的频率一致, 就会发生共振现象, 从而引起机械或结构的过大变形乃至失效。这方面的相关文献有很多, 由于振动对机械或结构的破坏性, 振动实验已成为大多数工程问题中进行机械设计和改进的必不可少的一环。

在许多工程系统中, 人都是其中的一个组成部分。振动传递给人会引起人的不适以及

工作效率的降低。发动机引起的振动会导致对人有害的噪声,有时还会引起设施的破坏。仪器面板的振动会导致指示失灵或造成读数时的困难。所以,振动研究的主要目的之一就是通过适当的机械及其基础设计减小振动。基于此,机械工程师进行设计时总是要千方百计地使系统的不平衡量最小。

尽管有其不利的一面,振动也常在许多生活和生产实践中得到利用。实际上,振动设备的应用近些年来增长得非常迅速。例如,振动输送机、振动布料器、振动筛、振动压实机、洗衣机、电动牙刷、牙医用的小电钻、钟表以及电子推拿设备都是利用振动的例子。振动也用在管道的推进、材料的振动测试、振动磨削加工以及滤波电路中。人们还发现,振动可以提高某些机械加工、铸造、锻造和焊接过程的效率。

1.1 振动的基本概念

任何经过某一时间间隔以后不断重复再现的运动都可以称为振动或振荡。单摆的摆动、弹拨时弦的运动都是典型的例子。振动理论研究物体的振动规律与作用在其上的力的关系。

一般来说,一个振动系统通常包括储存势能的元件(例如弹簧)、储存动能的元件(例如质量块或其他惯性元件)和一个耗能元件(阻尼器)。

系统在振动时,动能会不断地转化为势能;反过来,势能也会不断地转化为动能。如果

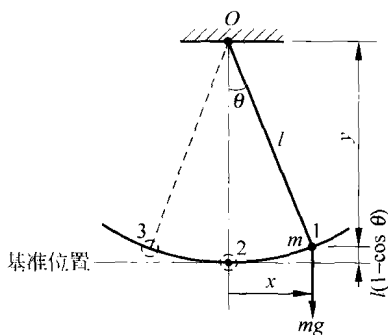


图 1.1 单摆

系统存在阻尼,振动的能量在经过一个周期后会有耗散。所以要想保持系统持续的振动就必须通过外力使损耗的能量得到补偿。

作为一个例子,考虑图 1.1 所示的单摆的运动。为此,使单摆偏离竖直位置一个角位移 θ 后释放。在位置 1,振动速度为零,所以振动的动能为零;但相对于参考位置 2,其势能的大小为 $mgl(1 - \cos \theta)$ 。由于重力对悬挂点 O 有力矩 $mgl \sin \theta$,所以振子会从位置 1 向左运动,并具有一个顺时针方向的角加速度。

当到达位置 2 时,全部势能都转化为动能,因此振子在位置 2 并不会停下来,而是继续向位置 3 摆动。但是当其通过中间位置 2 后,由于重力引起的一个逆时针方向的外力矩就开始起作用,所以振子的速度会越来越小,在左边的极限位置处振子的速度为零。此时,振子的全部动能都转化为势能,还是由于重力矩的作用,振子获得一个逆时针方向的角速度。所以摆球会以一个逐渐增加的速度返回并通过到中间位置 2。这个过程不断重复,就形成摆的振动。不过,由于周围介质的阻尼作用,事实上角位移 θ 的振幅会逐渐变小,摆最终停下来。这意味着由于空气阻力等的作用,振动的能量在每一个周期都会有损耗。

用来描述系统全部元件在运动过程中的某一瞬时在空间所处几何位置的独立坐标的数

目定义为系统的自由度。图 1.1 所示的单摆和图 1.2 所示的几个系统都只具有 1 个自由度。例如,单摆的运动可以用角坐标 θ 或笛卡儿坐标 x 和 y 描述。当采用 x 和 y 时,必须注意到它们是不独立的,二者受下列条件的相互约束: $x^2 + y^2 = l^2$, 其中 l 是摆绳的长度。所以两者之中的任何一个都可以用来描述系统的运动。在这个例子中我们会发现,用角坐标 θ 来描述系统的运动更方便。图 1.2(a) 中的滑块,可以用角坐标 θ 或直角坐标 x 来描述其运动。图 1.2(b) 中,可以用直线坐标 x 来描述系统的运动。图 1.2(c) 所示的扭振系统(长杆的端部固结着一个重盘)中,可以用角坐标 θ 来描述系统的运动。

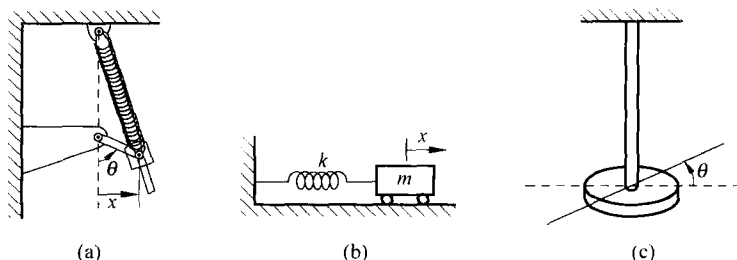


图 1.2 单自由度系统

(a) 曲柄-滑块-弹簧机构; (b) 弹簧-质量系统; (c) 扭振系统

图 1.3 和图 1.4 中分别给出了一些两自由度和三自由度系统的例子。图 1.3(a) 给出了一个用两个直线坐标 x_1 和 x_2 描述其运动的双弹簧-质量系统。1.3(b) 为一用角坐标 θ_1 和 θ_2 描述其运动的双盘转子系统。图 1.3(c) 所示系统的运动可以用 X 和 θ 或用 x, y 和 X 来描述。若采用后者, x 和 y 受下列条件的约束: $x^2 + y^2 = l^2$, 式中 l 是常量。

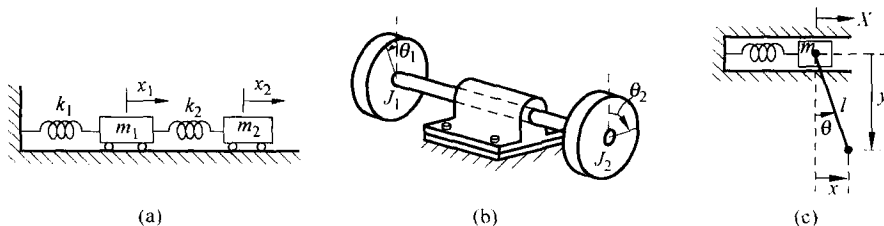


图 1.3 两自由度系统

对图 1.4(a) 和 (c) 所示系统,可以分别用 $x_i (i=1, 2, 3)$ 和 $\theta_i (i=1, 2, 3)$ 来描述其运动。对图 1.4(b) 所示系统, $\theta_i (i=1, 2, 3)$ 可以准确说明质量块 $m_i (i=1, 2, 3)$ 所处的位置。也可以用坐标 $x_i (i=1, 2, 3)$ 和 $y_i (i=1, 2, 3)$ 来描述其运动,但必须考虑如下约束条件: $x_i^2 + y_i^2 = l_i^2 (i=1, 2, 3)$ 。

用来描述系统运动的一组独立坐标通常称为系统的广义坐标,一般用 q_1, q_2, \dots 表示。显然,它们可以是笛卡儿坐标,也可以不是笛卡儿坐标。

大量的实际系统可以用有限多个坐标来描述其运动,如图 1.1 ~ 图 1.4 所示的系统。

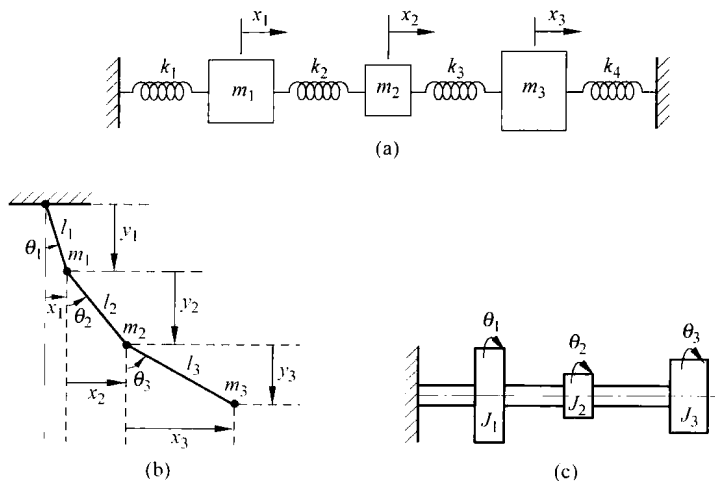


图 1.4 三自由度系统

但也有一些系统,尤其是包含弹性体的系统,要用无限多个坐标来描述其运动,所以具有无限多个自由度。作为一个简单的例子,考虑图 1.5 所示的系统。由于一个梁是由无限多个质点组成的,自然需要无限多个坐标来描述其变形以后的形状。这无限多个坐标可以定义其发生弹性变形后的挠曲线。所以这个悬臂梁具有无限多个自由度。大多数结构和机械系统都包含可变形(弹性)的构件,所以也都具有无限多个自由度。

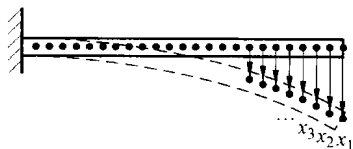


图 1.5 悬臂梁(无限自由度系统)

具有有限多个自由度的系统称为离散系统或集中参数系统;具有无限多个自由度的系统称为连续系统或分布参数系统。

在大多数情况下,连续系统可以用离散系统近似,从而可以用比较简单的方法得到系统的解。虽然按连续系统处理可以得到精确的结果,但可以用来处理连续系统的解析方法只能用于为数不多的简单问题,如等截面梁、细长杆和薄板等。所以研究实际问题时,大多数情况下都把它们简化成具有有限多个集中质量、有限多个弹簧和有限多个阻尼器的系统。一般来说,增加简化系统包含的集中质量、弹簧和阻尼器的数目,也就是增加系统的自由度,得到的结果就会更精确。

1.2 振动的分类

可以按不同的方法对振动进行分类。下面给出一些比较重要的分类。

1. 自由振动与受迫振动

系统受到一个初始扰动后任其自身振动称为自由振动。系统作自由振动时,并不受外

力的作用。常见的单摆运动就是自由振动的例子。

系统在外力作用下(通常是重复性的力)所作的振动称为**受迫振动**。发生在机械如柴油发动机中的振动是受迫振动的例子。如果外力的频率与系统的固有频率之一一致,系统就会发生**共振**,即系统的振动幅度将会非常大。建筑结构、桥梁、汽轮机和机翼等的损坏都与共振的产生有关。

2. 有阻尼振动与无阻尼振动

如果在振动过程中,系统的能量并无由于摩擦或其他形式的阻力引起的损耗,则称为**无阻尼振动**。但如果由于上述因素引起系统的任何一种形式的能量损耗,则称为**有阻尼振动**。在许多物理系统中,阻尼的量值一般很小,因此大多数实际问题的阻尼都可以忽略不计。但是分析系统在共振点附近的振动时,阻尼的影响却变得非常重要。

3. 线性振动与非线性振动

如果一个系统的全部元件即弹簧、质量块和阻尼器的行为都遵循线性规律,则这个系统的振动称为**线性振动**。反之,如果系统中任何一个元件的行为是非线性的,则这个系统的振动称为**非线性振动**。表征线性振动系统运动规律的微分方程是线性的;表征非线性振动系统运动规律的微分方程是非线性的。对于一个线性振动系统,叠加原理成立;但是对于一个非线性振动系统,叠加原理是不成立的,相关的分析方法也远不如线性系统的分析方法那样被人们所熟知。由于所有的振动系统在振动幅度不断增加时都趋于非线性行为,所以在处理实际问题时,关于非线性振动的知识总是被人们所期望。

4. 确定性振动与随机振动

如果作用在振动系统上激励(力或运动)的值或幅值在任一给定的时间都是确定的,则这种激励称为**确定性激励**,相应的振动称为是**确定性振动**。

但在某些情况下,激励却是不确定的或者叫随机的,也就是激励的值在任一给定的时间都是不能预测的。这时激励的大量记录却可能表现出某种统计规律。因此,估计激励的某种平均如平均值或均方值是可能的。风速、路面粗糙度、地震时地面的运动等都是随机激励的例子。如果一个系统所受的激励是随机的,那么相应的振动就称为**随机振动**。此时系统的响应也是随机的,所以只能用统计量来描述。图 1.6 给出了确定性激励和随机激励的示意图。

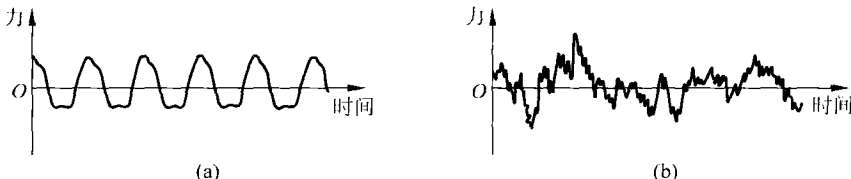


图 1.6 确定性激励和随机激励

(a) 确定性激励; (b) 随机激励

1.3 振动分析的一般步骤

一个振动系统本质上是一个动力系统,这是由于其变量如所受到的激励(输入)和响应(输出)都是随时间变化的。一个振动系统的响应一般来说是依赖于初始条件和外激励的。大多数实际振动系统都十分复杂,因而在进行数学分析时把所有的细节都考虑进来是不可能的。为了预测在指定输入下振动系统的行为,通常只是考虑系统那些最重要的特性。也会经常遇到这样的情况,即对于一个复杂的物理系统,即使采用一个比较简单的模型也能够大体了解其行为。对一个振动系统进行分析通常包括以下步骤。

步骤1 建立数学模型

建立数学模型的目的是揭示系统的全部重要特性,从而得到描述系统动力学行为的控制方程。一个系统的数学模型应该包括足够多的细节,能够用方程描述系统的行为但又不致使其过于复杂。根据基本元件行为的属性,一个振动系统的数学模型可以是线性的,也可以是非线性的。线性模型处理简单、容易求解。但非线性模型有时能够揭示线性模型不能够预测到的某些系统特性。所以需要对实际系统做大量的工程判断以得到振动系统比较合理的模型。

有时为了得到更准确的结果,需要对系统的数学模型不断进行完善。此时可以先用一个比较粗略的模型,以便能够较快地对系统的大体属性有所了解。之后再通过增加更多的元件和(或)细节对模型不断改进,以便进一步分析系统的动力学行为。为了说明如何对数学模型不断完善,考虑图 1.7(a)所示的锻锤。该锻锤由框架、落下的重物(锤头)、砧座和基础构成。砧座是一个比较重的金属块,通过锤头的持续冲击作用,材料在其上被锻造成所期望的形状。砧座通常放在一个弹性垫上,以减少传到基础和框架上的振动。作为第一次近似,框架、砧座、弹性垫、基础和土壤可以简化为一个单自由度系统,如图 1.7(b)所示。作为改进的模型,框架、砧座和基础可以分开,从而简化为一个两自由度系统,如图 1.7(c)所示。如果想对模型继续改进,可以考虑锤头偏心的影响。这时图 1.7(c)中的每一质量块除了在纸面内的竖向运动,还有在纸面内的转动。

步骤2 推导控制方程

一旦有了系统的数学模型,就可以利用动力学定律推导描述系统响应变化规律的运动微分方程。系统的运动微分方程可以通过作每一个质量块的受力分析图方便地得到。每一质量块的受力分析图可以通过分离该质量块并加上其所受的全部主动力、反作用力和惯性力得到。一个振动系统的运动微分方程对于离散系统来说,通常是一个常微分方程组;对于连续系统来说,通常是一个偏微分方程组。根据基本元件行为的属性,一个振动系统的运动微分方程(组)可以是线性的,也可以是非线性的。以下几种方法经常用来推导系统的控制

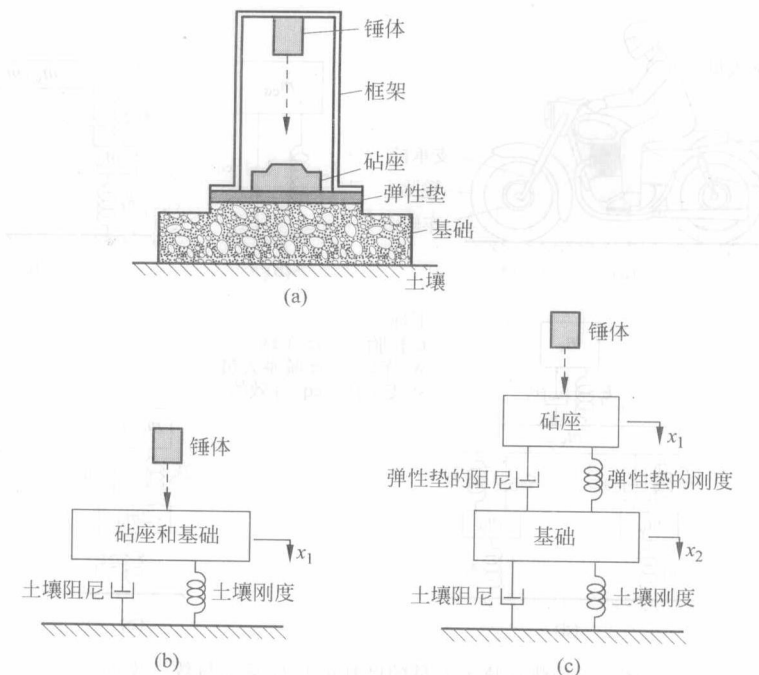


图 1.7 锻锤模型

方程：牛顿第二运动定律、达朗贝尔原理和能量守恒原理。

步骤3 求控制方程的解

为了得到振动系统响应的规律，必须求解控制方程。根据问题的具体特点，可以采取下述方法之一：求解微分方程的常规方法、拉普拉斯变换方法、矩阵方法和数值计算方法。如果控制方程是非线性的，则很少能够得到其封闭形式的解。另外，求解偏微分方程的情况也远比求解常微分方程的情况多。利用计算机的数值计算方法求解微分方程是非常便捷的，但欲根据数值计算结果得到关于系统行为的一般结论却是困难的。

步骤4 结果分析

虽然控制方程的解给出了系统中不同质量块的振动位移、速度和加速度的表达式，但这些结果还必须就某些目的做进一步分析，以期分析结果可能揭示对设计的某些指导意义。

例 1.1 图 1.8(a)是一个载有骑乘人员的摩托车示意图。为了分析它在竖直方向的振动，给出不断改进的三种数学模型。考虑轮胎的弹性、支承杆在竖直方向的弹性和阻尼、车轮的质量、骑乘人员的弹性、阻尼和质量。

解：从一个最简单的模型开始，然后不断改进。如果认为可以得到系统的等效质量、等效阻尼和等效刚度，那么它的数学模型可以用图 1.8(b)所示的单自由度系统表示。在这个

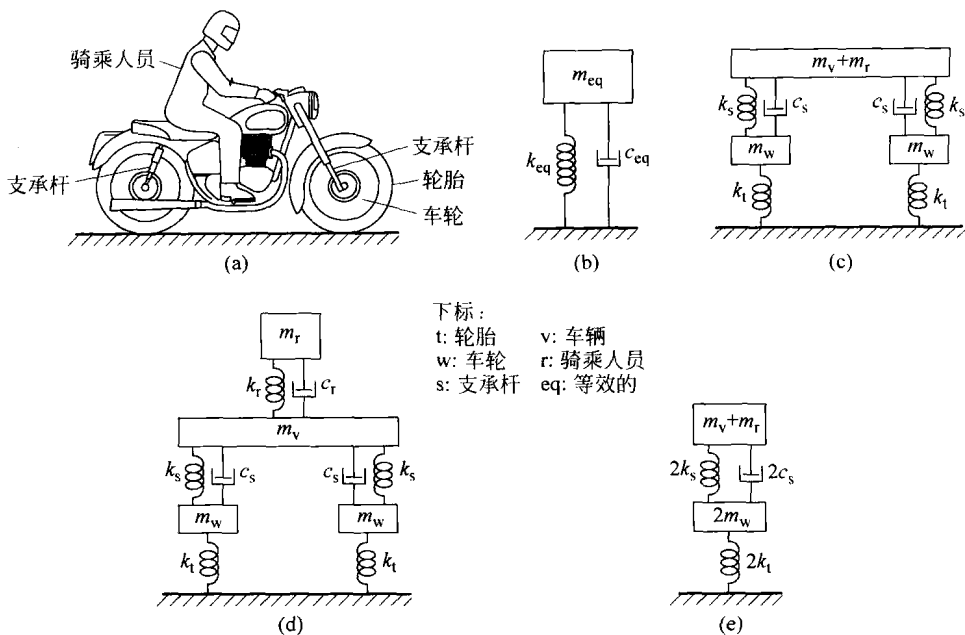


图 1.8 载有骑乘人员的摩托的物理系统与数学模型

模型中,等效刚度 k_{eq} 考虑了轮胎的刚度、支承杆在竖直方向的刚度以及骑乘人员的刚度。等效阻尼常数 c_{eq} 考虑了支承杆在竖直方向的阻尼以及骑乘人员的阻尼。等效质量 m_{eq} 考虑了轮胎的质量、车身的质量以及骑乘人员的质量。为了对这个模型进行改进,可以把车轮的质量、轮胎的弹性以及其支承杆的弹性和阻尼分别表示出来,从而得到图 1.8(c) 所示的三自由度系统。在这个模型中, $m_v + m_r$ 表示车身和骑乘人员的质量。如果还考虑骑乘人员的刚度和阻尼(分别用 k_r 和 c_r 表示),又可以得到图 1.8(d) 所示的数学模型。

应该注意,图 1.8(b)~(d) 所示的数学模型并不是唯一的。例如,把两个轮胎的弹性用一个弹簧来代替、把两个车轮的质量用一个质量来代替、把两个支承杆的弹性和阻尼分别用另一个弹簧和阻尼器来代替,就可以根据图 1.8(c) 得到图 1.8(e) 所示的数学模型。

1.4 弹簧元件

在进行振动分析时一般忽略弹簧元件的质量和阻尼,而只考虑其弹性。当其两端有相对运动时,弹簧对与其相连的物体有力的作用。对于线性弹簧来说,这个力正比于变形,即

$$F = kx \quad (1.1)$$

式中, x 也就是弹簧的变形等于弹簧两端的相对位移; k 为弹簧刚度或弹簧常数。根据式(1.1),如果用图像来描述弹簧力 F 和弹簧变形 x 之间的关系,将得到一条直线。使弹簧

变形的力所做的功以变形能或势能的形式储存下来,其表达式为

$$U = \frac{1}{2} k x^2 \quad (1.2)$$

实际的弹簧往往是非线性的,但一般来说在某一变形范围内仍满足式(1.1)。超过某一变形值后(图 1.9 中的 A 点),应力超过材料的屈服极限,力和变形之间的关系就呈非线性了。在许多应用中,人们都假设弹簧只发生较小的变形,因而可以利用式(1.1)。即使力和变形之间是如图 1.10 所示的非线性关系,人们也经常用线性关系来近似。为了说明如何线性化,令 F 表示使弹簧处于静平衡时的外力, x^* 表示相应的变形。如果使力 F 有一个增量 ΔF , 相应的变形增量记为 Δx 。对 $F + \Delta F$ 在静平衡点 x^* 处作泰勒(Taylor)级数展开,即

$$\begin{aligned} F + \Delta F &= F(x^* + \Delta x) \\ &= F(x^*) + \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x^*} (\Delta x) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2 F}{dx^2} \right|_{x^*} (\Delta x)^2 + \cdots \end{aligned} \quad (1.3)$$

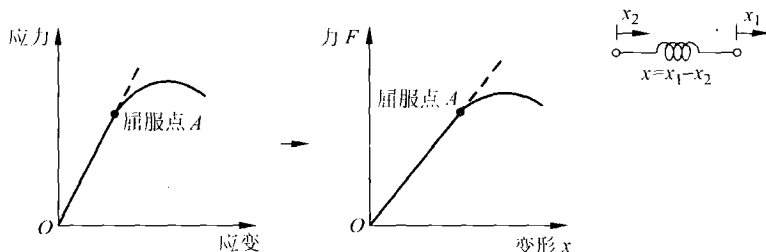


图 1.9 比例极限后的非线性

对于较小的变形增量 Δx , 高阶导数项可以忽略不计, 所以由式(1.3)得

$$F + \Delta F = F(x^*) + \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x^*} (\Delta x) \quad (1.4)$$

注意到 $F = F(x^*)$, ΔF 可以写成如下形式:

$$\Delta F = k \Delta x \quad (1.5)$$

显然, 等效线性弹簧常数为

$$k = \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x^*}$$

为了简单, 可以利用式(1.5), 但有时由于这种近似带来的误差可能比较大。

像梁这样的弹性元件其作用也相当于弹簧。例如, 如图 1.11 所示端部有集中质量 m 的悬臂梁, 为了简单, 可以假设梁的质量相对于集中质量 m 可以忽略不计。根据材料力学的结果, 梁在自由端的静变形为

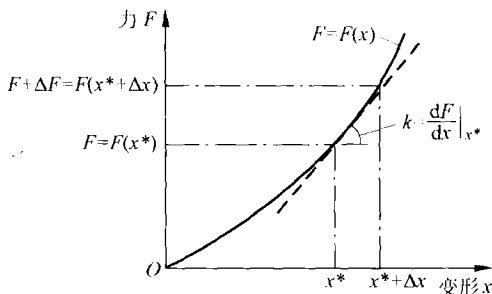


图 1.10 线性化过程

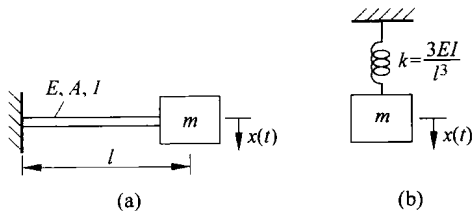


图 1.11 悬臂梁有一个端部集中质量

(a) 实际系统; (b) 单自由度模型

$$\delta_{st} = \frac{Wl^3}{3EI} \quad (1.6)$$

式中, $W = mg$ 是质量块的重量; E 是杨氏模量; I 是梁横截面的惯性矩。所以梁的弹簧常数是

$$k = \frac{W}{\delta_{st}} = \frac{3EI}{l^3} \quad (1.7)$$

类似地, 也可以得到其他不同边界梁的弹簧常数。

在许多实际应用中, 经常遇到几个线性弹簧同时使用的情况。这些弹簧可以用一个等效弹簧来代替, 下面给出详细讨论。

1. 并联弹簧

为推导并联弹簧的等效刚度, 考虑图 1.12(a) 所示的两个弹簧并联的情况。设在某个载荷 W 的作用下, 系统产生静变形 δ_{st} , 如图 1.12(b) 所示。此时系统的受力如图 1.12(c) 所示, 此时的静力平衡关系为

$$W = k_1 \delta_{st} + k_2 \delta_{st} \quad (1.8)$$

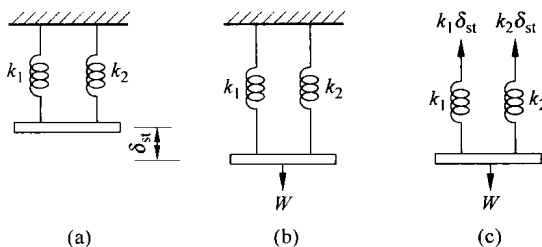


图 1.12 并联弹簧

如果等效弹簧的刚度用 k_{eq} 表示, 则此时的静力平衡关系为

$$W = k_{eq} \delta_{st} \quad (1.9)$$

由式(1.8)和式(1.9)得

$$k_{eq} = k_1 + k_2 \quad (1.10)$$

不难看出,如果是 n 个弹簧刚度分别为 k_1, k_2, \dots, k_n 的弹簧并联的情况,等效刚度系数为

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + \dots + k_n \quad (1.11)$$

2. 串联弹簧

为推导几个串联弹簧的等效刚度,考虑图 1.13(a) 所示的两个弹簧串联的情况。设在载荷 W 的作用下,两个弹簧的伸长量分别为 δ_1 和 δ_2 ,如图 1.13(b) 所示。显然两个弹簧静变形的总量为

$$\delta_{st} = \delta_1 + \delta_2 \quad (1.12)$$

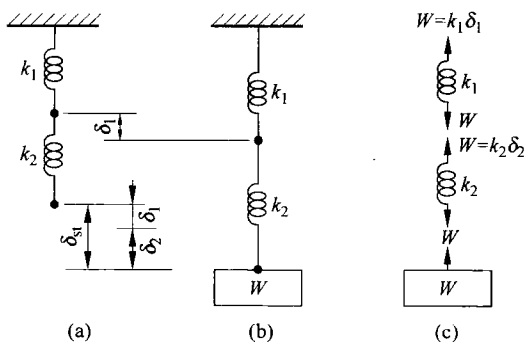


图 1.13 串联弹簧

由于两个弹簧承受的载荷均为 W ,故可得如图 1.13(c) 所示的平衡关系:

$$\left. \begin{aligned} W &= k_1 \delta_1 \\ W &= k_2 \delta_2 \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

等效弹簧的刚度还用 k_{eq} 表示,则对于同样的静变形,有如下静力平衡关系:

$$W = k_{eq} \delta_{st} \quad (1.14)$$

由式(1.13)和式(1.14)得

$$k_1 \delta_1 = k_2 \delta_2 = k_{eq} \delta_{st}$$

或

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= \frac{k_{eq} \delta_{st}}{k_1} \\ \delta_2 &= \frac{k_{eq} \delta_{st}}{k_2} \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

把式(1.15)中的 δ_1 和 δ_2 代入到式(1.12)可得

$$\frac{k_{eq} \delta_{st}}{k_1} + \frac{k_{eq} \delta_{st}}{k_2} = \delta_{st}$$

即

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad (1.16)$$

对于多个弹簧串联的情况,有

$$\frac{1}{k_{\text{eq}}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n} \quad (1.17)$$

在某些应用中,弹簧会与诸如滑轮、杠杆、齿轮等刚体连接。此时,等效弹簧刚度可以利用能量等效的原则确定,见例 1.5。

例 1.2 图 1.14 所示为运货卡车的悬挂系统,其中包含 3 个并联的弹簧。如果螺旋弹簧材料的剪切弹性模量为 $G=80 \times 10^9 \text{ N/m}^2$,有效圈数为 5,簧圈的平均直径为 $D=20 \text{ cm}$,簧丝直径为 $d=2 \text{ cm}$,求悬挂系统的等效刚度。

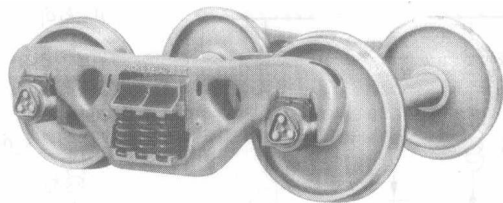


图 1.14 货车中弹簧并联的情况(承 Buckeye Steel Castings Company 许可)

解: 每一个弹簧的刚度为

$$k = \frac{d^4 G}{8 D^3 n} = \frac{0.02^4 \times (80 \times 10^9)}{8 \times 0.2^3 \times 5} = 4 \times 10^4 \text{ (N/m)}$$

此公式可以从一般的《机械设计手册》或《材料力学》教材中查到。由于 3 个相同的弹簧是并联关系,所以等效弹簧刚度为

$$k_{\text{eq}} = 3k = 3 \times 4 \times 10^4 = 1.2 \times 10^5 \text{ (N/m)}$$

例 1.3 求图 1.15 所示螺旋推进器轴的等效扭簧刚度常数。

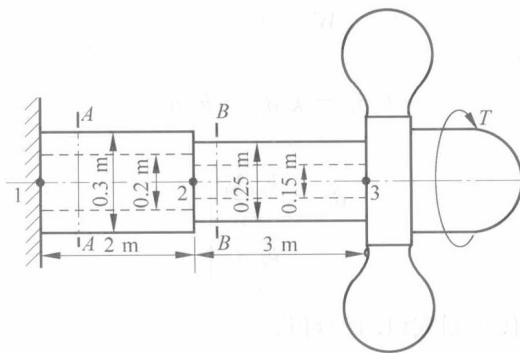


图 1.15 螺旋推进器的轴

解: 需要把轴的两段按串联弹簧考虑。根据图 1.15,轴的任意截面所承受的扭矩都等于作用在推进器上的外力矩 T ,所以这两段的弹性可以看成是串联关系。两段的刚度分

别为

$$\begin{aligned}
 k_{t_{12}} &= \frac{GJ_{12}}{l_{12}} = \frac{G\pi(D_{12}^4 - d_{12}^4)}{32l_{12}} = \frac{80 \times 10^9 \pi (0.3^4 - 0.2^4)}{32 \times 2} \\
 &= 25.5255 \times 10^6 \text{ (N} \cdot \text{m/rad)} \\
 k_{t_{23}} &= \frac{GJ_{23}}{l_{23}} = \frac{G\pi(D_{23}^4 - d_{23}^4)}{32l_{23}} = \frac{80 \times 10^9 \pi (0.25^4 - 0.15^4)}{32 \times 3} \\
 &= 8.9012 \times 10^6 \text{ (N} \cdot \text{m/rad)}
 \end{aligned}$$

由于这两个弹簧是串联关系,由式(1.16)得

$$\begin{aligned}
 k_{t_{eq}} &= \frac{k_{t_{12}} k_{t_{23}}}{k_{t_{12}} + k_{t_{23}}} = \frac{(25.5255 \times 10^6)(8.9012 \times 10^6)}{25.5255 \times 10^6 + 8.9012 \times 10^6} \\
 &= 6.5997 \times 10^6 \text{ (N} \cdot \text{m/rad)}
 \end{aligned}$$

例 1.4 如图 1.16(a)所示,卷扬机的卷筒固定在悬臂梁的端部,其上绕有钢丝绳。求悬垂段钢丝绳的长度为 l 时系统的等效弹簧刚度。假设钢丝绳净横截面的直径为 d ,梁和钢丝绳材料的杨氏模量为 E 。

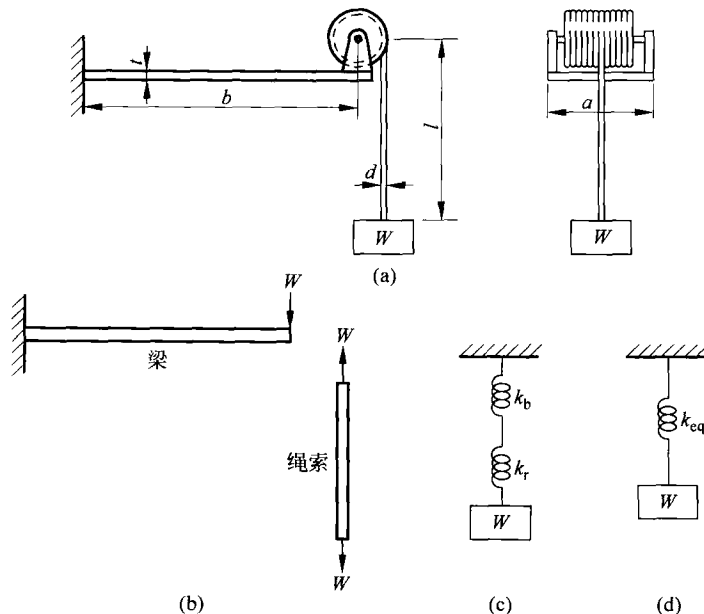


图 1.16 卷扬机卷筒

解: 悬臂梁的弹簧刚度为

$$k_b = \frac{3EI}{b^3} = \frac{3E}{b^3} \left(\frac{1}{12} at^3 \right) = \frac{Eat^3}{4b^3} \quad (\text{E. 1})$$

承受轴向载荷的钢丝绳的弹簧刚度为

$$k_r = \frac{AE}{l} = \frac{\pi d^2 E}{4l} \quad (\text{E. 2})$$

如图 1.16(b)所示,由于钢丝绳和悬臂梁承受同样的载荷,所以可把它们看成是串联的弹簧,如图 1.16(c)所示。故它们的等效弹簧刚度为

$$\frac{1}{k_{\text{eq}}} = \frac{1}{k_b} + \frac{1}{k_r} = \frac{4b^3}{Ea^3} + \frac{4l}{\pi d^2 E}$$

或

$$k_{\text{eq}} = \frac{E}{4} \left(\frac{\pi a^3 d^2}{\pi d^2 b^3 + la^3} \right) \quad (\text{E. 3})$$

例 1.5 图 1.17(a)是一起重机的示意图。吊臂 AB 是等截面的钢杆,长度为 10 m,横截面的面积为 2500 mm²。起吊重物 W 并处于静止状态,钢拉索 CDEBF 横截面的面积为 100 mm²。求该系统在竖直方向的等效弹簧刚度。

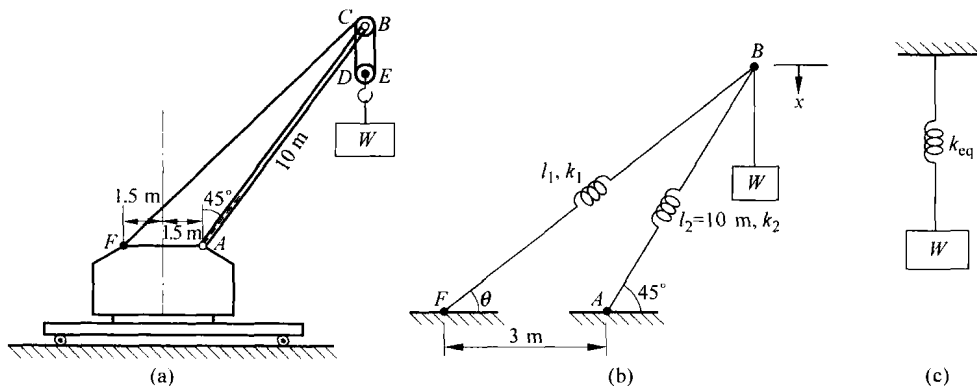


图 1.17 正在作业的起重机

解: 利用实际系统与等效系统的势能相等求等效弹簧刚度。起重机的底座可以看成是刚性的,并认为吊臂和拉索分别固定在 A 点和 F 点。忽略 CDEB 段钢索的影响,认为重物 W 通过点 B 作用于系统,如图 1.17(b)所示。

与点 B 在竖直方向的位移 x 对应,弹簧 2(吊臂)和弹簧 1(拉索)产生的变形分别为 $x_2 = x \cos 45^\circ$, $x_1 = x \cos(90^\circ - \theta)$ 。拉索 FB 的长度 l_1 满足

$$l_1^2 = 3^2 + 10^2 - 2 \times 3 \times 10 \cos 135^\circ = 151.426$$

由此得

$$l_1 = 12.3055 \text{ m}$$

角度 θ 满足如下关系:

$$l_1^2 + 3^2 - 2 \times l_1 \times 3 \cos \theta = 10^2$$

由此得

$$\cos \theta = 0.8184, \quad \theta = 35.0736^\circ$$

根据式(1.2),刚度为 k_1 和 k_2 的两个弹簧所储存的全部势能为

$$U = \frac{1}{2}k_1(x\cos 45^\circ)^2 + \frac{1}{2}k_2[x\cos(90^\circ - \theta)]^2 \quad (\text{E. 1})$$

式中

$$k_1 = \frac{A_1 E_1}{l_1} = \frac{(100 \times 10^{-6})(207 \times 10^9)}{12.3055} = 1.6822 \times 10^6 \text{ (N/m)}$$

$$k_2 = \frac{A_2 E_2}{l_2} = \frac{(2500 \times 10^{-6})(207 \times 10^9)}{10} = 5.1750 \times 10^7 \text{ (N/m)}$$

由于竖直方向的等效弹簧产生的变形为 x ,故等效弹簧的势能为

$$U_{\text{eq}} = \frac{1}{2}k_{\text{eq}}x^2 \quad (\text{E. 2})$$

令 $U=U_{\text{eq}}$,得系统的等效弹簧刚度为

$$k_{\text{eq}} = 26.4304 \times 10^6 \text{ (N/m)}$$

1.5 质量或惯性元件

质量或惯性元件按刚体考虑,当其速度改变时会导致动能的增加或减少。根据牛顿第二运动定律,刚体的质量与加速度的乘积等于作用在其上的外力。功等于力与沿力方向的位移的乘积。力对物体所做的功使物体具有动能。

在大多数情况下,对一个实际的振动系统建立数学模型时,经常会有几种可能的选择。通常是由分析的目的决定哪一个模型是最适合的。一旦确定了数学模型,系统的质量或惯性元件就容易识别了。例如,当讨论图 1.11(a)所示的端部有一个质量块的悬臂梁时,为了较快地得到比较准确的结果,梁的质量和阻尼可以忽略不计。此时系统的简化结果如图 1.11(b)所示。显然这时的端部质量是质量元件,弹簧反映梁的弹性。下面再考虑一个多层建筑承受地震波的例子。与楼板相比,框架的质量可以忽略不计。整个建筑物可以简化成如图 1.18 所示的多自由度系统。每一层楼板的质量用不同的质量元件来表示。竖直方向结构件的弹性用不同的弹簧元件来表示。

在许多实际问题中,经常会遇到几个质量块同时出现的情况。对于简单的分析,可以用下述方法把它们用一个等效质量来代替。

1. 几个运动属性相同的质量块由一个刚性杆连在一起

如图 1.19(a)所示,此杆可以绕端部的销轴转动。可任意假设等效质量在杆中的位置,作为一种特例,不妨假设等效质量在 m_1 处。对于杆只有较小角位移的情形, m_2 和 m_3 的速度可以用 m_1 的速度表示,即

$$\dot{x}_2 = \frac{l_2}{l_1} \dot{x}_1, \quad \dot{x}_3 = \frac{l_3}{l_1} \dot{x}_1 \quad (1.18)$$

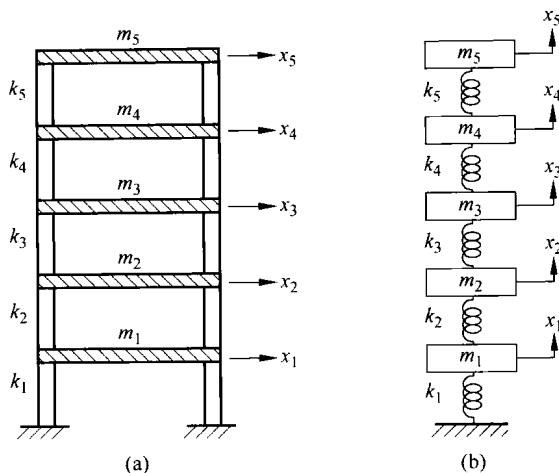


图 1.18 多层建筑简化为一个多自由度系统

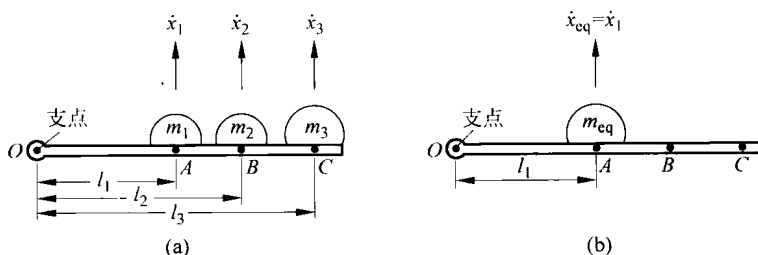


图 1.19 几个质量块由一个转动的刚性杆连在一起

另外

$$\dot{x}_{\text{eq}} = \dot{x}_1 \quad (1.19)$$

这 3 个质量块的动能等于等效质量的动能,有

$$\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2 = \frac{1}{2}m_{\text{eq}}\dot{x}_{\text{eq}}^2 \quad (1.20)$$

利用式(1.18)和式(1.19),由式(1.20)得

$$m_{\text{eq}} = m_1 + \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 m_2 + \left(\frac{l_3}{l_1}\right)^2 m_3 \quad (1.21)$$

2. 平动质量和转动质量耦合在一起

如图 1.20 所示,设齿条的质量为 m ,平动速度为 \dot{x} ,齿轮的转动惯量为 J_0 ,角速度为 $\dot{\theta}$ 。这两个质量块既可以用一个等效的平动质量来代替,也可以用一个等效的转动质量来代替。

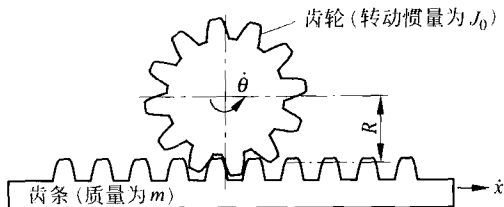


图 1.20 齿轮齿条机构中的平动质量和转动质量

1) 等效平动质量

整个系统的动能,也就是齿条和齿轮的动能,为

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2 \quad (1.22)$$

等效平动质量动能的表达式为

$$T_{eq} = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}_{eq}^2 \quad (1.23)$$

由于 $\dot{x}_{eq} = \dot{x}$, $\dot{\theta} = \dot{x}/R$, 所以根据系统的动能与等效质量的动能相等,得

$$\frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_0 \left(\frac{\dot{x}}{R} \right)^2$$

即

$$m_{eq} = m + \frac{J_0}{R^2} \quad (1.24)$$

2) 等效转动质量

注意 $\dot{\theta}_{eq} = \dot{\theta}$, $\dot{x} = \dot{\theta} R$, 根据系统的动能与等效质量的动能相等,有

$$\frac{1}{2} J_{eq} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{\theta} R)^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2$$

故

$$J_{eq} = J_0 + mR^2 \quad (1.25)$$

例 1.6 求图 1.21 所示系统的等效质量。其中,刚性连杆 1 与滑轮固接,并绕滑轮的销轴转动。

解: 对于小位移,可根据等效质量的动能与原系统的动能相等来确定等效质量 m_{eq} 。当质量块 m 有一个位移 x 时,滑轮和刚性连杆 1 转过的角度为 $\theta_p = \theta_1 = x/r_p$, 与此对应,刚性连杆 2 和圆柱产生的位移为 $x_2 = \theta_p l_1 = x l_1 / r_p$ 。由于圆柱只滚不滑,圆柱转过的角度为 $\theta_c = x_2 / r_c = x l_1 / r_p r_c$ 。所以系统的动能为

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_p \dot{\theta}_p^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} J_c \dot{\theta}_c^2 + \frac{1}{2} m_c \dot{x}_2^2 \quad (E.1)$$

式中, J_p , J_1 和 J_c 分别代表滑轮、刚性连杆 1 (相对轴 O) 和圆柱的转动惯量; $\dot{\theta}_p$, $\dot{\theta}_1$ 和 $\dot{\theta}_c$ 分

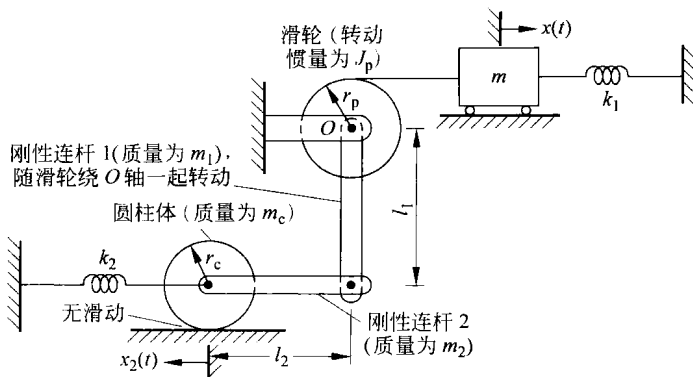


图 1.21 一个待求等效质量的复杂系统

别代表滑轮、刚性连杆 1(相对轴 O) 和圆柱的角速度; \dot{x} 和 \dot{x}_2 分别代表质量块 m 和刚性连杆 2 的线速度。注意 $J_c = m_c r_c^2 / 2$, $J_1 = m_1 l_1^2 / 3$, 式(E. 1)可以重写为

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_p \left(\frac{\dot{x}}{r_p} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{m_1 l_1^2}{3} \right) \left(\frac{\dot{x}}{r_p} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{\dot{x} l_1}{r_p} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{m_c r_c^2}{2} \right) \left(\frac{\dot{x} l_1}{r_p r_c} \right)^2 + \frac{1}{2} m_c \left(\frac{\dot{x} l_1}{r_p} \right)^2 \quad (\text{E. 2})$$

等效质量的动能表达式为

$$T = \frac{1}{2} m_{\text{eq}} \dot{x}^2 \quad (\text{E. 3})$$

令式(E. 2)与式(E. 3)相等, 得

$$m_{\text{eq}} = m + \frac{J_p}{r_p^2} + \frac{1}{3} m_1 \frac{l_1^2}{r_p^2} + m_2 \frac{l_1^2}{r_p^2} + \frac{1}{2} m_c \frac{l_1^2}{r_p^2} + m_c \frac{l_1^2}{r_p^2} \quad (\text{E. 4})$$

例 1.7 图 1.22 所示凸轮-从动杆机构利用一个轴的旋转运动实现阀的往复运动。从动杆系统由推杆(质量为 m_p)、摇臂(质量为 m_r , 对其重心的转动惯量为 J_r)、阀杆(质量为 m_v)和阀门弹簧(不计质量)组成。求该机构的等效质量 m_{eq} , 分别假设等效质量的位置在 A 点和 C 点。

解: 该机构的等效质量可以根据等效质量的动能与原系统的动能相等来确定。当推杆有一个竖向位移 x 时, 摇臂转过的角度为 $\theta_r = x/l_1$, 阀杆的向下位移为 $x_v = \theta_r l_2 = x l_2/l_1$, 摇臂重心的向下位移为 $x_r = \theta_r l_3 = x l_3/l_1$ 。系统的动能为^①

$$T = \frac{1}{2} m_p \dot{x}_p^2 + \frac{1}{2} m_v \dot{x}_v^2 + \frac{1}{2} J_r \dot{\theta}_r^2 + \frac{1}{2} m_r \dot{x}_r^2 \quad (\text{E. 1})$$

式中, \dot{x}_p , \dot{x}_r 和 \dot{x}_v 分别代表推杆、摇臂重心和阀杆的线速度; $\dot{\theta}_r$ 代表摇臂的角速度。

① 若阀门弹簧的质量为 m_s , 则其等效质量为 $\frac{1}{3} m_s$ (见例 2.8)。所以阀门弹簧的动能为 $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m_s \right) \dot{x}_v^2$ 。

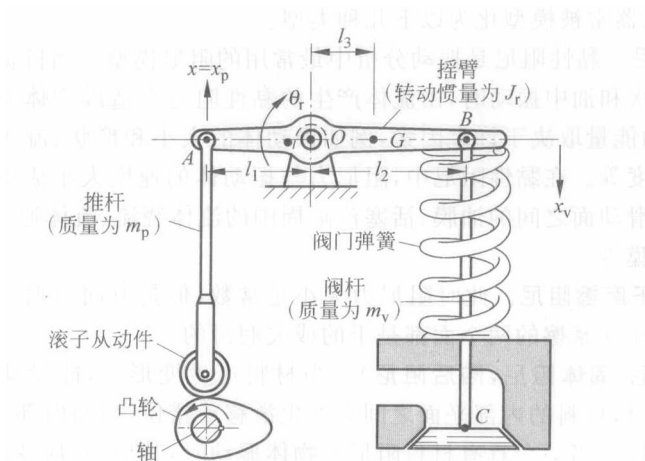


图 1.22 凸轮-从动杆系统

(1) 如果假设等效质量的位置在 A 点, 令其速度为 $\dot{x}_{eq} = \dot{x}$, 则其动能表达式为

$$T_{eq} = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}_{eq}^2 \quad (E. 2)$$

令 T 与 T_{eq} 相等, 并注意下列关系:

$$\dot{x}_p = \dot{x}, \quad \dot{x}_v = \frac{l_2}{l_1} \dot{x}, \quad \dot{x}_r = \frac{l_3}{l_1} \dot{x}, \quad \dot{\theta}_r = \frac{\dot{x}}{l_1}$$

得

$$m_{eq} = m_p + \frac{J_r}{l_1^2} + m_v \frac{l_2^2}{l_1^2} + m_r \frac{l_3^2}{l_1^2} \quad (E. 3)$$

(2) 类似地, 如果假设等效质量的位置在 C 点, 显然其速度为 $\dot{x}_{eq} = \dot{x}_v$, 其动能表达式为

$$T_{eq} = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}_{eq}^2 = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}_v^2 \quad (E. 4)$$

令式(E. 4)与式(E. 1)相等, 得

$$m_{eq} = m_v + \frac{J_r}{l_2^2} + m_p \frac{l_1^2}{l_2^2} + m_r \frac{l_3^2}{l_2^2} \quad (E. 5)$$

1.6 阻尼元件

在许多实际系统中, 振动系统的能量会逐渐转化为热能或噪声。由于能量的减少, 响应(例如系统的位移)会逐渐减弱。使振动系统的能量逐渐变为热能或噪声的机理用系统的阻尼来描述。尽管转换成的热能或噪声相对来说是比较小的, 但考虑阻尼的影响对准确预测系统的振动响应也是非常重要的。一般是假设阻尼器既没有质量也没有弹性, 并且阻尼力只存在于阻尼器两端有相对速度的情形。在实际系统中要确切地说明引起阻尼的原因是很

困难的,因此阻尼器常被模型化为以下几种类型。

(1) **黏性阻尼**。黏性阻尼是振动分析中最常用的阻尼模型。当机械系统在流体介质例如在空气、气体、水和油中振动时,由流体产生的黏性阻力会造成物体能量损耗。在这种情况下,大量损耗的能量取决于许多因素,例如振动体的大小和形状、流体的黏性和振动频率以及振动体的速度等。在黏性阻尼中,阻尼力与振动体的速度大小成正比。最典型的黏性阻尼的例子包括滑动面之间的油膜、活塞汽缸周围的流体绕流、流体通过一个小孔以及轴承与滚珠之间的油膜等。

(2) **库仑或干摩擦阻尼**。此时阻尼力大小是常数,但是方向与振动体的相对运动方向相反。这是因为相互摩擦的两个面都是干的或欠润滑的。

(3) **材料阻尼(固体阻尼,滞后阻尼)**。当材料产生变形时,能量就会被材料吸收和消耗。当产生变形时,材料的内部平面之间会产生滑移或错位,因而内部平面之间的相互摩擦就会引起能量损耗。当一个具有材料阻尼的物体振动时,其应力-应变曲线是如图 1.23(a)所示的滞后回线。该回路所围成的面积确定了由于阻尼的作用,单位体积的物体在一个循环中所损失的能量^①。

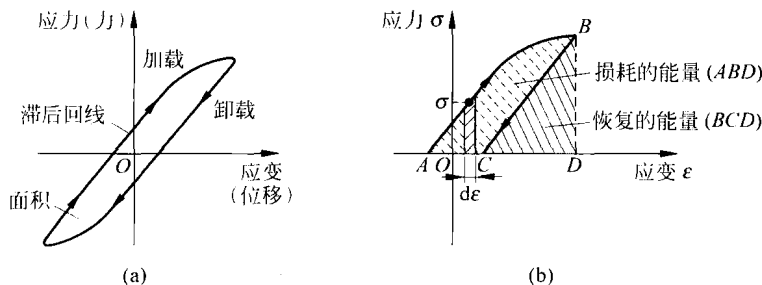


图 1.23 弹性材料的应力-应变滞后回线

1. 黏性阻尼器的结构

黏性阻尼器可以看成是由两块间距为 h 的平行板组成的,两板之间充满黏性系数为 μ 的流体介质(如图 1.24 所示)。让一个平板固定,另一个平板以速度 v 沿所在平面运动。紧邻运动板的流体层的速度为 v ,而和固定板相接触的流体层不动。中间流层的速度假设从 0 到 v 呈线性变化。由黏性流体的牛顿定律,距固定板为 y 的液体层的切应力为

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (1.26)$$

① 当施加于弹性体的载荷增加时,弹性体中的应力(σ)和应变(ϵ)也增加。 σ - ϵ 曲线下方的面积为

$$u = \int \sigma d\epsilon$$

它表示单位体积的弹性体所储存的能量(载荷做功的结果)。卸载时,弹性体释放能量。当卸载路径与加载路径不同时,图 1.23(b)中的面积 ABC 和 1.23(a)中滞后回线的面积表示单位体积的弹性体所损耗的能量。

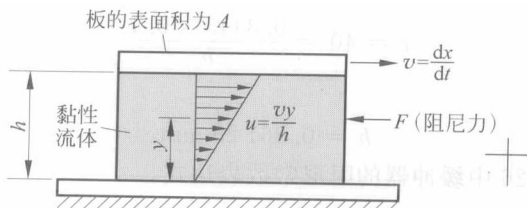


图 1.24 两平行板之间充满黏性流体

其中, $du/dy = v/h$ 是速度梯度。从运动板的下表面开始的切力或阻力 F 为

$$F = \tau A = \frac{\mu A v}{h} = c v \quad (1.27)$$

其中, A 为运动板的面积, 并且

$$c = \frac{\mu A}{h} \quad (1.28)$$

称为阻尼常数。

如果一个阻尼器是非线性的, 一般是利用线性化方法把阻尼力表示为工作速度的线性函数, 就像处理非线性弹簧一样。此时的等效阻尼常数为

$$c = \left. \frac{dF}{dv} \right|_v. \quad (1.29)$$

2. 几个阻尼器的组合

当几个阻尼器以并联或串联的形式出现时, 可采用类似于处理几个质量的等效质量或几个弹簧的等效刚度的方法, 用一个等效阻尼器来代替(见习题 1.35)。

例 1.8 一个轴承可以近似看作是两个平板被一层润滑薄膜分开, 如图 1.25 所示。当使用润滑油 SAE30 润滑时, 轴承可以提供 400 N 的阻力, 并且板间的相对速度为 10 m/s。若板的面积为 0.1 m^2 , 假定板间的距离为 h , 润滑油 SAE30 的绝对黏度为 50×10^{-6} 雷恩(reyn)(英制动力黏度单位, $1 \text{ reyn} = 0.3445 \text{ Pa} \cdot \text{s}$)。求轴承中的间隙。

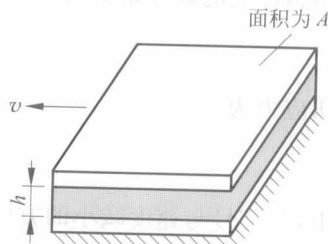


图 1.25 被薄润滑膜分开的平板

解: 由于阻力 F 可以表达为 $F = cv$ 的形式, 其中 c 为阻尼常数, v 为速度, 故有

$$c = \frac{F}{v} = \frac{400}{10} = 40 (\text{N} \cdot \text{s/m}) \quad (\text{E. } 1)$$

把轴承模型化为一个平板类型的阻尼器, 阻尼常数由式(1.28)给出:

$$c = \frac{\mu A}{h} \quad (\text{E. } 2)$$

代入已知数据, 式(E.2)变为

$$c = 40 = \frac{0.3445 \times 0.1}{h}$$

或

$$h = 0.861\,25\text{ mm} \quad (\text{E. 3})$$

例 1.9 建立图 1.26 中缓冲器的阻尼常数表达式。

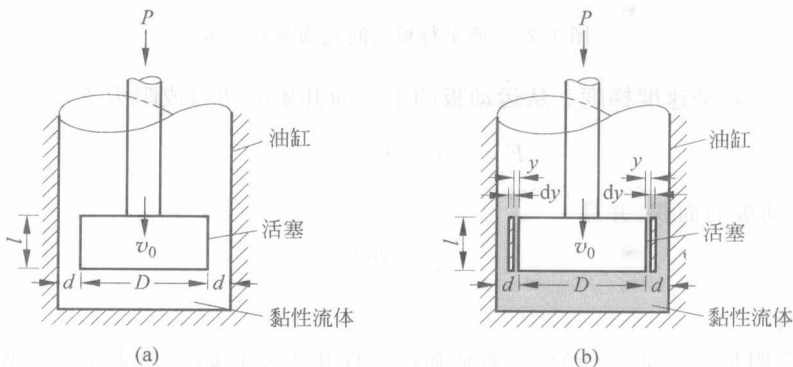


图 1.26 阻尼器

解：缓冲器的阻尼常数可由黏性流体流动的切应力方程和流体流动速率方程来确定。如图 1.26 所示，一个缓冲器活塞的直径为 D ，长度为 l ，在充满黏性系数为 μ （见参考文献[1.24]和[1.32]）的油缸中以速度 v_0 运动。令活塞和油缸之间的间隙为 d ，如图 1.26(b) 所示，在距运动表面为 y 处的速度和切应力分别为 v 和 τ ，在 $(y+dy)$ 处的速度和切应力相应地分别为 $(v-dv)$ 和 $(\tau+d\tau)$ 。 dv 前的“—”号表明 y 朝缸壁方向增大时速度在减小。该微小圆环上的黏性阻力为

$$F = \pi D l d\tau = \pi D l \frac{d\tau}{dy} dy \quad (\text{E. 1})$$

但切应力为

$$\tau = -\mu \frac{dv}{dy} \quad (\text{E. 2})$$

其中，“—”号与速度减小的方向一致^[1.33]。将式(E.2)代入式(E.1)，有

$$F = -\pi D l dy \mu \frac{d^2 v}{dy^2} \quad (\text{E. 3})$$

作用在活塞上的力将引起活塞两端的压力差，为

$$p = \frac{P}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{4P}{\pi D^2} \quad (\text{E. 4})$$

因此，作用在活塞两端的压力为

$$p(\pi D dy) = \frac{4P}{D} dy \quad (\text{E. 5})$$

其中, $\pi D dy$ 为介于 y 和 $(y+dy)$ 之间的环形面积。如果假设平均速度在流体运动方向上是均匀分布的, 在式(E. 3)和式(E. 5)中给出的力必须相等, 这样就得到

$$\frac{4P}{D} dy = -\pi D l dy \mu \frac{d^2 v}{dy^2}$$

或

$$\frac{d^2 v}{dy^2} = -\frac{4P}{\pi D^2 l \mu} \quad (\text{E. 6})$$

对上式积分两次, 并且考虑边界条件 $v = -v_0|_{y=0}, v = 0|_{y=d}$, 得到

$$v = \frac{2P}{\pi D^2 l \mu} (yd - y^2) - v_0 \left(1 - \frac{y}{d}\right) \quad (\text{E. 7})$$

流过间隙的流体的流速 Q 可以通过对流过活塞的流体的流速积分得到, 积分上下限分别为 $y=0$ 和 $y=d$, 则

$$Q = \int_0^d v \pi D dy = \pi D \left[\frac{2Pd^3}{6\pi D^2 l \mu} - \frac{1}{2} v_0 d \right] \quad (\text{E. 8})$$

流体每秒流过间隙的体积必须等于每秒活塞排出的体积。这样活塞的速度 v_0 将等于这个流量除以活塞面积, 即

$$v_0 = \frac{Q}{\left(\frac{\pi}{4} D^2\right)} \quad (\text{E. 9})$$

由式(E. 9)和式(E. 8)可知

$$P = \left[\frac{3\pi D^3 l \left(1 + \frac{2d}{D}\right)}{4d^3} \right] \mu v_0 \quad (\text{E. 10})$$

令 $P = c v_0$, 这样阻尼常数 c 就为

$$c = \mu \left[\frac{3\pi D^3 l \left(1 + \frac{2d}{D}\right)}{4d^3} \right] \quad (\text{E. 11})$$

例 1.10 如图 1.27(a)所示, 一个精密铣床由 4 个防振支架支承, 每个支架的弹性和阻尼可以分别用一个弹簧和一个黏性阻尼器模拟, 如图 1.27(b)所示。找出用防振支架的弹簧常数 k_i 和阻尼常数 c_i 表示的机床支承系统的等效弹簧常数 k_{eq} 和等效阻尼常数 c_{eq} 。

解: 4 个弹簧和 4 个阻尼器的受力图如图 1.27(c)所示。假设质心 G 在 4 个弹簧和 4 个阻尼器的对称中心处。注意到所有的弹簧有相同的位移 x , 所有的阻尼器有相同的相对速度 \dot{x} , 其中 x 和 \dot{x} 分别表示质心 G 的位移和速度。作用在弹簧上的力 F_{si} 和作用在阻尼器上的力 F_{di} 可以表示成

$$\left. \begin{aligned} F_{si} &= k_i x, \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ F_{di} &= c_i \dot{x}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \right\} \quad (\text{E. 1})$$

令作用在弹簧和阻尼器上所有力的合力分别为 F_s 和 F_d (见图 1.27(d))。这样力平衡方程可以表示为

$$\left. \begin{aligned} F_s &= F_{s1} + F_{s2} + F_{s3} + F_{s4} \\ F_d &= F_{d1} + F_{d2} + F_{d3} + F_{d4} \end{aligned} \right\} \quad (\text{E. 2})$$

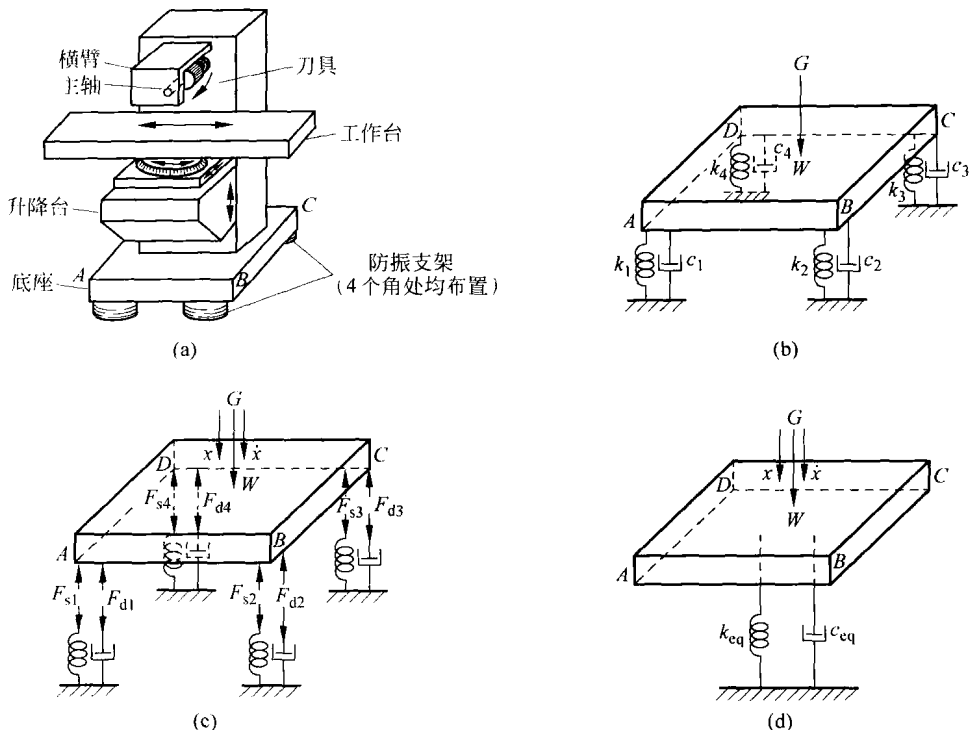


图 1.27 卧式铣床

其中, $F_s + F_d = W$, W 表示作用在铣床上的总的竖直力(包括惯性力)。从图 1.27(d)可知

$$\left. \begin{aligned} F_s &= k_{eq}x \\ F_d &= c_{eq}\dot{x} \end{aligned} \right\} \quad (\text{E. 3})$$

将式(E.1)和式(E.3)代入式(E.2),并注意 $k_i = k, c_i = c (i=1, 2, 3, 4)$, 则

$$\left. \begin{aligned} k_{eq} &= k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 4k \\ c_{eq} &= c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 4c \end{aligned} \right\} \quad (\text{E. 4})$$

注意: 如果质心 G 不是在 4 个弹簧和 4 个阻尼的对称中心处, 那么第 i 个弹簧产生一个为 x_i 的位移, 第 i 个阻尼器产生一个为 \dot{x}_i 的速度, 其中 x_i 和 \dot{x}_i 是与铣床质心的 x 和 \dot{x} 有关的量。这样一来, 式(E.1)和式(E.4)需要做适当的修改。

1.7 简谐运动

振动可以是有规律的重复自己的运动, 例如单摆的运动, 也可以是没有规律的运动, 例如地震时地面的运动。能够在相等的时间间隔后重复自己的运动, 称为周期运动。最简单的周期运动是简谐运动。如图 1.28 所示, 正弦机构传递给质量块 m 的运动, 是简谐运动的

一个例子。在这个系统中,半径为 A 的曲柄绕着 O 点转动,曲柄的另一端 P 在连杆槽中滑动,而连杆在竖直导轨 R 中作往复运动。当曲柄以角速度 ω 旋转时,连杆的末端 S 和弹簧-质量系统的质量块 m 将从中间位置偏移一个位移量 x (在时刻 t):

$$x = A \sin \theta = A \sin \omega t \quad (1.30)$$

这个运动由图 1.28 所示的正弦曲线来表示。质量块 m 在 t 时刻的速度为

$$\frac{dx}{dt} = \omega A \cos \omega t \quad (1.31)$$

加速度为

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \sin \omega t = -\omega^2 x \quad (1.32)$$

从中可以看出,加速度与位移成正比。这种加速度与位移成正比并指向中间位置的运动称为简谐运动。由 $x = A \cos \omega t$ 确定的运动是简谐运动的另一个例子。从图 1.28 中可以明显地看出简谐的周期运动与正弦运动的相似性。

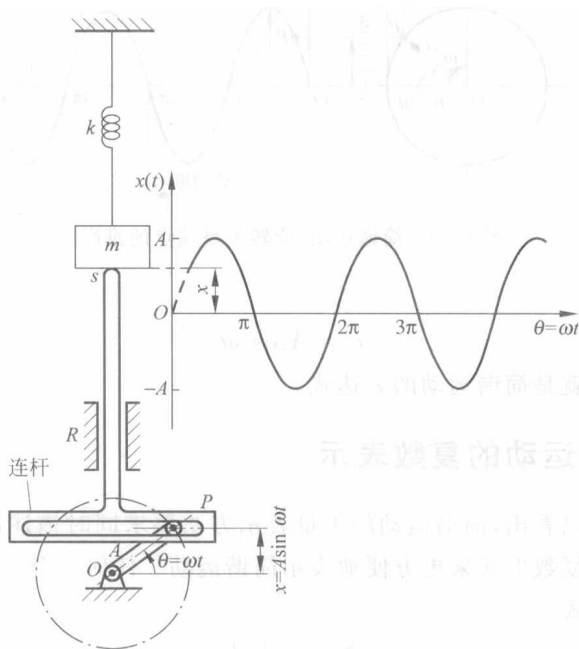


图 1.28 正弦机构

1.7.1 简谐运动的矢量表示

简谐运动可以方便地用长度为 A 且以固定的角速度 ω 旋转的向量 \overrightarrow{OP} 来表示。在图 1.29 中,向量 $\mathbf{x} = \overrightarrow{OP}$ 在竖直轴上的投影为

$$y = A \sin \omega t \quad (1.33)$$

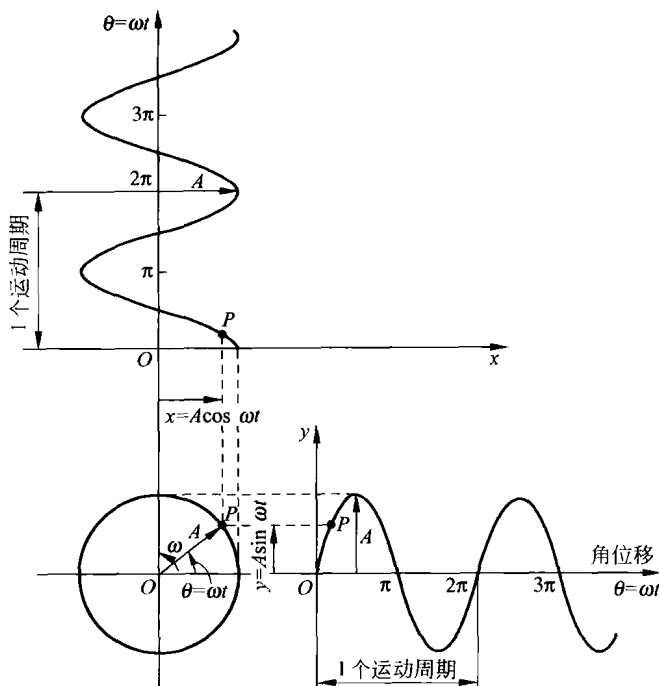


图 1.29 简谐运动-旋转矢量端点的投影

在水平轴的投影为

$$x = A \cos \omega t \quad (1.34)$$

式(1.33)和式(1.34)就是简谐运动的表达式。

1.7.2 简谐运动的复数表示

从上面的讨论可以看出,简谐运动的矢量表示方法要求同时描述出在水平轴和竖直轴的分量。现在可以用复数形式来更方便地表示简谐运动。任何一个 xy 平面上的矢量 \mathbf{X} 都可以表示成复数的形式:

$$\mathbf{X} = a + ib \quad (1.35)$$

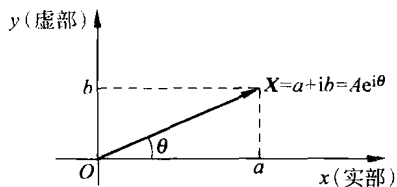


图 1.30 复数的表示方法

其中, $i = \sqrt{-1}$, 并且 a 和 b 分别表示 \mathbf{X} 沿 x 和 y 方向的分量(见图 1.30), 分量 a 和 b 也称为矢量 \mathbf{X} 的实部和虚部。如果用 A 表示矢量 \mathbf{X} 的模(绝对值), θ 表示该矢量和 x 轴的夹角, 那么矢量 \mathbf{X} 也可以表示成

$$\mathbf{X} = A \cos \theta + i A \sin \theta \quad (1.36)$$

其中

$$A = (a^2 + b^2)^{1/2} \quad (1.37)$$

$$\theta = \arctan \frac{b}{a} \quad (1.38)$$

注意: $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, \dots$, 所以 $\cos \theta$ 和 $\sin \theta$ 可以展成如下级数形式:

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots = 1 + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots \quad (1.39)$$

$$\sin \theta = i \left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \right] = i\theta + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \dots \quad (1.40)$$

由式(1.39)和式(1.40)有

$$\cos \theta + i \sin \theta = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \dots = e^{i\theta} \quad (1.41)$$

$$\cos \theta - i \sin \theta = 1 - i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} - \frac{(i\theta)^3}{3!} + \dots = e^{-i\theta} \quad (1.42)$$

那么方程(1.36)可以表示成

$$\mathbf{X} = A(\cos \theta + i \sin \theta) = Ae^{i\theta} \quad (1.43)$$

1.7.3 复数的代数运算

复数经常表示成不带矢量符号的形式,即

$$z = a + ib \quad (1.44)$$

其中, a 和 b 分别表示 z 的实部和虚部。那么,复数的加、减、乘、除运算可以按常规的代数方法进行。令

$$z_1 = a_1 + ib_1 = A_1 e^{i\theta_1} \quad (1.45)$$

$$z_2 = a_2 + ib_2 = A_2 e^{i\theta_2} \quad (1.46)$$

其中

$$A_j = \sqrt{a_j^2 + b_j^2}, \quad j = 1, 2 \quad (1.47)$$

$$\theta_j = \arctan \left(\frac{b_j}{a_j} \right), \quad j = 1, 2 \quad (1.48)$$

那么 z_1 和 z_2 的和与差为

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= A_1 e^{i\theta_1} + A_2 e^{i\theta_2} = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) \\ &= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \end{aligned} \quad (1.49)$$

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= A_1 e^{i\theta_1} - A_2 e^{i\theta_2} = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) \\ &= (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2) \end{aligned} \quad (1.50)$$

1.7.4 简谐函数的运算

如果用复数表示方法,图 1.29 中的旋转矢量 \mathbf{X} 可以写成

$$\mathbf{X} = Ae^{i\omega t} \quad (1.51)$$

其中, ω 表示矢量 \mathbf{X} 沿逆时针方向旋转的圆频率(单位: rad/s)。对式(1.51)中给出的简谐运动函数求关于时间的微分:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \frac{d}{dt}(Ae^{i\omega t}) = i\omega A e^{i\omega t} = i\omega \mathbf{X} \quad (1.52)$$

$$\frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2} = \frac{d}{dt}(i\omega A e^{i\omega t}) = -\omega^2 A e^{i\omega t} = -\omega^2 \mathbf{X} \quad (1.53)$$

这样,位移、速度、加速度可以表示为^①

$$\text{位移} = \text{Re}[Ae^{i\omega t}] = A\cos\omega t \quad (1.54)$$

$$\text{速度} = \text{Re}[i\omega A e^{i\omega t}] = -\omega A \sin\omega t = \omega A \cos(\omega t + 90^\circ) \quad (1.55)$$

$$\text{加速度} = \text{Re}[-\omega^2 A e^{i\omega t}] = -\omega^2 A \cos\omega t = \omega^2 A \cos(\omega t + 180^\circ) \quad (1.56)$$

其中, Re 表示实部。这些量就是在图 1.31 中表示出的旋转矢量。从中可以看出,加速度矢量超前速度矢量 90° , 而速度矢量又超前位移矢量 90° 。

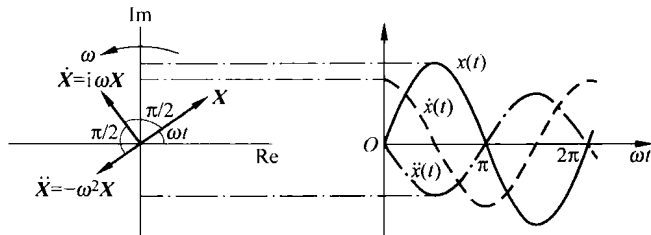


图 1.31 用旋转矢量表示位移、速度和加速度

简谐函数相加也可以借助于矢量运算完成,如图 1.32 所示。若 $\text{Re}(\mathbf{X}_1) = A_1 \cos \omega t$, $\text{Re}(\mathbf{X}_2) = A_2 \cos(\omega t + \theta)$, 那么合矢量的模为

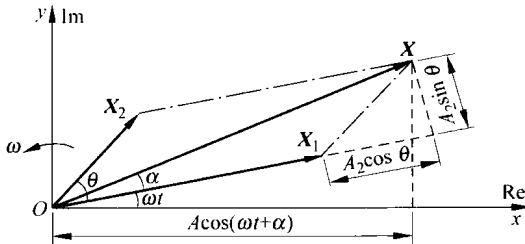


图 1.32 用矢量加法求简谐运动的合成

① 如果简谐位移的原始形式为 $x(t) = A \sin \omega t$, 那么有

$$\text{位移} = \text{Im}[Ae^{i\omega t}] = A \sin \omega t$$

$$\text{速度} = \text{Im}[i\omega A e^{i\omega t}] = \omega A \sin(\omega t + 90^\circ)$$

$$\text{加速度} = \text{Im}[-\omega^2 A e^{i\omega t}] = \omega^2 A \sin(\omega t + 180^\circ)$$

式中, Im 代表复数的虚部。

$$A = \sqrt{(A_1 + A_2 \cos \theta)^2 + (A_2 \sin \theta)^2} \quad (1.57)$$

角度 α 为

$$\alpha = \arctan \left(\frac{A_2 \sin \theta}{A_1 + A_2 \cos \theta} \right) \quad (1.58)$$

由于原来的函数都是用复数的实部表示的,所以合矢量 $\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2$ 可以表示为 $\text{Re}(\mathbf{X}) = A \cos(\omega t + \alpha)$ 。

例 1.11 求两个简谐运动 $x_1(t) = 10 \cos \omega t$ 与 $x_2(t) = 15 \cos(\omega t + 2)$ 的和。

解: 方法 1 利用三角函数关系

因为 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的圆频率一样,所以合成运动的形式为

$$x(t) = A \cos(\omega t + \alpha) = x_1(t) + x_2(t) \quad (\text{E. } 1)$$

由于

$$\begin{aligned} A(\cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha) &= 10 \cos \omega t + 15 \cos(\omega t + 2) \\ &= 10 \cos \omega t + 15(\cos \omega t \cos 2 - \sin \omega t \sin 2) \end{aligned} \quad (\text{E. } 2)$$

所以

$$\cos \omega t (A \cos \alpha) - \sin \omega t (A \sin \alpha) = \cos \omega t (10 + 15 \cos 2) - \sin \omega t (15 \sin 2) \quad (\text{E. } 3)$$

令方程两边 $\cos \omega t$ 和 $\sin \omega t$ 的系数相等,得

$$A \cos \alpha = 10 + 15 \cos 2$$

$$A \sin \alpha = 15 \sin 2$$

$$A = \sqrt{(10 + 15 \cos 2)^2 + (15 \sin 2)^2} = 14.1477 \quad (\text{E. } 4)$$

$$\alpha = \arctan \left(\frac{15 \sin 2}{10 + 15 \cos 2} \right) = 74.5963^\circ \quad (\text{E. } 5)$$

方法 2 利用矢量运算方法

对于任意一个 ωt , $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 可以用图 1.33 中所示的矢量来表示。根据矢量加法的几何表示可求得合矢量为

$$x(t) = 14.1477 \cos(\omega t + 74.5963^\circ) \quad (\text{E. } 6)$$

方法 3 用复数方法

这两个简谐运动可以用复数的形式表示为

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= \text{Re}[A_1 e^{i\omega t}] \equiv \text{Re}[10 e^{i\omega t}] \\ x_2(t) &= \text{Re}[A_2 e^{i(\omega t + 2)}] \equiv \text{Re}[15 e^{i(\omega t + 2)}] \end{aligned} \right\} \quad (\text{E. } 7)$$

这样, $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的和可以表达为

$$x(t) = \text{Re}[A e^{i(\omega t + \alpha)}] \quad (\text{E. } 8)$$

其中, A 和 α 可以用式(1.47)和式(1.48)确定:

$$A = 14.1477$$

$$\alpha = 74.5963^\circ$$

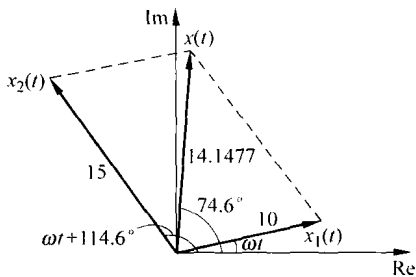


图 1.33 简谐运动的合成

1.7.5 定义和术语

1. 振动循环

振动体从平衡位置(即未受到干扰时所处的位置)向一个方向运动到极限位置后回到平衡位置,再运动到另一个方向的极限位置,然后再回到平衡位置,这称为一个**振动循环**。在图 1.28 中,销钉 P 旋转 1 周(角位移为 2π rad)或图 1.29 中的矢量 \overrightarrow{OP} 旋转 1 周都构成一个循环。

2. 振幅

振动体距平衡位置的最大位移称为振动的**振幅**。图 1.28 和图 1.29 中,振幅均为 A 。

3. 振动周期

完成一个运动循环的时间称为**振动周期**,用 τ 表示。它等于图 1.29 中的矢量 \overrightarrow{OP} 旋转 2π 角度所需要的时间,故

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1.59)$$

其中, ω 称为圆频率。

4. 振动频率

单位时间内完成的运动循环数叫做**振动频率**,或简称为**频率**,用 f 表示。所以

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (1.60)$$

这里, ω 称为圆频率以区别线频率 $f = \omega/2\pi$ 。 ω 表示周期运动的角速度,其单位为 rad/s, f 的单位为周期数/s,即 Hz。

5. 相角

考虑两个振动

$$x_1 = A_1 \sin \omega t \quad (1.61)$$

$$x_2 = A_2 \sin(\omega t + \phi) \quad (1.62)$$

式(1.61)和式(1.62)给出的这两个简谐运动叫做**同步运动**,因为它们具有相同的圆频率或角速度。两个同步振动不需要有相同的振幅,并且不用在相同的时刻达到它们的极值。式(1.61)和式(1.62)表示的运动可以用图 1.34 中的矢量表示。在这个图中,矢量 $\overrightarrow{OP_2}$ 超前矢量 $\overrightarrow{OP_1}$ 一个角度 ϕ ,这个角度称为**相角**。这意味着第二个矢量将比第一个矢量提前 ϕ 达到

最大值。注意：不只是在最大值点，在任何其他点也都可以找到相角。在式(1.61)和式(1.62)中或在图 1.34 中，这两个矢量有一个相位差 ϕ 。

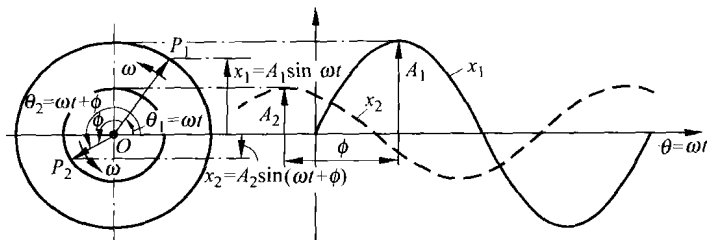


图 1.34 两个矢量的相角差

6. 固有频率

如果一个系统受最初的扰动后，不再受外界激励而振动，此时的振动频率称为固有频率。正如稍后要看到的，通常一个 n 自由度的振动系统有 n 个不同的固有振动频率。

7. 拍振

当两个频率相近的简谐振动合成时，合成后的振动称为拍。例如，如果两个振动为

$$x_1(t) = X \cos \omega t \quad (1.63)$$

$$x_2(t) = X \cos(\omega + \delta)t \quad (1.64)$$

其中， δ 是一个小量。则这两个运动的合成

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = X[\cos \omega t + \cos(\omega + \delta)t] \quad (1.65)$$

由三角关系

$$\cos A + \cos B = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \quad (1.66)$$

式(1.65)可以写成

$$x(t) = 2X \cos \frac{\delta t}{2} \cos\left(\omega + \frac{\delta}{2}\right)t \quad (1.67)$$

这个方程的图形如图 1.35 所示。从该图中可以看出，合成的振动 $x(t)$ 描述了一个频率为 $\omega + \delta/2$ (近似等于 ω) 的余弦波，但振幅随时间按 $2X \cos \delta t/2$ 变化。当振幅达到一最大值时

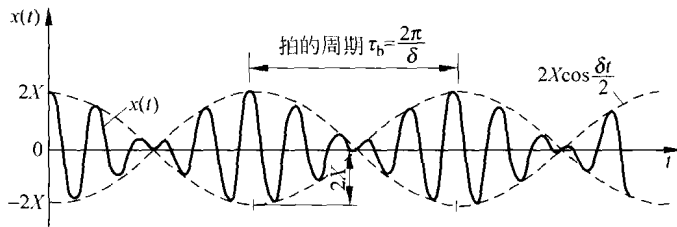


图 1.35 拍振

称为拍。振幅在 0 和 $2X$ 之间增强和减弱时的频率 δ 称为拍频。在机械系统、结构系统和电厂中经常可以观察到拍振现象。例如,在机械或结构系统中,当激振力频率和系统固有频率接近时就会出现拍的现象(见 3.3.2 节)。

8. 倍频

当某一个频率范围的最大值是最小值的 2 倍时,称为倍频带。例如 75~150 Hz, 150~300 Hz, 300~600 Hz 的频率范围都是倍频带。若每个频率范围的最大值和最小值的比例为 2:1,就说它们相差 1 个倍频。

9. 分贝

在振动和噪声领域,许多量(如位移、速度、加速度、压力、功率等)往往用分贝(dB)表示。dB 的最初定义是电功率的比 P/P_0 ,即

$$1 \text{ dB} = 10 \lg \left(\frac{P}{P_0} \right) \quad (1.68)$$

其中, P_0 是电功率的某个参考值。既然电功率与电压的平方成正比, dB 也可以表达为

$$1 \text{ dB} = 10 \lg \left(\frac{X}{X_0} \right)^2 = 20 \lg \left(\frac{X}{X_0} \right) \quad (1.69)$$

其中, X_0 是特定的电压参考值。在实际应用中,式(1.69)也常用来表达其他量,如位移、速度、加速度、压力的比值。例如,压力的参考值 X_0 常取 $2 \times 10^{-5} \text{ N/m}^2$,加速度的参考值常取 $1 \mu g = 9.81 \times 10^{-6} \text{ m/s}^2$ 。

1.8 谐波分析^①

虽然简谐运动处理起来最简单,但是很多振动系统的运动却不是简谐的。然而,很多情况下的振动是周期的,就像图 1.36(a)所示的情况。所幸的是,任何关于时间的周期函数都能用傅里叶级数,即无限多个正弦函数和余弦函数的和表示。

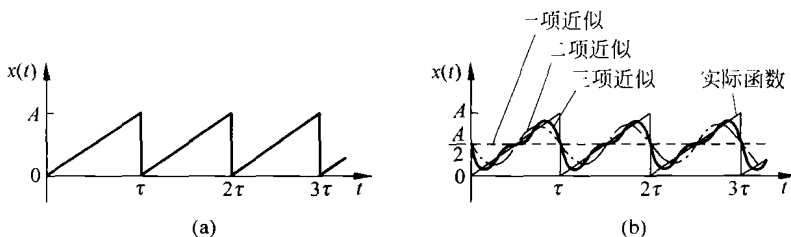


图 1.36 周期函数

^① 谐波分析是 4.2 节的基础。

1.8.1 傅里叶级数展开

如果 $x(t)$ 的周期是 τ , 则它的傅里叶级数展开如下:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \cdots + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \cdots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \end{aligned} \quad (1.70)$$

其中, $\omega = 2\pi/\tau$ 是基波频率; $a_0, a_1, a_2, \cdots, b_1, b_2, \cdots$ 是常系数。 a_n, b_n 是通过对方程(1.70)两边分别乘以 $\cos n\omega t$ 和 $\sin n\omega t$, 并在一个周期 $\tau = 2\pi/\omega$ 内求积分得到的, 例如, 从 0 到 $2\pi/\omega$ 积分。注意到方程右边积分后只有一项不为零, 从而得到

$$a_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} x(t) dt = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} x(t) dt \quad (1.71)$$

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} x(t) \cos n\omega t dt = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} x(t) \cos n\omega t dt \quad (1.72)$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} x(t) \sin n\omega t dt = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} x(t) \sin n\omega t dt \quad (1.73)$$

方程(1.70)的物理含义是所有的周期函数都能用简谐函数的和来表示。虽然方程(1.70)是无穷级数, 但却可以用有限个简谐函数近似出大多数的周期函数。例如, 如图 1.36(a) 所示的三角波就可以用 3 个简谐函数得到很好的近似, 如图 1.36(b) 所示。

傅里叶级数也能仅用正弦或余弦项表示。例如, 仅用余弦项的级数可以表示如下:

$$x(t) = d_0 + d_1 \cos(\omega t - \phi_1) + d_2 \cos(2\omega t - \phi_2) + \cdots \quad (1.74)$$

其中

$$d_0 = a_0/2 \quad (1.75)$$

$$d_n = (a_n^2 + b_n^2)^{1/2} \quad (1.76)$$

$$\phi_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \quad (1.77)$$

当一个周期函数展开为傅里叶级数的时候, 可能出现一个异常现象。图 1.37 显示的是一个三角波和用不同项数的傅里叶级数近似的情况。当项数增加时, 除尖点附近外, 在整体上的近似程度越来越好。即在整体上与真实波形的偏离度变小, 却在振幅的接近程度方面没有太多改善。已被验证, 即使 k 趋于无限大, 振幅仍大约相差 9%。这个现象后来被称为吉伯斯(Gibbs)现象。

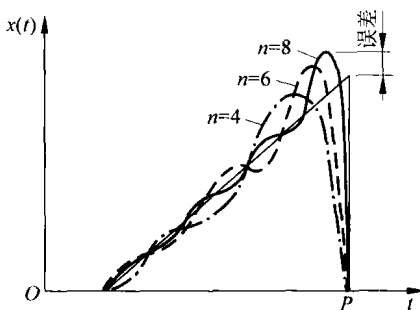


图 1.37 吉伯斯现象

1.8.2 傅里叶级数的复数形式

傅里叶级数也可以表示成复数形式。从式(1.41)和式(1.42)可得

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t \quad (1.78)$$

$$e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t \quad (1.79)$$

从而 $\cos \omega t$ 和 $\sin \omega t$ 可以表示为

$$\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \quad (1.80)$$

$$\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \quad (1.81)$$

这样方程(1.70)可写成如下形式:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \left(\frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}}{2i} \right) \right\} \\ &= e^{i(0)\omega t} \left(\frac{a_0}{2} - \frac{ib_0}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{in\omega t} \left(\frac{a_n}{2} - \frac{ib_n}{2} \right) + e^{-in\omega t} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{ib_n}{2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (1.82)$$

其中, $b_0=0$ 。通过定义傅里叶系数 c_n 和 c_{-n}

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad (1.83)$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \quad (1.84)$$

方程(1.82)可以表示为

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \quad (1.85)$$

傅里叶系数 c_n 可以用式(1.71)~式(1.73)确定:

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} x(t) [\cos n\omega t - i \sin n\omega t] dt = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} x(t) e^{-in\omega t} dt \quad (1.86)$$

1.8.3 频谱

方程(1.70)中的谐波函数 $a_n \cos n\omega t$ 和 $b_n \sin n\omega t$ 称为周期函数 $x(t)$ 的 n 阶谐波。 n 阶谐波函数的周期是 τ/n 。为清晰地表达一个周期函数中所含各阶谐波函数的频率、振幅及相角的关系,可以 $n\omega$ ($n=1, 2, \dots$) 为横坐标,以 a_n, b_n 或者 d_n, ϕ_n 为纵坐标绘出如图 1.38 所

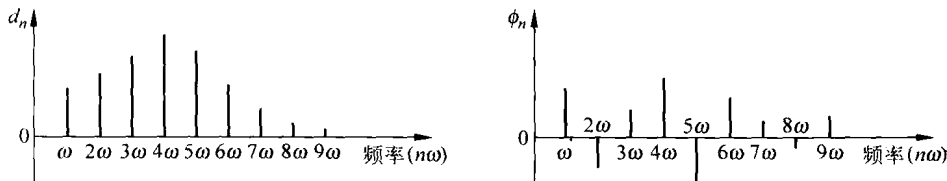


图 1.38 周期函数的频谱

示的频谱图,简称频谱。

1.8.4 时域表示法与频域表示法

傅里叶级数展开使得任意一个周期函数既可以用时域描述,也可以用频域描述。例如,如图 1.39(a)所示的时域内的简谐函数 $x(t) = A \sin \omega t$,可以用频域内的振幅和频率描述(见图 1.39(b))。与此类似,一个如图 1.39(c)所示的时域内的锯齿波函数,也能用如图 1.39(d)所示的频域方法表示。注意:在频域表示中一般用振幅 d_n 和相应的相角 ϕ_n 代替 a_n 和 b_n 。利用傅里叶积分(在 12.9 节讨论)甚至可以将时域内的非周期函数用频域表示。图 1.39 所示的频域表示法显然不能提供关于初始条件的信息。然而,在大多数的实际应用中初始条件都不必考虑,稳态响应才是主要的研究兴趣。

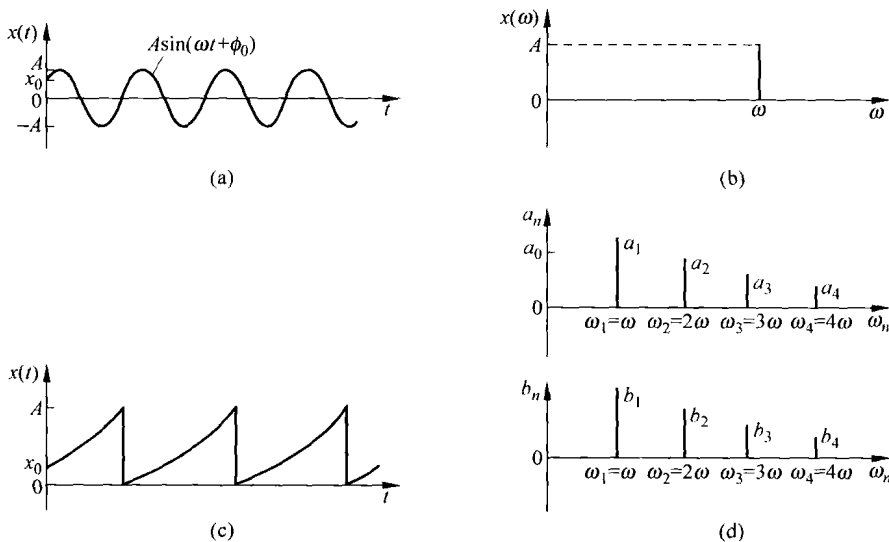


图 1.39 函数的时域与频域表示

1.8.5 奇函数和偶函数

偶函数满足如下关系:

$$x(-t) = x(t) \quad (1.87)$$

此时,傅里叶展开中只含有余弦项,即

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t \quad (1.88)$$

其中, a_0 和 a_n 分别由式(1.71)和式(1.72)确定。奇函数满足如下关系:

$$x(-t) = -x(t) \quad (1.89)$$

此时,其傅里叶展开中只含有正弦项,即

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t \quad (1.90)$$

其中, b_n 由式(1.73)确定。

在有些情况下,根据坐标轴位置的不同,一个给定的函数既可以看成是奇函数,也可以看成是偶函数。例如,将图 1.40(a)中的纵坐标轴从(i)处分别移动到(ii)和(iii)处,将分别使原来的函数变为奇函数和偶函数。这就意味着只需要计算系数 b_n 或 a_n 。同理,把时间轴从(iv)处移动到(v)处,相当于在响应中增加了一个常数。在图 1.40(b)中,函数为奇函数,傅里叶级数展开式为(见习题 1.65)

$$x_1(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{2\pi(2n-1)t}{\tau} \quad (1.91)$$

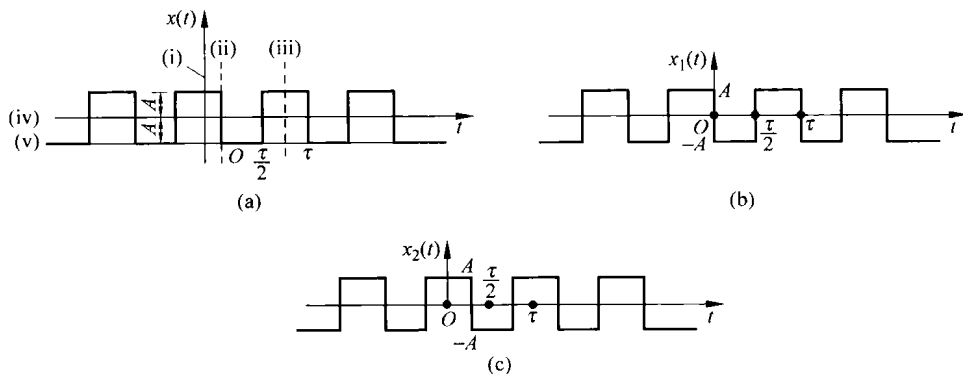


图 1.40 偶函数与奇函数

(a) 原函数; (b) 奇函数; (c) 偶函数

另一方面,如果函数为偶函数,如图 1.40(c)所示,它的傅里叶级数展开式为(见习题 1.65)

$$x_2(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \cos \frac{2\pi(2n-1)t}{\tau} \quad (1.92)$$

既然函数 $x_1(t)$ 和函数 $x_2(t)$ 表示的是同一个波,只不过坐标原点不同,所以这两个傅里叶级数展开式之间也存在着一定的关系。注意:

$$x_1\left(t + \frac{\tau}{4}\right) = x_2(t) \quad (1.93)$$

从方程(1.91)得

$$\begin{aligned} x_1\left(t + \frac{\tau}{4}\right) &= \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{2\pi(2n-1)}{\tau} \left(t + \frac{\tau}{4}\right) \\ &= \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \left\{ \frac{2\pi(2n-1)t}{\tau} + \frac{2\pi(2n-1)}{4} \right\} \end{aligned} \quad (1.94)$$

利用关系 $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$, 方程(1.94)可以表示为

$$x_1\left(t + \frac{\tau}{4}\right) = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2n-1} \sin \frac{2\pi(2n-1)t}{\tau} \cos \frac{2\pi(2n-1)}{4} + \cos \frac{2\pi(2n-1)t}{\tau} \sin \frac{2\pi(2n-1)}{4} \right\} \quad (1.95)$$

因为

$$\begin{aligned} \cos[2\pi(2n-1)/4] &= 0, \quad n = 1, 2, \dots \\ \sin[2\pi(2n-1)/4] &= (-1)^{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

所以方程(1.95)能够化简为和式(1.92)一样的方程:

$$x_1\left(t + \frac{\tau}{4}\right) = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \cos \frac{2\pi(2n-1)t}{\tau} \quad (1.96)$$

1.8.6 半区间展开

如图 1.41(a)所示, 在一些实际应用中, 函数 $x(t)$ 被定义在 0 到 τ 区间内。在这种情况下, 因为函数本身在 0 到 τ 区间外没有定义, 也就没有了形成周期的条件。然而, 可以任意地像图 1.41(b)或 1.41(c)那样对函数的定义域进行扩展使其包括 $-\tau$ 到 0 的区间。图 1.41(b)表示这种扩展形成了奇函数 $x_1(t)$, 图 1.41(c)表示这种扩展形成了偶函数 $x_2(t)$ 。从而 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的傅里叶展开式分别只包括正弦项或余弦项。 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 等函数的傅里叶级数展开称为半区间展开。任意的半区间展开式都能被用来观察在 0 到 τ 区间内的 $x(t)$ 。

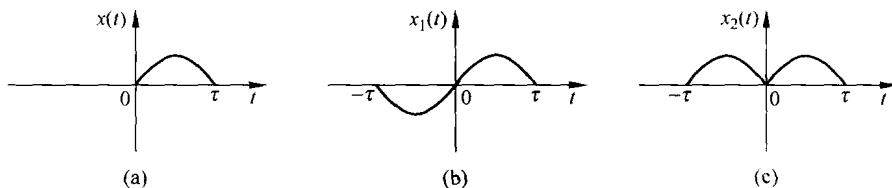
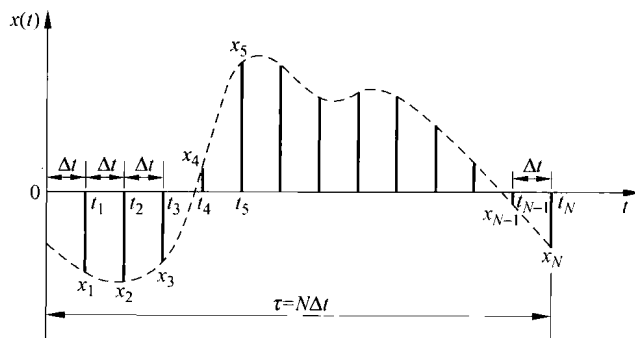


图 1.41 半区间函数的扩展

(a) 原函数; (b) 偶函数的扩展; (c) 奇函数的扩展

1.8.7 系数的数字计算

对于简单形式的函数 $x(t)$ 来说, 式(1.71)~式(1.73)的积分都能被很容易地算出。但如果函数 $x(t)$ 的形式复杂, 积分就会很难。在一些实际应用中, 如在实验中用振动传感器测量振动的幅度, 并没有函数 $x(t)$ 的数学表达式, 仅得到在 t_1, t_2, \dots, t_N 等一些点处的函数值(见图 1.42), 在这种情况下, 式(1.71)~式(1.73)中的系数 a_n, b_n 可以用数值积分方法(如梯形法则或辛普森法则)求得。

图 1.42 周期函数在离散点 t_1, t_2, \dots, t_N 处的值

假设 t_1, t_2, \dots, t_N 是周期 τ 的偶数个等分点, 对应的 $x(t)$ 的值分别为 $x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x(t_2), \dots, x_N = x(t_N)$, 应用梯形法则得出的系数 a_n 和 b_n 为 (设 $\tau = N\Delta t$)^①

$$a_0 = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (1.97)$$

$$a_n = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N x_i \cos \frac{2n\pi t_i}{\tau} \quad (1.98)$$

$$b_n = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N x_i \sin \frac{2n\pi t_i}{\tau} \quad (1.99)$$

例 1.12 计算如图 1.43 所示的凸轮-从动杆系统中阀门杆运动的傅里叶级数展开。

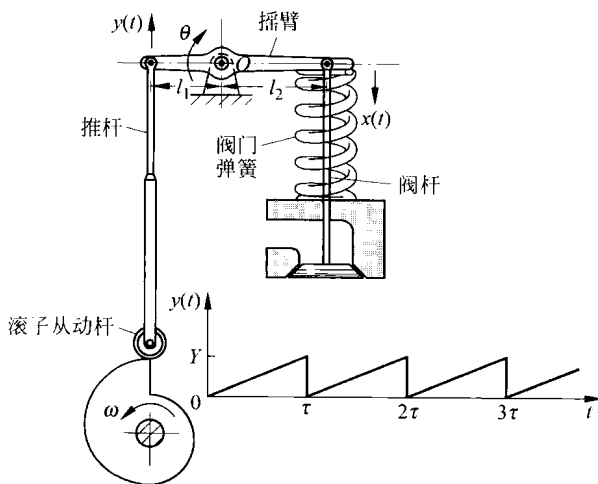


图 1.43 凸轮-从动杆系统

① 辛普森法则要求 N 为偶数, 但梯形法则无此要求。式 (1.97)~式 (1.99) 假设周期条件 $x_0 = x_N$ 成立。

解：如果用 $y(t)$ 表示推杆的垂直运动，则阀杆的运动 $x(t)$ 能通过下面的关系求得：

$$\tan \theta = \frac{y(t)}{l_1} = \frac{x(t)}{l_2}$$

即

$$x(t) = \frac{l_2}{l_1} y(t) \quad (\text{E. 1})$$

其中

$$y(t) = Y \frac{t}{\tau}, \quad 0 \leq t \leq \tau \quad (\text{E. 2})$$

式中，周期 $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ 。

令 $A = Yl_2/l_1$ ， $x(t)$ 可以写作

$$x(t) = A \frac{t}{\tau}, \quad 0 \leq t \leq \tau \quad (\text{E. 3})$$

式(E. 3)如图 1.36(a)所示。用式(1.71)~式(1.73)计算傅里叶系数 a_n, b_n ：

$$a_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} x(t) dt = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} A \frac{t}{\tau} dt = \frac{\omega}{\pi} \frac{A}{\tau} \left(\frac{t^2}{2} \right)_0^{2\pi/\omega} = A \quad (\text{E. 4})$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} x(t) \cos n\omega t dt = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} A \frac{t}{\tau} \cos n\omega t dt \\ &= \frac{A\omega}{\pi\tau} \int_0^{2\pi/\omega} t \cos n\omega t dt = \frac{A}{2\pi^2} \left[\frac{\cos n\omega t}{n^2} + \frac{\omega t \sin n\omega t}{n} \right]_0^{2\pi/\omega} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (\text{E. 5})$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} x(t) \sin n\omega t dt = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} A \frac{t}{\tau} \sin n\omega t dt \\ &= \frac{A\omega}{\pi\tau} \int_0^{2\pi/\omega} t \sin n\omega t dt = \frac{A}{2\pi^2} \left[\frac{\sin n\omega t}{n^2} - \frac{\omega t \cos n\omega t}{n} \right]_0^{2\pi/\omega} \\ &= -\frac{A}{n\pi}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (\text{E. 6})$$

因此 $x(t)$ 的傅里叶展开式为

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \sin \omega t - \frac{A}{2\pi} \sin 2\omega t - \dots \\ &= \frac{A}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \left(\sin \omega t + \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \dots \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{E. 7})$$

取级数前 3 项近似的情况已在图 1.36(b)中绘出。可以看出，只需取不多的项就能近似达到锯齿状。

例 1.13 对管道中水流压力的波动，每隔 0.01 s 测量一次，数据如表 1.1 所示。这种波动在自然界中具有可重复性。对水流压力作谐波分析，并计算傅里叶展开式的前 3 阶谐波分量。

表 1.1

测量点 i	时间 t_i/s	压力 $p_i/(N/m^2)$	测量点 i	时间 t_i/s	压力 $p_i/(N/m^2)$
0	0	0	7	0.07	60 000
1	0.01	20 000	8	0.08	36 000
2	0.02	34 000	9	0.09	22 000
3	0.03	42 000	10	0.10	16 000
4	0.04	49 000	11	0.11	7000
5	0.05	53 000	12	0.12	0
6	0.06	70 000			

解：因为流体压力每 0.12 s 重复一次，所以周期 $\tau=0.12\text{ s}$ ，一阶谐波的圆频率为 $\omega=2\pi/0.12=52.36(\text{rad/s})$ 。因为每个周期内有 12 个观测值，从而由方程(1.97)得

$$a_0 = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N p_i = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{12} p_i = 68\,166.7 \tag{E.1}$$

系数 a_n, b_n 根据式(1.98)和式(1.99)确定：

$$a_n = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N p_i \cos \frac{2n\pi t_i}{\tau} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{12} p_i \cos \frac{2n\pi t_i}{0.12} \tag{E.2}$$

$$b_n = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N p_i \sin \frac{2n\pi t_i}{\tau} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{12} p_i \sin \frac{2n\pi t_i}{0.12} \tag{E.3}$$

式(E.2)和式(E.3)的相关计算结果列于表 1.2。通过计算，流体压力 $p(t)$ (单位： N/m^2)的傅里叶展开式为

$$\begin{aligned} p(t) = & 34\,083.3 - 26\,996.0\cos 52.36t + 8307.7\sin 52.36t \\ & + 1416.7\cos 104.72t + 3608.3\sin 104.72t \\ & - 5833.3\cos 157.08t - 2333.3\sin 157.08t + \cdots \end{aligned} \tag{E.4}$$

表 1.2

i	t_i	p_i	$n=1$		$n=2$		$n=3$	
			$p_i \cos \frac{2\pi t_i}{0.12}$	$p_i \sin \frac{2\pi t_i}{0.12}$	$p_i \cos \frac{4\pi t_i}{0.12}$	$p_i \sin \frac{4\pi t_i}{0.12}$	$p_i \cos \frac{6\pi t_i}{0.12}$	$p_i \sin \frac{6\pi t_i}{0.12}$
1	0.01	20 000	17 320	10 000	10 000	17 320	0	20 000
2	0.02	34 000	17 000	29 444	-17 000	29 444	-34 000	0
3	0.03	42 000	0	42 000	-42 000	0	0	-42 000
4	0.04	49 000	-24 500	42 434	-24 500	-42 434	49 000	0
5	0.05	53 000	-45 898	26 500	26 500	-45 898	0	53 000
6	0.06	70 000	-70 000	0	70 000	0	-70 000	0
7	0.07	60 000	-51 960	-30 000	30 000	51 960	0	-60 000
8	0.08	36 000	-18 000	-31 176	-18 000	31 176	36 000	0
9	0.09	22 000	0	-22 000	-22 000	0	0	22 000

续表

i	t_i	p_i	$n=1$		$n=2$		$n=3$	
			$p_i \cos \frac{2\pi t_i}{0.12}$	$p_i \sin \frac{2\pi t_i}{0.12}$	$p_i \cos \frac{4\pi t_i}{0.12}$	$p_i \sin \frac{4\pi t_i}{0.12}$	$p_i \cos \frac{6\pi t_i}{0.12}$	$p_i \sin \frac{6\pi t_i}{0.12}$
10	0.10	16 000	8000	-13 856	-8000	-13 856	-16 000	0
11	0.11	7000	6062	-3500	3500	-6062	0	-7000
12	0.12	0	0	0	0	0	0	0
$\sum_{i=1}^{12} ()$		409 000	-161 976	49 846	8500	21 650	-35 000	-14 000
$\frac{1}{6} \sum_{i=1}^{12} ()$		68 166.7	-26 996.0	8307.7	1416.7	3608.3	-5833.3	-2333.3

1.9 利用 MATLAB 求解的例子^①

例 1.14 利用 MATLAB 绘出下列函数：

$$x(t) = A \frac{t}{\tau}, \quad 0 \leq t \leq \tau \quad (\text{E. 1})$$

以及它的傅里叶级数展开

$$\bar{x}(t) = \frac{A}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - \left(\sin \omega t + \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t \right) \right\} \quad (\text{E. 2})$$

的图形。其中, $0 \leq t \leq \tau, A=1, \omega=\pi, \tau=\frac{2\pi}{\omega}=2$ 。

解：下面的 MATLAB 程序用来绘出不同项数的方程(E. 1)和方程(E. 2)的图形：

```
%ex1_14.m
%plot the function x(t)=A * t/tau
A=1;
w=pi;
tau=2;
for i=1:101
    t(i)=tau * (i-1)/100;
    x(i)=A * t(i)/tau;
end
subplot(231);
plot(t,x);
```

^① 所有 MATLAB 程序的源代码都已放在本书的网站上。


```

ylabel('x(t)');
xlabel('t');
title('x(t)=A * t/tau');
for i=1:101
    x1(i)=A/2;
end
subplot(232);
plot(t,x1);
xlabel('t');
title('One term');
for i=1:101
    x2(i)=A/2-A * sin(w * t(i))/pi;
end
subplot(233);
plot(t,x2);
xlabel('t');
title('Two terms');
for i=1:101
    x3(i)=A/2-A * sin(w * t(i))/pi-A * sin(2 * w * t(i))/(2 * pi);
end
subplot(234);
plot(t,x3);
ylabel('x(t)');
xlabel('t');
title('Three terms');
for i=1:101
    t(i)=tau * (i-1)/100;
    x4(i)=A/2-A * sin(w * t(i))/pi-A * sin(2 * w * t(i))/(2 * pi)
        -A * sin(3 * w * t(i))/(3 * pi);
end
subplot(235);
plot(t,x4);
xlabel('t');
title('Four terms');

```

所绘出的图形如图 1.44 所示。

例 1.15 拍振的图形表示。

一个质量块的运动包含两个谐波成分 $x_1(t) = X \cos \omega t$ 和 $x_2(t) = X \cos(\omega + \delta)t$, 其中 $X = 1 \text{ cm}$, $\omega = 20 \text{ rad/s}$, $\delta = 1 \text{ rad/s}$ 。用 MATLAB 画出这个质量块的合成运动并确定拍频。

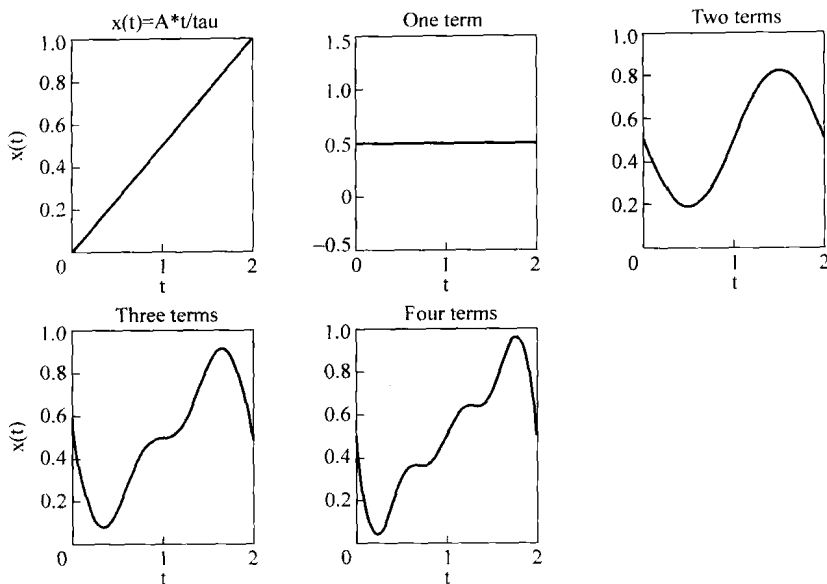


图 1.44 例 1.14 图

解：质量块的合成运动为

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) = X \cos \omega t + X \cos(\omega + \delta)t \\ &= 2X \cos \frac{\delta}{2} \cos\left(\omega + \frac{\delta}{2}\right)t \end{aligned} \quad (\text{E. 1})$$

不难看出,质量块的运动存在拍振现象,拍频为 $\omega_b = (\omega + \delta) - (\omega) = \delta = 1 \text{ rad/s}$ 。方程(E. 1)可用下面的 MATLAB 程序绘出其图形:

```
%ex1_15.m
%Plot the Phenomenon of beats
A=1;
w=20;
delta=1;
for i=1:1001
    t(i)=15 * (i-1)/1000;
    x(i)=2 * A * cos(delta * t(i)/2) * cos((w+delta/2) * t(i));
end
plot(t,x);
xlabel('t');
ylabel('x(t)');
title('Phenomenon of beats');
```

所绘出的图形如图 1.45 所示。

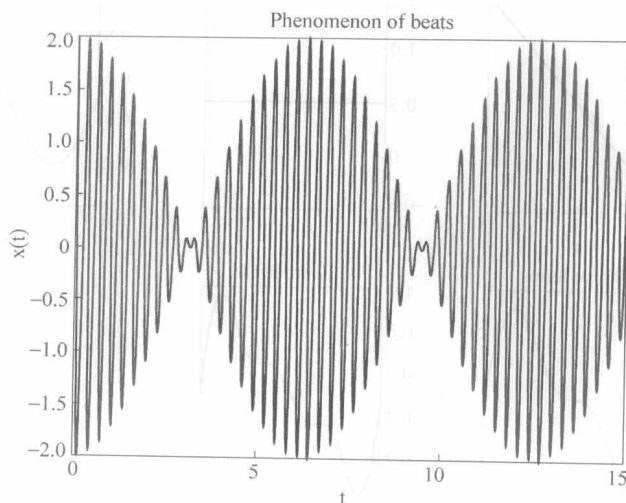


图 1.45 例 1.15 图

例 1.16 应用 MATLAB, 对表 1.1 中流体压力进行傅里叶分析, 并计算傅里叶级数展开式的前 5 项。

解: 为了求得流体压力的前 5 阶谐波(如 $a_0, a_1, \dots, a_5, b_1, b_2, \dots, b_5$), 开发了一个应用式(1.97)~式(1.99)对函数 $x(t)$ 进行谐波分析的通用 MATLAB 程序 Program1.m, 它需要如下输入数据:

n ——在已知的 $x(t)$ 中等距采样点的数量

m ——需要计算的傅里叶系数数量

time——函数 $x(t)$ 的时间周期

x —— n 维数组, 包含数值 $x(t), x(i) = x(t_i)$

t —— n 维数组, 包含数值 $t, t(i) = t_i$

下面是程序的输出:

azero——方程(1.97)的 a_0

$i, a(i), b(i); i = 1, 2, \dots, m$

其中, $a(i)$ 和 $b(i)$ 分别表示方程(1.98)和方程(1.99)中 a_i, b_i 的计算值。

```
>>program1
```

```
Fourier series expansion of the function x(t)
```

```
Data:
```

```
Number of data points in one cycle=12
```

```
Number of Fourier Coefficients required=5
```

```

Time period=1.200000e-001
Station i      Time at station i: t(i)      x(i) at t(i)
1              1.000000e-002            2.000000e+004
2              2.000000e-002            3.400000e+004
3              3.000000e-002            4.200000e+004
4              4.000000e-002            4.900000e+004
5              5.000000e-002            5.300000e+004
6              6.000000e-002            7.000000e+004
7              7.000000e-002            6.000000e+004
8              8.000000e-002            3.600000e+004
9              9.000000e-002            2.200000e+004
10             1.000000e-001            1.600000e+004
11             1.100000e-001            7.000000e+003
12             1.200000e-001            0.000000e+000

```

Results of Fourier analysis:

```

azero=6.816667e+004

```

values of i	a(i)	b(i)
1	-2.699630e+004	8.307582e+003
2	1.416632e+003	3.608493e+003
3	-5.833248e+003	-2.333434e+003
4	-5.834026e+002	2.165061e+003
5	-2.170284e+003	-6.411708e+002

1.10 C++ 程序

一个名为 Program1.cpp^① 的交互式 C++ 程序,用来对函数 $x(t)$ 做傅里叶分析。程序的输入与输出参数与例 1.16 中的 MATLAB 程序类似,也在程序的注释行中作了说明。

例 1.17 解 $M=5$ 时的例 1.13。

解: 输入数据待程序执行后,显示器提示通过键盘录入。程序的输入输出如下:

```

Results of program1. cpp:
please input the data:
please input n:
12
please input m:

```

① 所有 C++ 程序的源代码都已放在本书的网站上。

```

5
please input time:
0.12
please input the value of x[i], i=0, ..., n-1:
20000.0
34000.0
42000.0
49000.0
53000.0
70000.0
60000.0
36000.0
22000.0
16000.0
7000.0
0.0
please input the value of t[i], i=0, ..., n-1:
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
0.06
0.07
0.08
0.09
0.10
0.11
0.12
FOURIER SERIES EXPANSION OF THE FUNCTION X(T)
DATA:
NUMBER OF DATA POINTS IN ONE CYCLE=12
NUMBER OF FOURIER COEFFICIENTS REQUIRED=5
TIME PERIOD=1.200000e-001
TIME AT VARIOUS STATIONS, T(I)=
    1.000000e-002    2.000000e-002    3.000000e-002    4.000000e-002
    5.000000e-002    6.000000e-002    7.000000e-002    8.000000e-002
    9.000000e-002    1.000000e-001    1.100000e-001    1.200000e-001
KNOWN VALUES OF X(I) AT T(I)=

```

2.000000e+004	3.400000e+004	4.200000e+004	4.900000e+004
5.300000e+004	7.000000e+004	6.000000e+004	3.600000e+004
2.200000e+004	1.600000e+004	7.000000e+003	0.000000e+000

RESULTS OF FOURIER ANALYSIS:

AZERO=6.816667e+004

VALUES OF I, A(I) AND B(I) ARE

1	-2.699630e+004	8.307582e+003
2	1.416632e+003	3.608493e+003
3	-5.833248e+003	-2.333434e+003
4	-5.834026e+002	2.165061e+003
5	-2.170284e+003	-6.411708e+002

1.11 Fortran 程序

用于对函数 $x(t)$ 进行傅里叶分析的 Fortran 子程序命名为 FORIER. F。其中的参数在主程序 FORIER. F 的注释行中说明,类似于例 1.16 的 MATLAB 程序。

例 1.18 应用 Fortran 程序对例 1.13 进行数值傅里叶分析(取 $M=5$)。

解: 调用子程序 FORIER. F 的主程序,命名为 PROGRAM1. F。程序的执行结果如下:

FOURIER SERIES EXPANSION OF THE FUNCTION X(T)

DATA:

NUMBER OF DATA POINTS IN ONE CYCLE=12

NUMBER OF FOURIER COEFFICIENTS REQUIRED=5

TIME PERIOD=0.12000000E+00

TIME AT VARIOUS STATIONS, T(I)=

0.99999998E-02	0.20000000E-01	0.29999999E-01	0.39999999E-01
0.50000001E-01	0.59999999E-01	0.70000000E-01	0.79999998E-01
0.90000004E-01	0.10000000E+00	0.11000000E+00	0.12000000E+00

KNOWN VALUES OF X(I) AT T(I)=

0.20000000E+05	0.34000000E+05	0.42000000E+05	0.49000000E+05
0.53000000E+05	0.70000000E+05	0.60000000E+05	0.36000000E+05
0.22000000E+05	0.16000000E+05	0.70000000E+04	0.00000000E+00

RESULTS OF FOURIER ANALYSIS:

AZERO=0.68166664E+05

VALUES OF I, A(I) AND B(I) ARE

1	-0.26996299E+05	0.83075869E+04
---	-----------------	----------------

2	0.14166348E+ 04	0.36084932E+ 04
3	- 0.58332480E+ 04	- 0.23334373E+ 04
4	- 0.58340521E+ 03	0.21650562E+ 04
5	- 0.21702822E+ 04	- 0.64117188E+ 03

1.12 振动方面的参考文献

振动方面的参考文献很多,而且不同的参考文献之间的差别也可能很大。在文献[1.39]中,列出了一些教科书和几十种与振动有关的定期出版的学术期刊。这主要是因为振动问题出现在许多学科领域中,例如材料科学、机械装备分析和空间飞行器设计。很多领域的研究人员都应该留意振动研究的动态和进展。

在出版与振动有关的科技论文的期刊中,影响最大的有:《美国机械工程师学会会刊-振动与声学期刊》(*ASME Journal of Vibration and Acoustics*);《美国机械工程师学会会刊-应用力学期刊》(*ASME Journal of Applied Mechanics*);《声与振动期刊》(*Journal of Sound and Vibration*);《美国航空航天学会期刊》(*AIAA Journal*);《美国土木工程师学会会刊-工程力学期刊》(*ASCE Journal of Engineering Mechanics*);《地震工程与结构动力学》(*Earthquake Engineering and Structural Dynamics*);《日本机械工程师学会会刊》(*Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers*);《国际固体与结构期刊》(*International Journal of Solids and Structures*);《国际工程中的数值方法期刊》(*International Journal for Numerical Methods in Engineering*);《美国声学学会期刊》(*Journal of the Acoustical Society of America*);《声与振动》(*Sound and Vibration*);《振动,机械系统与信号处理》(*Vibrations, Mechanical Systems and Signal Processing*);《国际理论与实验模态分析期刊》(*International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*);《日本机械工程师学会国际期刊系列Ⅲ——振动控制工程》(*JSME International Journal Series Ⅲ—Vibration Control Engineering*);《车辆系统动力学》(*Vehicle System Dynamics*)。以上所列期刊许多出现在本书每章后面所列的参考文献中。

另外,《冲击与振动文摘》(*Shock and Vibration Digest*)、《应用力学评论》(*Applied Mechanics Reviews*)和《环球噪声与振动》(*Noise and Vibration Worldwide*)都是只登录摘要的月刊,但也几乎包括对每篇文章的简单讨论。振动工程中用到的公式和结果可以很容易地在参考文献[1.40~1.42]中找到。

参 考 文 献

1.1 D. C. Miller, *Anecdotal History of the Science of Sound*, Macmillan, New York, 1935.
1.2 N. F. Rieger, "The quest for $\sqrt{k/m}$: Notes on the development of vibration analysis, Part 1. genius

- awakening," *Vibrations*, Vol. 3, No. 3/4, December 1987, pp. 3-10
- 1.3 Chinese Academy of Sciences (compiler), *Ancient China's Technology and Science*, Foreign Languages Press, Beijing, 1983.
 - 1.4 R. Taton(ed.), *Ancient and Medieval Science: From the beginnings to 1450*, A. J. Pomerans (trans), Basic Books, New York, 1957.
 - 1.5 S. P. Timoshenko, *History of Strength of Materials*, McGraw-Hill, New York, 1953.
 - 1.6 R. B. Lindsay, "The story of acoustics," *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 39, No. 4, 1966, pp. 629-644.
 - 1.7 J. T. Cannon and S. Dostrovsky, *The Evolution of Dynamics: Vibration Theory from 1687 to 1742*, Springer-Verlag, New York, 1981.
 - 1.8 L. L. Bucciarelli and N. Dworsky, *Sophie Germain: An Essay in the History of the Theory of Elasticity*, D. Reidel Publishing, Dordrecht, Holland, 1980.
 - 1.9 J. W. Strutt(Baron Rayleigh), *The Theory of Sound*, Dover, New York, 1945.
 - 1.10 R. Burton, *Vibration and Impact*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1958.
 - 1.11 A. H. Nayfeh, *Perturbation Methods*, Wiley, New York, 1973.
 - 1.12 S. H. Crandall and W. D. Mark, *Random Vibration in Mechanical Systems*, Academic Press, New York, 1963.
 - 1.13 J. D. Robson, *Random Vibration*, Edinburgh University Press, Edinburgh, 1964.
 - 1.14 S. S. Rao, *The Finite Element Method in Engineering* (2nd ed.), Pergamon Press, Oxford, 1989.
 - 1.15 M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, and L. J. Topp, "Stiffness and deflection analysis of complex structures," *Journal of Aeronautical Sciences*, Vol. 23, 1956, pp. 805-824.
 - 1.16 D. Radaj et al., "Finite element analysis, an automobile engineer's tool," *International Conference on Vehicle Structural Mechanics: Finite Element Application to Design*, Society of Automotive Engineers, Detroit, 1974.
 - 1.17 R. E. D. Bishop, *Vibration* (2nd ed.), Cambridge University Press, Cambridge, 1979.
 - 1.18 M. H. Richardson and K. A. Ramsey, "Integration of dynamic testing into the product design cycle," *Sound and Vibration*, Vol. 15, No. 11, November 1981, pp. 14-27.
 - 1.19 M. J. Griffin and E. M. Whitham, "The discomfort produced by impulsive whole-body vibration," *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 65, No. 5, 1980, pp. 1277-1284.
 - 1.20 J. E. Ruzicka, "Fundamental concepts of vibration control," *Sound and Vibration*, Vol. 5, No. 7, July 1971, pp. 16-23.
 - 1.21 T. W. Black, "Vibratory finishing goes automatic" (Part 1: Types of machines; Part 2: Steps to automation), *Tool and Manufacturing Engineer*, July 1964, pp. 53-56; and August 1964, pp. 72-76.
 - 1.22 S. Prakash and V. K. Puri, *Foundations for Machines: Analysis and Design*, Wiley, New York, 1988.
 - 1.23 L. Meirovitch, *Fundamentals of Vibrations*, McGraw-Hill, New York, 2001.

- 1.24 A. Dimarogonas, *Vibration for Engineers*, (2nd ed.), Prentice-Hall, Upper Saddle River, N. J., 1996.
- 1.25 E. O. Doebelin, *System Modeling and Response*, Wiley, New York, 1980.
- 1.26 R. W. Fitzgerald, *Mechanics of Materials* (2nd ed.), Addison-Wesley, Reading, Mass., 1982.
- 1.27 I. Cochlin, *Analysis and Design of Dynamic Systems*, Harper & Row, New York, 1980.
- 1.28 F. Y. Chen, *Mechanics and Design of Cam Mechanisms*, Pergamon Press, New York, 1982.
- 1.29 W. T. Thomson, *Theory of Vibration with Applications* (4th ed.), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1993.
- 1.30 N. O. Myklestad, *Fundamentals of Vibration Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1956.
- 1.31 C. W. Bert, "Material damping: An introductory review of mathematical models, measures, and experimental techniques," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 29, No. 2, 1973, pp. 129-153.
- 1.32 J. M. Gasiolek and W. G. Carter, *Mechanics of Fluids for Mechanical Engineers*, Hart Publishing, New York, 1968.
- 1.33 A. Mironer, *Engineering Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1979.
- 1.34 F. P. Beer and E. R. Johnston, *Vector Mechanics for Engineers* (3d ed.), McGraw-Hill, New York, 1962.
- 1.35 A. Higdon and W. B. Stiles, *Engineering Mechanics* (2nd ed.), Prentice-Hall, New York, 1955.
- 1.36 E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics* (4th ed.), Wiley, New York, 1979.
- 1.37 M. C. Potter and J. Goldberg, *Mathematical Methods* (2nd ed.), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1987.
- 1.38 S. S. Rao, *Applied Numerical Methods for Engineers and Scientists*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 2002.
- 1.39 N. F. Rieger, "The literature of vibration engineering," *Shock and Vibration Digest*, Vol. 14, No. 1, January 1982, pp. 5-13.
- 1.40 R. D. Blevins, *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1979.
- 1.41 W. D. Pilkey and P. Y. Chang, *Modern Formulas for Statics and Dynamics*, McGraw-Hill, New York, 1978.
- 1.42 C. M. Harris(ed.), *Shock and Vibration Handbook* (3rd ed.), McGraw-Hill, New York, 1988.
- 1.43 J. E. Shigley and C. R. Mischke, *Mechanical Engineering Design* (5th ed.), McGraw-Hill, New York, 1989.
- 1.44 N. P. Chironis(ed.), *Machine Devices and Instrumentation*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- 1.45 D. Morrey and J. E. Mottershead, "Vibratory bowl feeder design using numerical modelling techniques," in *Modern Practice in Stress and Vibration Analysis*, J. E. Mottershead (ed.), Pergamon Press, Oxford, 1989, pp. 211-217.
- 1.46 K. McNaughton(ed.), *Solids Handling*, McGraw-Hill, New York, 1981.
- 1.47 M. M. Kamal and J. A. Wolf, Jr. (eds.), *Modern Automotive Structural Analysis*, Van Nostrand

Reinhold, New York, 1982.

- 1.48 D. J. Inman, *Engineering Vibration*, (2nd ed.), Prentice-Hall, Upper Saddle River, N. J., 2001.
- 1.49 J. H. Ginsberg, *Mechanical and Structural Vibrations: Theory and Applications*, John Wiley, New York, 2001.

思 考 题

1.1 简答题

1. 分别列举两个振动优、缺点的例子。
2. 构成振动系统的三要素是什么？
3. 如何定义一个振动系统的自由度？
4. 离散系统与连续系统的区别是什么？是不是对于任意一个振动问题都能作为离散系统来解决？
5. 在振动分析中，能否总忽略阻尼？
6. 能否根据控制微分方程来识别一非线性振动问题？
7. 确定性振动与随机振动的区别是什么？分别给出两个实例。
8. 可以用哪些方法求解振动问题的控制方程？
9. 如何布置弹簧可以增加整体刚度？
10. 定义弹簧刚度和阻尼系数。
11. 阻尼的一般类型是什么？
12. 列举根据其谐波表示周期函数的3种不同方法。
13. 定义如下术语：振动循环、振幅、相角、线频率、周期、固有频率。
14. 振动周期 τ 、角频率 ω 和频率 f 之间的关系是怎样的？
15. 根据相应的旋转矢量如何得到简谐运动的频率、相位、振幅？
16. 如何叠加两个不同频率的简谐运动？
17. 什么是拍？
18. 定义术语：分贝和倍频。
19. 解释吉伯斯(Gibbs)现象。
20. 什么是半区间展开？

1.2 判断题

1. 如果在振动过程中能量总是以某种方式不断损耗，则系统可以被看作是有阻尼的。

()

2. 叠加原理适用于线性与非线性系统。 ()
3. 受初始扰动后,系统自由振动的频率称为固有频率。 ()
4. 任意一个周期函数都可以展成傅里叶级数。 ()
5. 简谐运动是周期运动。 ()
6. 几个不同位置质量的等效质量可以用动能等效得到。 ()
7. 广义坐标不一定是笛卡儿坐标。 ()
8. 离散系统和集中参数系统是相同的。 ()
9. 计算简谐运动的和: $x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$, 其中 $x_1(t) = 15\cos \omega t$, $x_2(t) = 20\cos(\omega t + 1)$, 振幅 $A = 30.8088$ 。 ()
10. 计算简谐运动的和: $x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$, 其中 $x_1(t) = 15\cos \omega t$, $x_2(t) = 20\cos(\omega t + 1)$, 初相角 $\alpha = 1.57 \text{ rad}$ 。 ()

1.3 填空题

1. 在_____时系统会承受相当大的振动。
2. 没有_____损失的振动为非衰减振动。
3. 振动系统包括弹簧、阻尼器和_____。
4. 如果运动间隔相同时间后重复,则被称为_____振动。
5. 如果加速度与位移成正比且方向指向中间位置,则运动被称为_____。
6. 完成一个运动循环的时间被称为振动的_____。
7. 单位时间内循环的次数被称为振动的_____。
8. 两简谐运动具有相同的频率被称为_____。
9. 两简谐运动到达某一相似位置时对应的角度差称为_____。
10. 连续或分布系统可以认为具有_____个自由度。
11. 具有有限自由度的系统称为_____系统。
12. 系统的自由度表明能够描述系统各部分在任一瞬时位置的独立_____的最小数目。
13. 如果系统的振动仅取决于初始扰动,则称为_____振动。
14. 如果系统的振动取决于外部激励,则称为_____振动。
15. 共振表明系统_____频率与外部激励频率是一致的。
16. 如果_____,则函数 $f(t)$ 是奇函数。
17. _____区间展开可用来描述那些仅在时间间隔 0 到 τ 内有定义的函数。
18. _____分析涉及周期函数的傅里叶级数表示。

1.4 选择题

- 单摆的自由度是_____。
(a) 0 (b) 1 (c) 2
- 振动可以按_____方式分类。
(a) 1种 (b) 2种 (c) 几种
- 吉伯斯(Gibbs)现象是指对_____进行傅里叶级数展开时的异常现象。
(a) 简谐函数 (b) 周期函数 (c) 随机函数
- 周期函数的各种频率成分对应的振幅和相角的图形表示称为_____。
(a) 谱图 (b) 频率图 (c) 谐波图
- 如果一个系统在流体中振动,则阻尼是_____。
(a) 黏性的 (b) 库仑的 (c) 固体的
- 振动系统的某些部分在无润滑的平面上滑动时,阻尼是_____。
(a) 黏性的 (b) 库仑的 (c) 固体的
- 当振动系统材料的应力-应变曲线表现为一个滞后回线时,则阻尼是_____。
(a) 黏性的 (b) 库仑的 (c) 固体的
- 刚度系数分别为 k_1 、 k_2 的两并联弹簧的等效刚度系数是_____。
(a) $k_1 + k_2$ (b) $\frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$ (c) $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$
- 刚度系数分别为 k_1 、 k_2 的两串联弹簧的等效刚度系数是_____。
(a) $k_1 + k_2$ (b) $\frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$ (c) $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$
- 在端部作用集中质量的悬臂梁的刚度系数是_____。
(a) $\frac{3EI}{l^3}$ (b) $\frac{l^3}{3EI}$ (c) $\frac{Wl^3}{3EI}$

1.5 连线题

- | | |
|---------------|----------------------|
| 1. 柴油发动机的不平衡 | (a) 可以导致涡轮机和飞机发动机的失效 |
| 2. 切削金属时刀具的振动 | (b) 引起人类活动的不舒服 |
| 3. 叶片和圆盘的振动 | (c) 可引起机车车轮脱离轨道 |
| 4. 风致振动 | (d) 可引起桥梁的破坏 |
| 5. 振动的传递 | (e) 可导致颤振 |

1.6 连线题(求等效弹簧刚度系数, 已知 $k_1=20 \text{ lbf/in}$, $k_2=50 \text{ lbf/in}$, $k_3=100 \text{ lbf/in}$, $k_4=200 \text{ lbf/in}$)

- | | |
|---|--------------------|
| 1. k_1, k_2, k_3, k_4 并联 | (a) 18.9189 lbf/in |
| 2. k_1, k_2, k_3, k_4 串联 | (b) 370.0 lbf/in |
| 3. k_1, k_2 并联($k_{eq}=k_{12}$) | (c) 11.7647 lbf/in |
| 4. k_3, k_4 并联($k_{eq}=k_{34}$) | (d) 300.0 lbf/in |
| 5. k_1, k_2, k_3 并联($k_{eq}=k_{123}$) | (e) 70.0 lbf/in |
| 6. k_{123} 与 k_4 串联 | (f) 170.0 lbf/in |
| 7. k_2, k_3, k_4 并联($k_{eq}=k_{234}$) | (g) 350.0 lbf/in |
| 8. k_1 与 k_{234} 串联 | (h) 91.8919 lbf/in |

习 题

- 1.1*^① 关于人体对振动或冲击的反应的研究在许多应用领域都是非常重要的。在站立姿势时, 头、躯干上部、臀部和腿的质量, 颈部、脊柱、腹部和腿的弹性或阻尼都会影响人体反应的特点。连续建立 3 种近似模型, 以期对人体的模型不断改善。
- 1.2* 图 1.46 显示的是汽车发生碰撞时的人体与约束系统, 考虑座位、人体和约束的弹性、质量及阻尼, 给出一个分析系统振动的简单数学模型。
- 1.3* 如图 1.47 所示, 一活塞式发动机安装在基础上, 发动机内产生的不平衡力和不平衡力矩传递到框架和基础上。一弹性垫置于发动机和基础之间用来减少振动的传递。利用建模过程的逐步改善建立系统的两种数学模型。

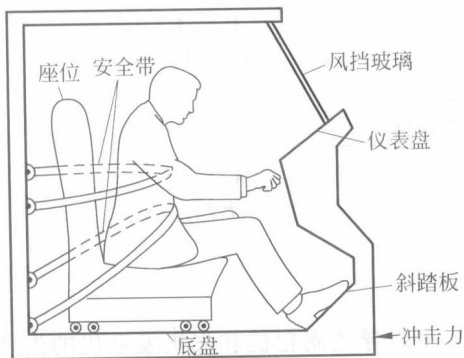


图 1.46 人体及其约束系统

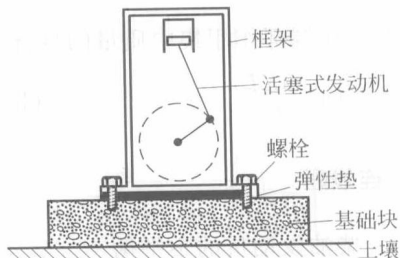


图 1.47 置于基础上的活塞式发动机

① 星号“*”代表设计性题目或答案不唯一的题目。

- 1.4* 考虑(a)车身、乘客、坐椅、前轮和后轮的重量；(b)轮胎(悬挂)、主弹簧和坐椅的弹性；(c)坐椅、减振器和轮胎的阻尼，可建立汽车在不平路面上行驶的数学模型。利用建模过程的逐步改善给出系统的3种数学模型(见图1.48)。
- 1.5* 研究两汽车迎头相撞的问题时，可以转化为讨论汽车对障碍物的冲击问题。如图1.49所示，考虑汽车、发动机、传动系统、悬挂的质量以及保险杠、散热器、车身金属板、传动系和发动机支座的弹性，建立其数学模型。

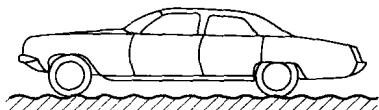


图 1.48 在不平路面上行驶的汽车

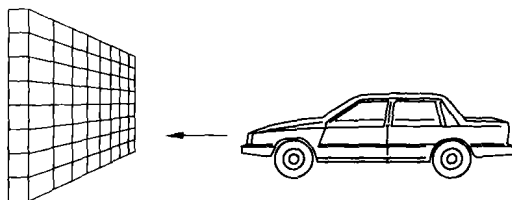


图 1.49 与障碍物发生碰撞的汽车

- 1.6* 考虑轮胎、减振器和犁的质量、弹性及阻尼，建立如图1.50所示的拖拉机和犁的数学模型。

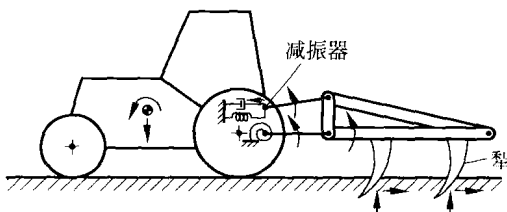


图 1.50 拖拉机与犁

- 1.7 计算如图1.51所示系统的等效刚度系数。
- 1.8 在图1.52中，计算系统沿 θ 方向的等效刚度系数。

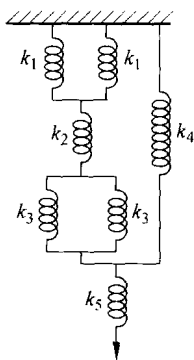


图 1.51 串并联弹簧系统

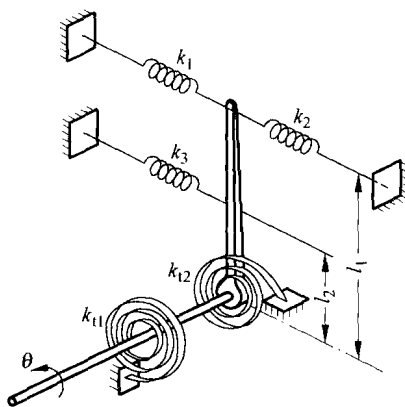


图 1.52 习题 1.8 图

- 1.9 计算如图 1.53 所示系统的等效扭转刚度系数。假定 k_1, k_2, k_3, k_4 是扭转刚度, k_5, k_6 是线刚度系数。
- 1.10 一质量为 500 kg 的机器安装在长为 2 m 的简支钢梁上, 梁的横截面高为 0.1 m, 宽为 1.2 m, 杨氏模量 $E=2.06 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ 。为了减小梁的挠度, 如图 1.54 所示, 在梁的中点处连接一刚度系数为 k 的弹簧。确定 k 值的大小, 使梁的挠度分别为原挠度的 (a) 25%; (b) 50%; (c) 75%。假设梁的质量不计。

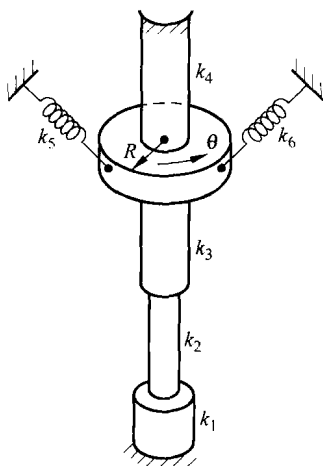


图 1.53 习题 1.9 图

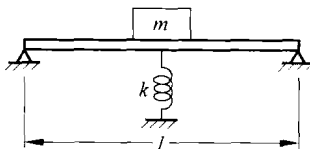


图 1.54 习题 1.10 图

- 1.11 长度为 a 的 4 根完全相同的刚性杆, 与一刚度为 k 的弹簧相连, 在结构下端作用一载荷 P , 如图 1.55(a) 和 (b) 所示, 忽略杆的质量和铰接处的摩擦, 计算每种情况下系统的等效刚度 k_{eq} 。

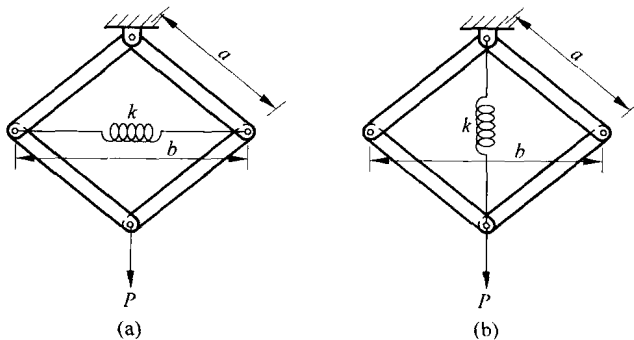


图 1.55 习题 1.11 图

- 1.12 如图 1.56 所示, 三脚架用来固定测量空间两点之间距离所用的电子设备。三脚架的

3条腿关于中垂线对称布置,每条腿均与铅垂线成 α 角,如果每条腿长均为 l ,且轴向刚度为 k ,计算三脚架在铅垂方向的等效刚度系数。

- 1.13 计算如图 1.57 所示系统的等效刚度常数、等效质量与 θ 的关系。假定杆 AOB 和 CD 是刚体且不计质量。

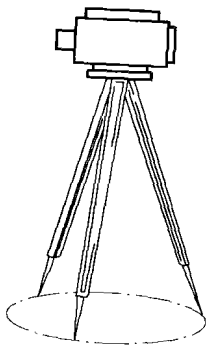


图 1.56 三脚架

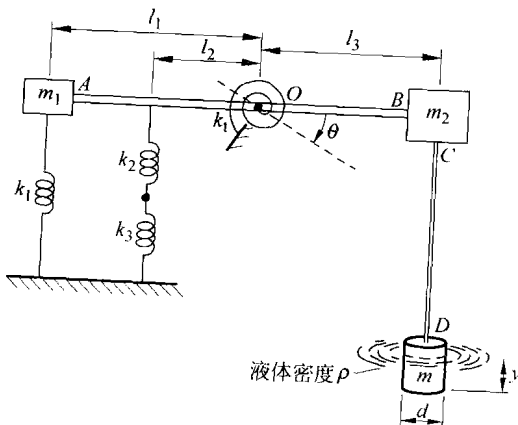


图 1.57 习题 1.13 图

- 1.14 计算与图 1.58 所示实心变截面轴具有相同轴向刚度系数的等截面空心轴的长度。设空心轴的内径为 d ,壁厚为 t 。
- 1.15 一个弹簧的力与变形的关系为 $F=500x+2x^3$,其中力 F 的单位为 N, x 的单位为 mm。计算:(a)在 $x=10$ mm 时的等效线性刚度系数;(b)利用线性刚度系数求在 $x=9$ mm, $x=11$ mm 时的弹簧力,并找出在(b)中求得的弹簧力的误差。
- 1.16 图 1.59 所示为一空气弹簧,一般用来得到非常低的固有频率。在静载荷作用下,可以认为其不产生变形。假设由于质量 m 的移动引起压力 p 和体积 V 的变化时是一个绝热过程,计算此空气弹簧的刚度。提示:在绝热过程中, $pV^\gamma=\text{常数}$,其中 γ 是比热。对空气, $\gamma=1.4$ 。

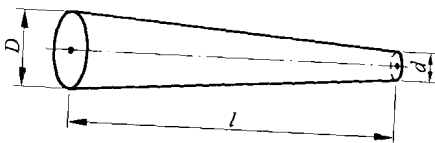


图 1.58 固体锥

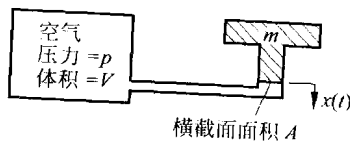


图 1.59 空气弹簧

- 1.17 计算图 1.60 所示系统在载荷 P 方向的等效刚度系数。
- 1.18* 用柱状容器和活塞设计一空气弹簧,使其刚度系数为 75 lbf/in。假设可得到的最大空气压强为 200 lbf/in²。

- 1.19 非线性弹簧的力(F)与变形(x)的关系由式 $F=ax+bx^3$ 给出,其中 a, b 均为常数。求解当变形 $x=0.01, a=20\,000\text{ N/m}, b=40\times 10^6\text{ N/m}^3$ 时的等效线性弹簧常数。
- 1.20 如图 1.61 所示,两非线性弹簧 S_1, S_2 以两种不同的方式连接,弹簧 S_i 内的力 F_i 与其变形 x_i 的关系为 $F_i=a_ix_i+b_ix_i^3, i=1, 2$, 其中 a_i, b_i 是常数。如果等效线性刚度系数 k_{eq} 由式 $W=k_{eq}x$ 决定,其中 x 是系统变形。求解在每种情况下 k_{eq} 的表达式。

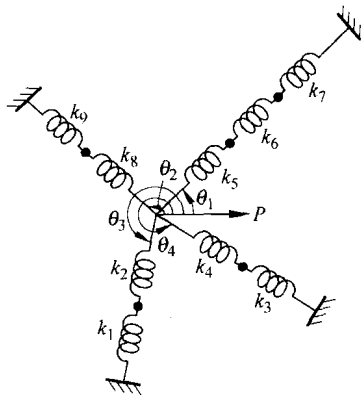


图 1.60 习题 1.17 图

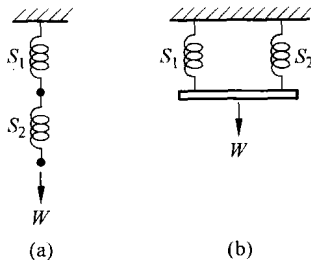


图 1.61 习题 1.20 图

- 1.21* 设计一钢制螺旋压缩弹簧来满足下列要求:

弹簧刚度 $k \geq 8000\text{ N/mm}$;

振动的固有频率 $f_1 \geq 0.4\text{ Hz}$

弹簧指数 $D/d \geq 6$;

有效圈数 $N \geq 10$

弹簧的刚度和固有频率分别为 $k = \frac{Gd^4}{8D^3N}$, $f_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{kg}{W}}$

其中, G 是簧丝材料的剪切模量; d 是簧丝直径; D 是簧圈直径; W 是弹簧重量; g 是重力加速度。

- 1.22 求解如图 1.62 所示钢铝复合杆在轴线方向的刚度系数。

- 1.23 一钢制变截面螺旋桨轴如图 1.63 所示,求其扭转刚度系数。

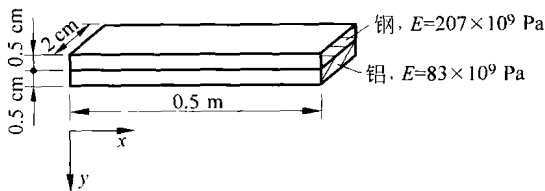


图 1.62 钢铝复合杆

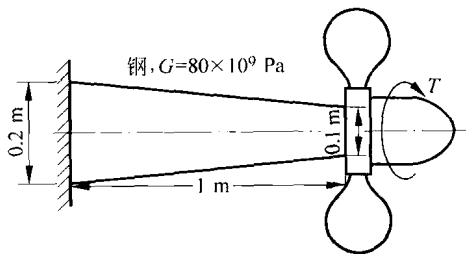


图 1.63 钢制变截面螺旋桨轴

1.24 一钢铝复合螺旋桨轴如图 1.64 所示。

(1) 求其扭转刚度常数。

(2) 当内部铝筒的直径由 10 cm 改为 5 cm 时,该复合轴的扭转刚度系数变为多少?

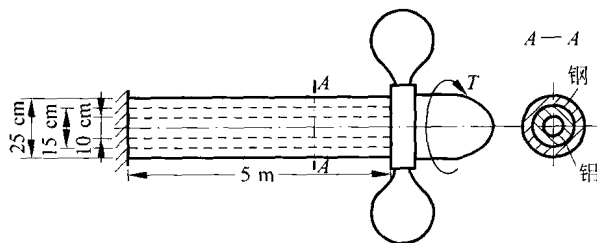


图 1.64 钢铝复合螺旋桨轴

1.25 考虑如下两螺旋弹簧。

弹簧 1: 材料——钢;圈数——10;平均簧圈直径——12 in;簧丝直径——2 in;

自由长度——15 in;剪切弹性模量—— 12×10^6 lbf/in²。

弹簧 2: 材料——铝;圈数——10;平均簧圈直径——10 in;簧丝直径——1 in;

自由长度——15 in;剪切弹性模量—— 4×10^6 lbf/in²。

当(a)弹簧 2 置于弹簧 1 内部,(b)弹簧 2 置于弹簧 1 顶部时,求等效刚度常数。

1.26 假如弹簧 1,2 的金属丝直径分别用 1.0 in 和 1.5 in 替代 2.0 in 和 1.0 in,解习题 1.25 中的问题。

1.27 图 1.65 所示挖掘机的臂 AD 长为 100 in,可以用一外径为 10 in、内径为 9.5 in、黏性阻尼系数为 0.4 的钢管近似,臂 DE 可以用一外径为 7 in、内径为 6.5 in、长为 75 in、黏性阻尼系数为 0.3 的钢管近似。假设基础 AC 固定,估计挖掘机的等效刚度常数和等效阻尼系数。

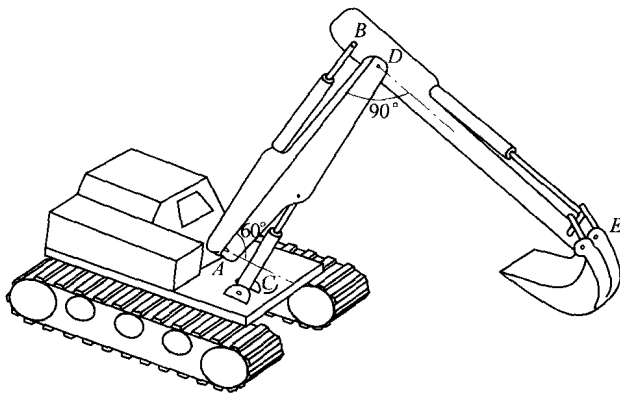


图 1.65 挖掘机

- 1.28 如图 1.66 所示,一个热交换器由 6 根相同的不锈钢管平行连接组成,每根钢管的外径 0.3 in,内径 0.29 in,长度 50 in。试确定关于热交换器纵向轴的轴向刚度和扭转刚度。
- 1.29 分别位于连杆 1,2 端部的两个扇形齿轮。相互啮合,并绕 O_1, O_2 轴转动,如图 1.67 所示。若连杆 1,2 按图示方式连接到弹簧 k_1, k_2, k_3, k_4 和 k_{t1}, k_{t2} 上,求出等效的扭转弹簧刚度和系统对应于 θ_1 的等效转动惯量。假设:(a) 连杆 1 关于 O_1 轴的转动惯量是 J_1 ,连杆 2 关于 O_2 的转动惯量是 J_2 (均包括扇形齿轮);(b) 角度 θ_1, θ_2 非常小。

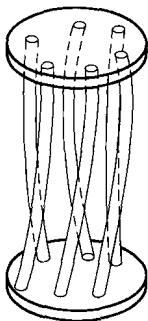


图 1.66 热交换器

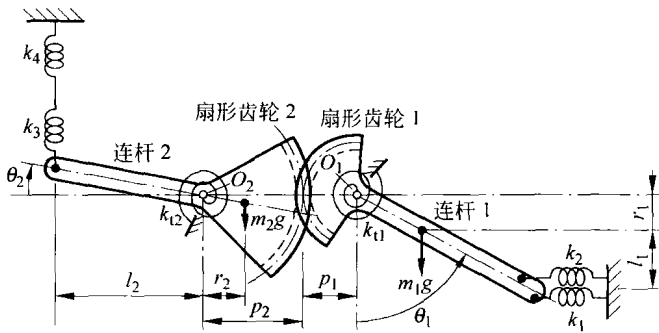


图 1.67 两个扇形齿轮

- 1.30 在图 1.68 中,求摇臂组件关于 x 坐标的等效质量。
- 1.31 求图 1.69 所示的齿轮系关于驱动轴的等效转动惯量。图中的 J_i, n_i 分别表示齿轮 i 的转动惯量和齿数($i=1, 2, \dots, 2N$)。

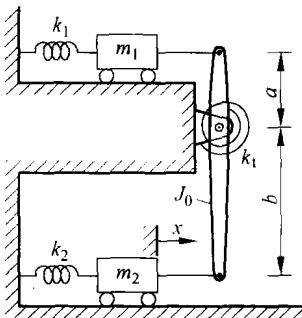


图 1.68 摇臂组件

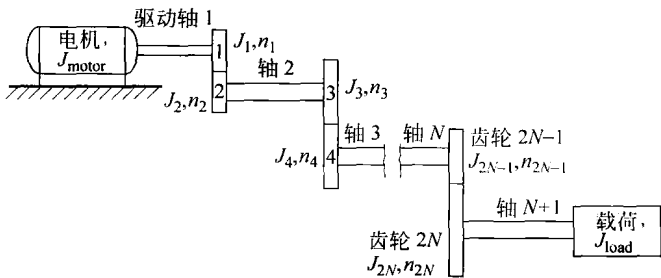


图 1.69 齿轮系

- 1.32 转动惯量分别为 J_1, J_2 的两质量块,分别位于由齿轮带动的两旋转(刚性)轴上,如图 1.70 所示。如果两齿轮的齿数分别是 n_1, n_2 ,求对应于 θ_1 的等效转动惯量。
- 1.33 图 1.71 所示为采油泵简化模型,曲柄的旋转运动被转化为活塞的往复运动。求系统在 A 处的等效质量。

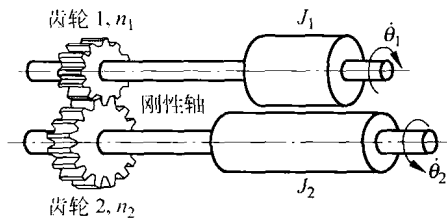


图 1.70 齿轮轴上的旋转质量

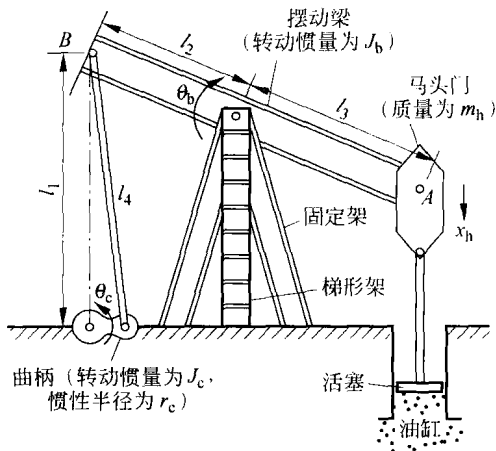


图 1.71 石油井简化模型

1.34 求图 1.72 中系统的等效质量。

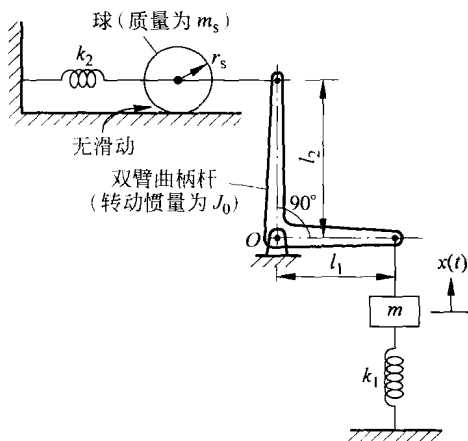


图 1.72 习题 1.34 图

1.35 求下述情况下的等效阻尼常数：

(a) 3 个阻尼器平行；(b) 3 个阻尼器串联；(c) 3 个阻尼器与刚性杆相连(见图 1.73)时在 c_1 处的等效阻尼；(d) 3 个阻尼器分别位于 3 个齿轮轴上(见图 1.74)时在 c_1 处的等效阻尼。

提示：黏性阻尼器在简谐运动中一个周期内消耗的能量为 $\pi c \omega X^2$ ，其中 c 为阻尼系数， ω 为频率， X 为振幅。

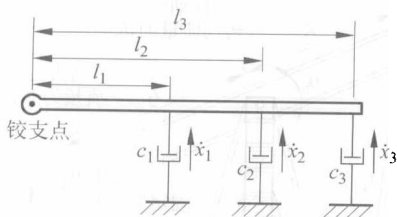


图 1.73 与刚性杆相连的阻尼器

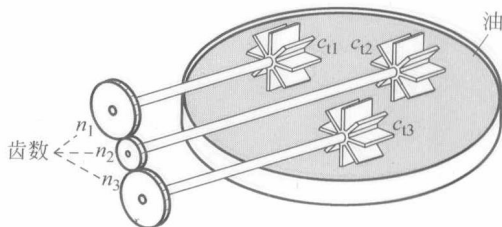


图 1.74 位于齿轮轴上的阻尼器

1.36* 设计一个活塞-油缸式黏性阻尼器,使阻尼常数为 $1 \text{ lbf} \cdot \text{s/in}$ 。已知流体的黏度为 $4 \times 10^{-6} \text{ reyn}$ ($1 \text{ reyn} = 1 \text{ lbf} \cdot \text{s/in}^2$)。

1.37* 设计一个阻尼系数为 $10^5 \text{ lbf} \cdot \text{s/in}$ 的活塞-油缸式冲击减振器,工作温度 70°F ,用 SAE30 油,活塞直径不大于 2.5 in 。

1.38 如图 1.75 所示旋转阻尼器,试用 D, d, l, h, ω, μ 表示其阻尼系数。其中 ω 表示内圆柱的角速度, d 和 h 分别表示内外圆柱径向和轴向的间隙。

1.39 非线性阻尼器的力 (F) 与速度 (\dot{x}) 的关系由式 $F = a\dot{x} + b\dot{x}^2$ 确定,其中, a, b 为常数。当相对速度为 5 m/s , $a = 5 \text{ N} \cdot \text{s/m}$, $b = 0.2 \text{ N} \cdot \text{s}^2/\text{m}^2$ 时,求等效线性阻尼系数。

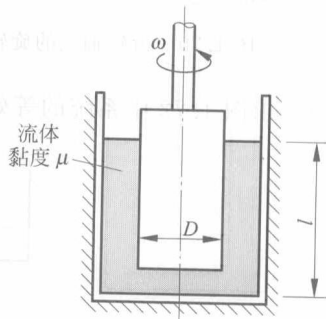


图 1.75 旋转阻尼器

1.40 如图 1.76 所示,一块方形板在黏度为 μ 的流体中运动时,由于表面摩擦力而引起的阻尼系数由下式计算: $c = 100\mu l^2 d$ 。设计一平板形阻尼器(参见图 1.25),使其相对于相同的流体能提供相同的阻尼系数。

1.41 图 1.77 所示减振器的阻尼系数由下式给出: $c = \frac{6\pi\mu l}{h^3} \left[\left(a - \frac{h}{2} \right)^2 - r^2 \right] \left[\frac{a^2 - r^2}{a - \frac{h}{2}} - h \right]$ 。

确定阻尼器的阻尼系数,已知 $\mu = 0.3445 \text{ Pa} \cdot \text{s}$, $l = 10 \text{ cm}$, $h = 0.1 \text{ cm}$, $a = 2 \text{ cm}$, $r = 0.5 \text{ cm}$ 。

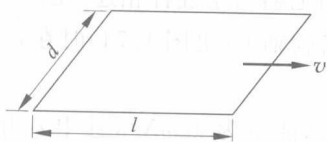


图 1.76 习题 1.40 图

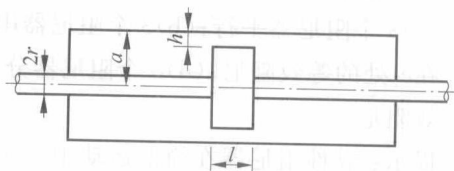


图 1.77 减振器

- 1.42 在习题 1.41 中,用给出的数据,求下列情况时的阻尼系数 c : (a) r 从 0.5 cm 变为 1.0 cm; (b) h 从 0.05 cm 变为 0.10 cm; (c) a 从 2 cm 变为 4 cm。
- 1.43 用指数形式($Ae^{i\theta}$)表示复数 $5+2i$ 。
- 1.44 求两复数 $(1+2i)$ 和 $(3-4i)$ 的和,并用指数形式($Ae^{i\theta}$)表示其结果。
- 1.45 求 $(3-4i)$ 减去 $(1+2i)$ 的差,并用指数形式($Ae^{i\theta}$)表示其结果。
- 1.46 已知 $z_1=1+2i, z_2=3-4i$, 求这两个复数的积,并用指数形式($Ae^{i\theta}$)表示其结果。
- 1.47 已知 $z_1=1+2i, z_2=3-4i$, 求 $\frac{z_1}{z_2}$, 并用指数形式($Ae^{i\theta}$)表示其结果。
- 1.48 往复式发动机的基础在 x, y 方向分别作简谐运动: $x(t)=X\cos\omega t, y(t)=Y\cos(\omega t+\phi)$, 其中 X, Y 为振幅, ω 为角速度, ϕ 为相位差。
- (a) 证明两个运动的合成运动满足下式给出的椭圆方程(见图 1.78):

$$\frac{x^2}{X^2} + \frac{y^2}{Y^2} - 2\frac{xy}{XY}\cos\phi = \sin^2\phi \quad (\text{E. 1})$$

(b) 讨论由上述方程描述的合成运动在 $\phi=0, \phi=\pi/2, \phi=\pi$ 时的性质。

注: 代表方程(E. 1)的椭圆图形就是著名的李萨如(Lissajous)图, 经常用来解释示波器所显示的某种类型的实验结果。

- 1.49 空气压缩机的基础承受相互垂直的两个方向的简谐运动, 其频率相同, 示波器里显示的合成运动如图 1.79 所示。求两个方向的振幅和它们的相位差。

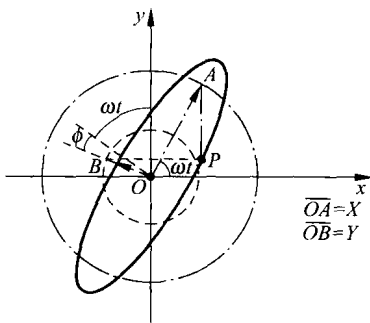


图 1.78 李萨如(Lissajous)图

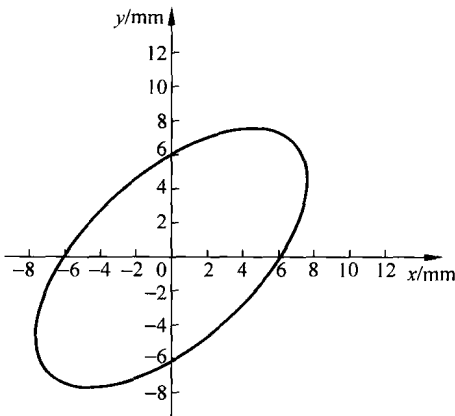


图 1.79 习题 1.49 图

- 1.50 一机器的运动方程为 $x(t)=A\cos(50t+\alpha)$ mm, 如初始条件为 $x(0)=3$ mm, $\dot{x}(0)=1.0$ m/s。
- (a) 求常数 A 和 α 。
- (b) 用 $x(t)=A_1\cos\omega t+A_2\sin\omega t$ 的形式表示这个运动, 并确定常数 A_1, A_2 。
- 1.51 证明 $\sin\omega t, \cos\omega t$ 的任意线性组合 $x(t)=A_1\cos\omega t+A_2\sin\omega t$ 都表示一个简谐运动

(A_1, A_2 为常数)。

- 1.52 求两简谐运动 $x_1(t) = 5\cos(3t+1)$ 与 $x_2(t) = 10\cos(3t+2)$ 的和, 利用: (a) 三角关系; (b) 矢量相加; (c) 复数表示。
- 1.53 如果简谐运动 $x(t) = 10\sin(\omega t + 60^\circ)$ 的分量之一是 $x_1(t) = 5\sin(\omega t + 30^\circ)$, 求另一分量。
- 1.54 两简谐运动分别为 $x_1(t) = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}t$, $x_2(t) = \sin\pi t$, 这两个运动的和是否为周期运动? 如果是, 求出其周期。
- 1.55 两简谐运动分别为 $x_1(t) = 2\cos 2t$, $x_2(t) = \cos 3t$, 这两个运动的和是否为周期运动? 如果是, 求出其周期。
- 1.56 两简谐运动分别为 $x_1(t) = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}t$, $x_2(t) = \cos\pi t$, 这两个运动的差是否为周期运动? 如果是, 求出其周期。
- 1.57 $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, 其中, $x_1(t) = 3\sin 30t$, $x_2(t) = 3\sin 29t$, 求其最大、最小振幅, 同时求出对应 $x(t)$ 的拍频。
- 1.58 一机器承受两个简谐运动, 示波器显示的合成运动如图 1.80 所示, 求两简谐运动的振幅和频率。

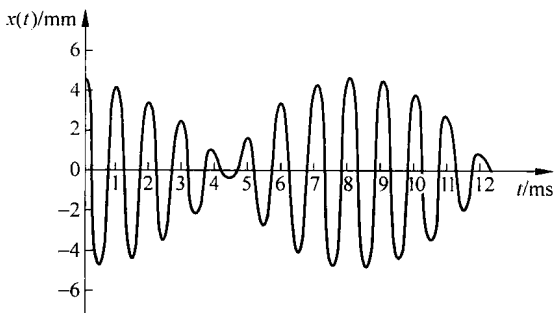


图 1.80 习题 1.58 图

- 1.59 一简谐运动的振幅为 0.05 m, 频率为 10 Hz, 求其周期、最大速度、最大加速度。
- 1.60 固定在结构框架上的加速度计表明, 结构作简谐运动 (每秒循环 15 次), 最大加速度为 $0.5g$, 求建筑结构的振幅和最大速度。
- 1.61 离心泵基础的振幅为 $x_{\max} = 0.25$ mm, 最大加速度 $\ddot{x}_{\max} = 0.4g$, 求泵的工作速度。
- 1.62 函数 $x(t)$ 的均方根被定义为 $x(t)$ 的平方值在一个周期 τ 内的平均值的平方根, 即
$$x_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} [x(t)]^2 dt}$$
。利用这个定义, 求函数 $x(t) = X\sin\omega t = X\sin\frac{2\pi t}{\tau}$ 的均方根。
- 1.63 利用习题 1.62 给出的定义, 求图 1.36(a) 中所示函数的均方根值。
- 1.64 证明: 对偶函数 $x(-t) = x(t)$ 来说, 傅里叶级数中正弦项的系数 (b_n) 为 0; 对奇函数

$x(-t) = -x(t)$ 来说,傅里叶级数中余弦项的系数(a_0, a_n)为0。

- 1.65 求图 1.40(b)和(c)所示函数的傅里叶级数展开式。当时间轴向下平移 A 时,再求其傅里叶级数展开式。
- 1.66 由锻锤产生的激振力如图 1.81 所示,求其傅里叶级数展开式。
- 1.67 求图 1.82 所示周期函数的傅里叶级数展开式,同时绘制相应的频谱图。

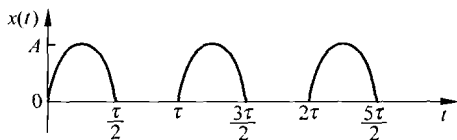


图 1.81 习题 1.66 图

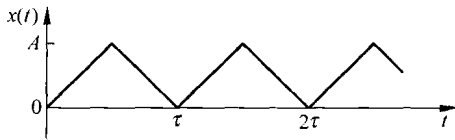


图 1.82 习题 1.67 图

- 1.68 求图 1.83 所示周期函数的傅里叶级数展开式,同时绘制相应的频谱图。
- 1.69 求图 1.84 所示周期函数的傅里叶级数展开式,同时绘制相应的频谱图。

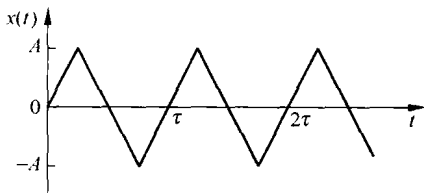


图 1.83 习题 1.68 图

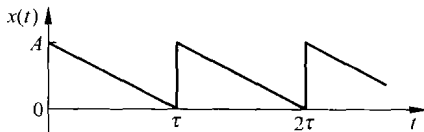


图 1.84 习题 1.69 图

- 1.70 周期函数 $x(t)$ 的傅里叶级数是一个无穷级数:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (\text{E. 1})$$

其中

$$a_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} x(t) dt \quad (\text{E. 2})$$

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} x(t) \cos n\omega t dt \quad (\text{E. 3})$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} x(t) \sin n\omega t dt \quad (\text{E. 4})$$

ω 是圆频率, $\frac{2\pi}{\omega}$ 是周期。与式(E.1)中包含无限项不同,经常简写成只保留 k 项,即

$$x(t) \approx \tilde{x}(t) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^k (\tilde{a}_n \cos n\omega t + \tilde{b}_n \sin n\omega t) \quad (\text{E. 5})$$

此时的误差为

$$e(t) = x(t) - \tilde{x}(t) \quad (\text{E. 6})$$

求系数 $\tilde{a}_0, \tilde{a}_n, \tilde{b}_n$, 使在一个周期内误差的平方 $\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} e^2(t) dt$ 最小。

将 $\tilde{a}_0, \tilde{a}_n, \tilde{b}_n$ 的表达式与式(E. 2)~式(E. 4)进行比较。

1. 71 在下面的表格中给出了某时间函数的离散值, 对其进行谐波(只取前 3 阶)分析。

t_i	0. 02	0. 04	0. 06	0. 08	0. 10	0. 12	0. 14	0. 16
x_i	9	13	17	29	43	59	63	57
t_i	0. 18	0. 20	0. 22	0. 24	0. 26	0. 28	0. 30	0. 32
x_i	49	35	35	41	47	41	13	7

1. 72 如图 1. 85(a)所示离心风扇, 当叶片经过任意一点时, 该点处的空气就会产生一个脉冲, 如图 1. 85(b)所示, 这种脉冲的频率由叶轮的转速 n 和叶片数 N 决定, 当 $n=100$ r/min 和 $N=4$ 时, 求图 1. 85(b)所示压力波动的前 3 阶谐波。

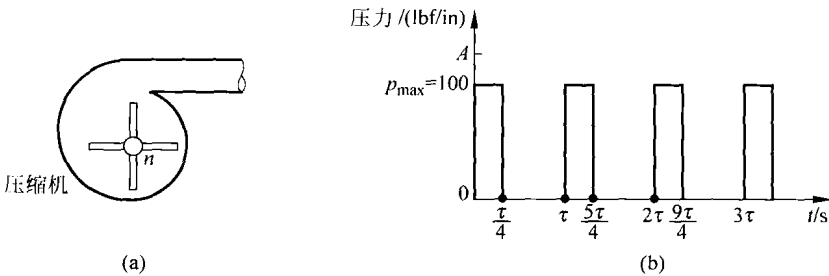


图 1. 85 习题 1. 72 图
(a) 离心风扇; (b) 某点处的压力波动

1. 73 同习题 1. 72, $n=200$ r/min, $N=6$ 。

1. 74 内燃机的扭矩 M_t 随时间 t 的变化如表 1. 3 所示。作扭矩的谐波分析, 求前 3 阶谐波的振幅。

表 1. 3

t/s	$M_t/N \cdot m$	t/s	$M_t/N \cdot m$	t/s	$M_t/N \cdot m$
0. 000 50	770	0. 004 50	1890	0. 008 50	1050
0. 001 00	810	0. 005 00	1750	0. 009 00	990
0. 001 50	850	0. 005 50	1630	0. 009 50	930
0. 002 00	910	0. 006 00	1510	0. 010 00	890
0. 002 50	1010	0. 006 50	1390	0. 010 50	850
0. 003 00	1170	0. 007 00	1290	0. 011 00	810
0. 003 50	1370	0. 007 50	1190	0. 011 50	770
0. 004 00	1610	0. 008 00	1110	0. 012 00	750

- 1.75 作图 1.86 所示函数的包含前 3 阶谐波的谐波分析。
- 1.76 利用 MATLAB 求出习题 1.71 中函数的傅里叶级数展开式。
- 1.77 利用 MATLAB 绘出习题 1.75 中求出的傅里叶级数展开式表示的力随时间的变化规律。
- 1.78 利用 MATLAB 绘出对应习题 1.42 中求出的阻尼系数 c 随 r, h, a 的变化图。
- 1.79 利用 MATLAB 绘弹簧刚度的变化图。刚度 k 与变形 x 的对应关系如下：
 (a) $k=1000x-100x^2, 0 \leq x \leq 4$; (b) $k=500x+500x^2, 0 \leq x \leq 4$
- 1.80 一质量块的运动包含两个简谐运动: $x_1(t) = 3\sin 30t, x_2(t) = 3\sin 29t$ 。用 MATLAB 绘出其合成运动, 并确定拍频和拍的周期。
- 1.81 利用 1.10 节的 C++ 程序求解习题 1.74。
- 1.82 利用 1.10 节的 C++ 程序求解习题 1.71。
- 1.83 利用 1.10 节的 C++ 程序求图 1.86 所示函数的前 6 阶谐波。
- 1.84 利用 1.10 节的 C++ 程序作图 1.87 所示函数包括前 10 阶谐波的谐波分析。

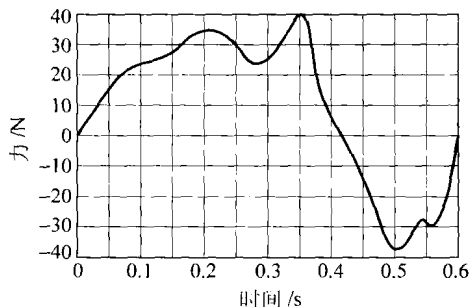


图 1.86 习题 1.75 图

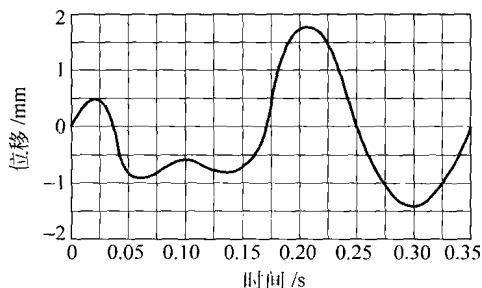


图 1.87 习题 1.84 图

- 1.85 利用 1.11 节的子程序 FORIER 求解习题 1.74。
- 1.86 利用 1.11 节的子程序 FORIER 求解习题 1.71。
- 1.87 利用 1.11 节的子程序 FORIER 求图 1.86 所示函数的前 6 阶谐波。
- 1.88 利用 1.11 节的子程序 FORIER 对图 1.87 所示函数进行谐波分析, 取前 10 阶谐波。

设计题目

- 1.89* 在图 1.88 所示的曲柄滑块机构中, 曲柄的长度为 r , 连杆的长度为 l , 曲柄的角速度为 ω , 推导活塞 P 的运动方程。
- (a) 讨论利用这个机构产生简谐运动的可行性。

(b) 求 l/r 的值, 使第一阶谐波的振幅至少为各阶高次谐波振幅的 25 倍。

- 1.90* 图 1.89 所示的振动台用来检测某种电子产品, 两根轴 O_1 和 O_2 都固定在框架 F 上, 两个相同的互相啮合的齿轮 G_1 和 G_2 分别绕 O_1 和 O_2 转动, 两个质量为 m 的相同质量块对中间竖直轴对称分布, 如图 1.89 所示。齿轮转动过程中, 将产生一个不平衡的竖直方向的力促使平台振动, 其大小为 $P = 2m\omega^2 r \cos \theta$, $\theta = \omega t$, ω 为齿轮角速度。设计一振动台, 使之在 25~50 Hz 的频率范围内能产生 0~100 N 的力。

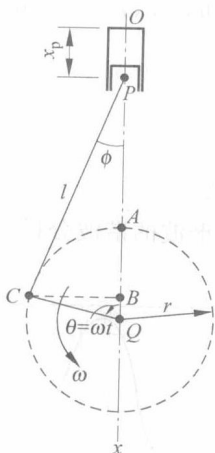


图 1.88 曲柄滑块机构

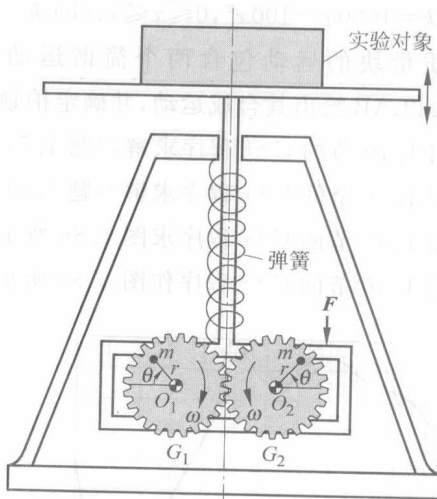


图 1.89 振动台

- 1.91* 图 1.90 所示的装置用来控制由漏斗落到传送带上物料的重量, 曲柄通过楔形块使作动杆作往复运动。传递给作动杆的运动的振幅大小随楔形块的上下运动而变化, 由于传送带是铰接在 O 点, 一旦传送带超载, 就使杠杆 OA 向下倾斜, 从而使楔形块上

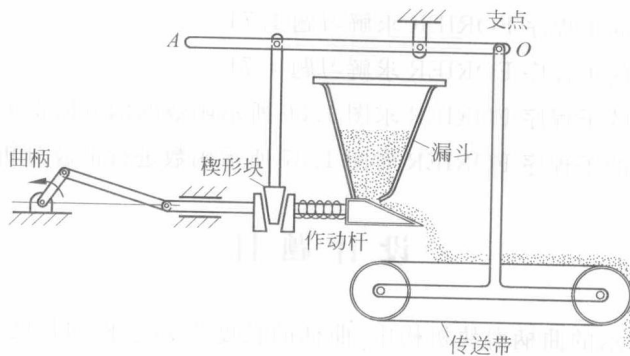


图 1.90 振动调重系统

升,这使驱动杆的运动幅度减小,因而导致喂料速度减小。设计这样一个给料调节系统来维持每分钟的给料重量为 (10 ± 0.1) lbf。

- 1.92* 图 1.91 所示的振动压实机,由三凸角凸轮、振动滚柱和从动杆构成。当凸轮旋转时,滚柱每经过一个上升后就下降一次,所以连接在从动杆一端的重物也随着上升和下降。滚柱和凸轮的接触由弹簧维持。设计一个振动压实机,使其以 50 Hz 的频率提供大小为 200 lbf 的力。

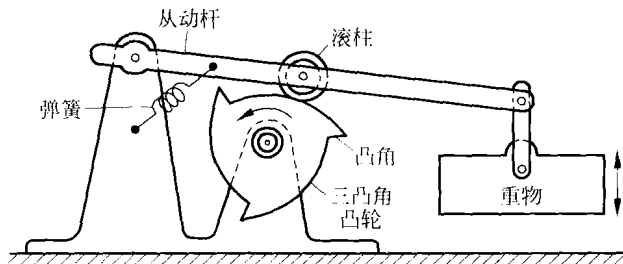


图 1.91 振动压实机

- 1.93* 振动给料机广泛应用于自动化生产线上。利用它可以使大量相同的零件以稳定的速率被传送和定位到工作台,以待进一步加工^[1.45, 1.46]。在结构上,振动给料机是通过一组倾斜的弹性元件(弹簧)与底座分开,如图 1.92 所示。安装在料斗和底座之间的电磁线圈提供料斗的驱动力。料斗的振动使零件沿着设置在料斗内的螺旋轨道上下跳动。在螺旋轨道内的合适位置安装有专门的工具,挑出那些有缺陷的或超出容许范围或形状不规则的零部件。设计这个振动给料机时必须考虑哪些因素?

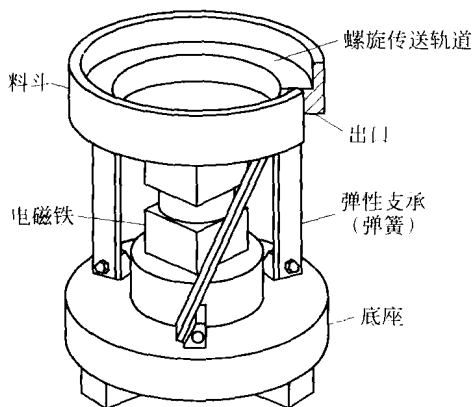


图 1.92 振动给料机

- 1.94* 图 1.93(a)所示的热交换器可以简化为图 1.93(b)所示的模型来进行振动分析。求管的横截面积使热交换器在轴向的刚度超过 $200 \times 10^6 \text{ N/m}$, 切向刚度超过 $20 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$ 。假设各管的长度、截面相同, 在壳体内均匀分布。

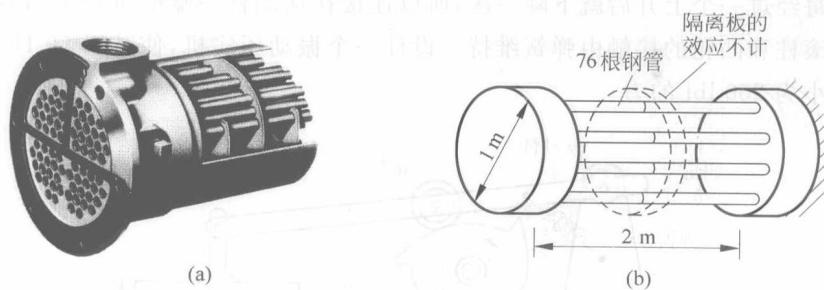


图 1.93 热交换器

(a) 实物; (b) 模型



牛顿(Sir Isaac Newton, 1642—1727), 英国自然哲学家、剑桥大学数学教授、英国皇家学会主席。他于 1687 年出版的论及物体运动规律和条件的《自然哲学的数学原理》(*Principia Mathematica*)一书, 被认为是当时最伟大的科学巨著。其关于力、质量和动量的定义以及三大运动定律的相继出现, 构成了动力学理论的基石。在国际单位制中, 力的单位牛顿(N)就是用他的名字命名的。

(照片引自: Smith D E. History of Mathematics, Vol. 1—General Survey of the History of Elementary Mechanics. New York: Dover Publications, Inc., 1958)

第 2 章 单自由度系统的自由振动

2.1 引言

如果一个系统只在初始时受到外界扰动, 例如, 用力将弹簧-质量系统的质量块偏离静平衡位置后突然释放, 或者给质量块以突然一击使之得到一个初速度, 此后并不受到其他力的作用而发生的振动, 称为**自由振动**。秋千受到初始的推动后所作的往复摆动、由于路面的凹凸而引起的自行车在竖直方向的颠簸, 都是自由振动的例子。

图 2.1(a)所示的弹簧-质量系统就是一个最简单的振动系统。由于用一个坐标 x 就可以表示质量块在任意时刻的位置, 因此, 该系统被称为**单自由度系统**。由于质量块不受外力, 因此系统受到初始扰动后将作自由振动。由于质量块在振动过程中没有耗能元件, 因此该运动的振幅将不随时间而改变, 而是一个常量, 这样的系统称为**无阻尼系统**。在工程实际

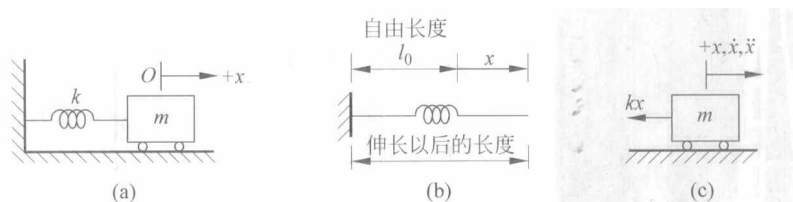


图 2.1 水平布置的弹簧-质量系统

中,除非是在真空环境,自由振动的振幅都会随着时间而逐渐减小,这是由于受到周围介质(如空气)的阻碍作用所致。这时系统的振动称为**有阻尼振动**。单自由度系统的无阻尼自由振动和有阻尼自由振动是以后讨论其他复杂振动问题的基础。

许多机械或结构系统都可以简化为单自由度系统。在许多实际系统中,质量都是分散的,但为了简化分析,可以将这些质量用一个在某一点处的集中质量来近似代替。同样,系统的弹性(也是分散的)则可以理想化为一个弹簧。以图 1.22 所示的凸轮顶杆机构为例(例 1.7),各种质量用等效质量 m_{eq} 代替。从动件推杆、摇臂、阀杆和阀门弹簧都是有弹性的,它们可用一个弹簧刚度为 k_{eq} 的等效弹簧来替代。因此,该凸轮顶杆机构理想化为一个单自由度的弹簧-质量系统,如图 2.2 所示。

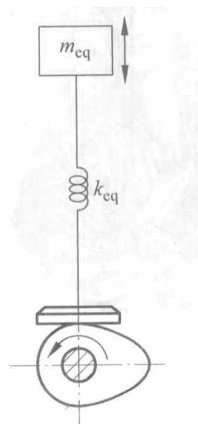


图 2.2 图 1.22 中凸轮-从动杆系统的等效弹簧-质量系统

与此类似,图 2.3 所示的结构可以看成是一个固定在地面上的悬臂梁。为了研究它的横向振动,可以把上端的质量当作一个集中质量,把起支承作用的结构近似为一个弹簧,从而得到一个如图 2.4 所示的单自由度系统模型。图 2.5(a) 中的建筑框架也可以简化为一个如图 2.5(b) 所示的弹簧-质量系统。在这种情况下,由于弹簧系数 k 仅仅是力与偏离位移的比值,因此可以由支柱的几何和材料性质来确定。若支柱的质量可以忽略,那么简化系统中的质量就等于楼板的质量。



图 2.3 针形空间结构

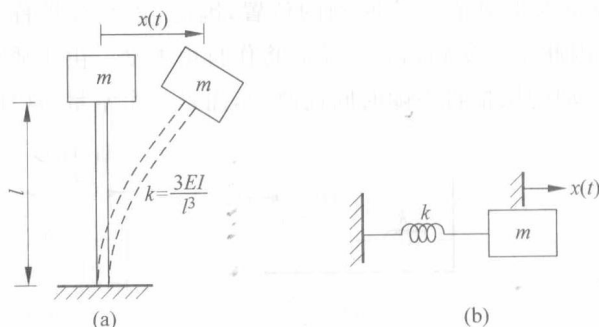


图 2.4 高耸结构模型化为一个弹簧-质量系统

(a) 高耸结构的理想化模型; (b) 等效弹簧-质量系统

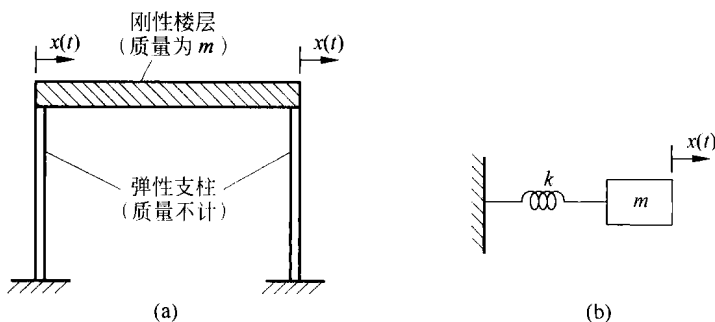


图 2.5 建筑框架的理想化模型

(a) 建筑框架; (b) 等效弹簧-质量系统

2.2 无阻尼平动系统的自由振动

2.2.1 根据牛顿第二定律建立系统的运动微分方程

可以运用牛顿第二定律,建立振动系统的运动微分方程。具体步骤如下:

(1) 选择合适的坐标系来描述系统中质量块(刚体)的位置。一般来说,用直线坐标来描述集中质量或刚体的直线运动;用角坐标来描述刚体的转动。

(2) 确定系统的静平衡位置,并以静平衡位置为振动位移的坐标原点。

(3) 给质量块(或刚体)一个正向位移和正向速度。画出此时质量块(或刚体)的受力图。标明所有的主动力和约束反力。

(4) 对质量块(或刚体)运用牛顿第二定律列方程。牛顿第二定律可表述为:物体动量的变化量等于物体所受的合外力。因此,质量块 m 在合力 $F(t)$ 的作用下沿其方向产生位移 $x(t)$ 时,二者存在关系

$$F(t) = \frac{d}{dt} \left(m \frac{dx(t)}{dt} \right)$$

如果质量 m 是常量,则该方程可简化为

$$F(t) = m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = m\ddot{x} \quad (2.1)$$

式中, \ddot{x} 是质量块的加速度, $\ddot{x} = \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$ 。方程(2.1)表明,作用在质量块上的合外力等于质量乘以加速度。对于绕固定轴转动的刚体,牛顿定律给出

$$M(t) = J\ddot{\theta} \quad (2.2)$$

式中, M 是刚体所受的合力矩; $\ddot{\theta} = d^2 \theta(t)/dt^2$, θ 和 $\ddot{\theta}$ 分别是角位移和角加速度。方程(2.1)或

方程(2.2)就是振动系统的运动微分方程。

下面根据以上步骤讨论图 2.1(a)所示的单自由度无阻尼系统。这里认为质量块由不受摩擦力的小轮子支承,可以在水平方向上往复平动。当质量块相对于平衡位置有一个 $+x$ 的位移时,弹簧的拉力是 kx ,质量块的受力简图如图 2.1(c)所示。由方程(2.1)可得质量块 m 的运动微分方程为

$$F(t) = -kx = m\ddot{x}$$

或

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (2.3)$$

2.2.2 用其他方法建立系统的运动微分方程

在 1.3 节中曾提到振动系统的运动微分方程可以用多种不同的方法得到。在这一部分,将分别用达朗贝尔原理、虚位移原理和能量守恒定律来建立振动系统的运动微分方程。

1. 达朗贝尔原理

运动微分方程(2.1)和方程(2.2)可以写成如下形式:

$$F(t) - m\ddot{x} = 0 \quad (2.4a)$$

$$M(t) - J\ddot{\theta} = 0 \quad (2.4b)$$

如果把 $-m\ddot{x}$ 和 $-J\ddot{\theta}$ 分别看成是力和力矩,那么以上两个方程可以看成是平衡方程。这个非真实的力(或力矩)称为惯性力(或惯性力矩)。式(2.4a)和式(2.4b)所表示的这种形式上的平衡方程称为动平衡方程。它们称为达朗贝尔原理。对图 2.1(c)所示的系统应用达朗贝尔原理得到的运动微分方程为

$$-kx - m\ddot{x} = 0$$

或

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (2.3)$$

2. 虚位移原理

虚位移原理可以表述为:“如果在一组力作用下处于平衡状态的系统发生了一个虚位移,那么所有力所做虚功的和为零”。这里的虚位移是指在约束允许条件下的假想的瞬时(即与时间变化无关的)微小位移。虚功是指所有力在虚位移上所做的功,对动力系统而言,包括惯性力做的功。

考虑图 2.6(a)所示的弹簧-质量系统,图中的 x 表示质量块的位移。图 2.6(b)是质量块的受力图,包括约束力和惯性力。当质量块有一虚位移 δx 时,全部力所做的虚功可以通过下面的方法计算。

弹簧力所做的虚功 $= \delta W_s = -(kx)\delta x$, 惯性力所做的虚功 $= \delta W_i = -(m\ddot{x})\delta x$ 。令¹⁾虚功

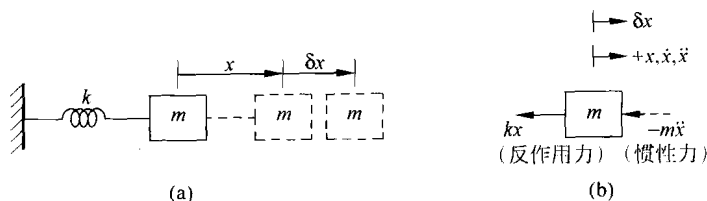


图 2.6 具有虚位移的质量块

(a) 发生位移 x 的质量块; (b) 质量块受力简图

之和等于零,得

$$-m\ddot{x}\delta x - kx\delta x = 0 \quad (2.5)$$

因为虚位移可以是任意的微量,即 $\delta x \neq 0$,所以由方程(2.5)可以得到弹簧-质量系统的运动微分方程为

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (2.3)$$

3. 能量守恒原理

如果一个系统没有由于摩擦或其他消耗能量的非弹性元件引起的能量损耗,那么称这个系统是保守的。如果该系统除了重力和其他有势力外,其他外力不做功,那么这个系统的总能量守恒。对于一个无阻尼的振动系统来说,由于质量块具有速度,而储存了动能 T ,由于弹簧有弹性变形,而具有势能 U ,因此动能与势能之和为常量,即 $T+U=\text{常量}$,或

$$\frac{d}{dt}(T+U) = 0 \quad (2.6)$$

由于

$$\text{动能 } T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad (2.7)$$

$$\text{势能 } U = \frac{1}{2}kx^2 \quad (2.8)$$

将式(2.7)和式(2.8)代入式(2.6)可得

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (2.3)$$

2.2.3 铅垂方向上弹簧-质量系统的运动微分方程

现在研究图 2.7(a)所示的弹簧-质量系统。弹簧上端固定,下端与质量块相连。系统静止时质量块所处的位置称为**静平衡位置**。此时向上的弹簧拉力与向下的重力相等。此时弹簧的长度为 $L_0 + \delta_{st}$,其中静伸长 δ_{st} 是由质量块的重力引起的。由图 2.7(a)可得

$$W = mg = k\delta_{st} \quad (2.9)$$

其中, g 是重力加速度。现在让质量块相对于平衡位置移动一距离 $+x$ 。那么弹簧力为 $-k(x + \delta_{st})$,如图 2.7(c)所示。由牛顿第二定律可得

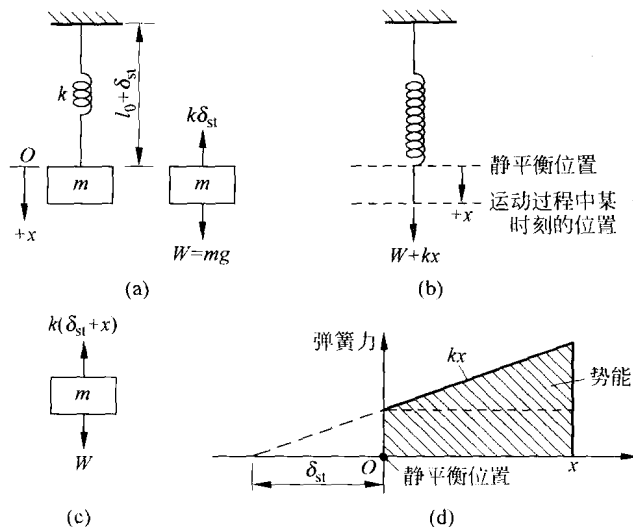


图 2.7 竖直布置的弹簧-质量系统

$$m\ddot{x} = -k(x + \delta_{st}) + W$$

由于 $k\delta_{st} = W$, 故得

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (2.3)$$

不难看出, 式(2.3)与式(2.10)是相同的。这表明当质量块在竖直方向上运动时, 如果以静平衡位置为坐标原点, 在列质量块的运动微分方程时就不用考虑重力。

图 2.7 所示系统的运动微分方程, 即式(2.10)同样可以用达朗贝尔原理、虚位移原理或能量守恒定律来求得。以利用能量守恒定律为例, 系统动能 T 的表达式与式(2.7)相同。但在求系统势能 U 的表达式时则要考虑质量块的重量。质量块在静平衡位置(即 $x=0$)时弹簧的拉力是 mg 。当弹簧有变形 x 时, 其势能的增量为 $mgx + \frac{1}{2}kx^2$ (见图 2.7(d))。另一方面, 由于质量块下降了 x , 重力势能的减少为 mgx , 因此以静平衡位置为零势能点, 则系统最终的势能为

$$U = \text{弹簧势能} + \text{重力势能的改变量} = mgx + \frac{1}{2}kx^2 - mgx = \frac{1}{2}kx^2 \quad (2.10)$$

由于动能 T 和势能 U 的表达式都没有改变, 因此应用能量守恒定律可以求出相同的运动微分方程, 即方程(2.3)。

2.2.4 运动微分方程的解

方程(2.3)的解可以通过假设

$$x(t) = Ce^{st} \quad (2.11)$$

求得。其中, C 和 s 是待定常数。将式(2.11)代入式(2.3)得

$$C(ms^2 + k) = 0$$

因为 C 不为零, 所以得

$$ms^2 + k = 0 \quad (2.12)$$

即

$$s = \pm \left(-\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}} = \pm i\omega_n \quad (2.13)$$

其中, $i = (-1)^{\frac{1}{2}}$ 。

$$\omega_n = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.14)$$

称方程(2.12)为微分方程(2.3)的**特征方程**。由式(2.13)求得的 s 值称为该问题的**特征值**。因为 s 的两个值都满足方程(2.12), 所以方程(2.3)的通解可以表示为

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_n t} + C_2 e^{-i\omega_n t} \quad (2.15)$$

其中, C_1 和 C_2 为常数。根据欧拉公式:

$$e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t$$

式(2.15)可写成

$$x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t \quad (2.16)$$

其中, A_1 和 A_2 为两个新的常数。 C_1 和 C_2 或 A_1 和 A_2 这些常数可由系统的两个初始条件决定。确定这些常数所需的初始条件的个数与控制微分方程的阶数相同。如果位移 $x(t)$ 、速度 $\dot{x}(t) = (dx/dt)(t)$ 在 $t=0$ 时的值分别为 x_0 和 \dot{x}_0 , 由式(2.16)可得

$$\begin{aligned} x(t=0) &= A_1 = x_0 \\ \dot{x}(t=0) &= \omega_n A_2 = \dot{x}_0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

因此 $A_1 = x_0$, $A_2 = \dot{x}_0 / \omega_n$ 。进而得到方程(2.3)的解为

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t \quad (2.18)$$

2.2.5 简谐运动

式(2.15)、式(2.16)和式(2.18)都是时间的简谐函数。该运动对于质量块的静平衡位置是对称的。当质量块经过静平衡位置时, 速度的值最大, 加速度的值为零。而在位移最大位置, 速度的值为零, 加速度的值最大。由于这种运动为简谐运动, 所以弹簧-质量系统称为**简谐振子**。式(2.14)所定义的 ω_n 是振动系统的**固有圆频率**。式(2.16)还可以写成其他形式。令

$$\begin{cases} A_1 = A \cos \phi \\ A_2 = A \sin \phi \end{cases} \quad (2.19)$$

其中, A 和 ϕ 是新的常数, 可用 A_1 和 A_2 表示为

$$A = (A_1^2 + A_2^2)^{\frac{1}{2}} = \left[x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \text{振幅}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{A_2}{A_1}\right) = \arctan\left(\frac{\dot{x}_0}{x_0 \omega_n}\right) = \text{相角} \quad (2.20)$$

将式(2.19)代入式(2.16),可得

$$x(t) = A \cos(\omega_n t - \phi) \quad (2.21)$$

若令

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= A_0 \sin \phi_0 \\ A_2 &= A_0 \cos \phi_0 \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

式(2.16)还可以表示为

$$x(t) = A_0 \sin(\omega_n t + \phi_0) \quad (2.23)$$

其中

$$A_0 = A = \left[x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.24)$$

$$\phi_0 = \arctan\left(\frac{x_0 \omega_n}{\dot{x}_0}\right) \quad (2.25)$$

下面利用图 2.8(a)说明简谐运动的特点。如果 \mathbf{A} 代表一个大小为 A 的向量,它与竖直

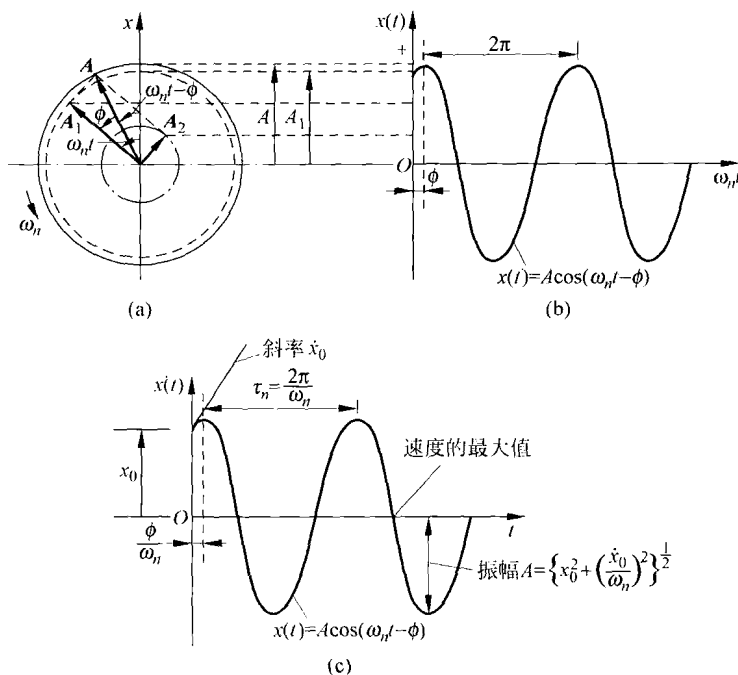


图 2.8 简谐运动的图形表示

轴 x 的夹角为 $\omega_n t - \phi$, 那么振动方程的解即式(2.21), 可以由向量 \mathbf{A} 在 x 轴上的投影来表示。由式(2.19)给出的两个常数 A_1, A_2 就是向量 \mathbf{A} 在两个互相垂直轴上的投影, 这两个轴与向量 \mathbf{A} 的夹角分别是 ϕ 和 $-\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)$ 。因为角度 $\omega_n t - \phi$ 是时间的线性函数, 它随着时间线性增加, 因此整个图形以角速度 ω_n 沿逆时针方向旋转。当向量 \mathbf{A} 旋转时, 其在 x 轴上的投影就会按简谐规律变化。每转过 2π 弧度, 运动就会重复一次。向量 \mathbf{A} 的投影也就是 $x(t)$, 已被作为 $\omega_n t$ 和 t 的函数用图形表示出来, 分别如图 2.8(b) 和 (c) 所示。相角 ϕ 可以看成是从初始位置到第一个波峰之间的角度。

下面把弹簧-质量系统的一些结论总结如下:

(1) 如果弹簧-质量系统是在铅垂方向上, 如图 2.7(a) 所示, 由于固有圆频率可以表示为

$$\omega_n = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.26)$$

而弹簧刚度 k 可以由质量块 m 表示为

$$k = \frac{W}{\delta_{st}} = \frac{mg}{\delta_{st}} \quad (2.27)$$

所以将式(2.27)代入式(2.14)得

$$\omega_n = \left(\frac{g}{\delta_{st}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.28)$$

因此, 固有频率即每秒钟完成运动循环的次数和固有周期可以表示为

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{g}{\delta_{st}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.29)$$

$$T_n = \frac{1}{f_n} = 2\pi \left(\frac{\delta_{st}}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.30)$$

即当质量块在铅垂方向上振动时, 通过测量弹簧的静变形 δ_{st} 就可以计算系统的固有频率。

(2) 由式(2.21)可得质量块 m 的速度 $\dot{x}(t)$ 和加速度 $\ddot{x}(t)$ 的表达式为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{dx}{dt}(t) = -\omega_n A \sin(\omega_n t - \phi) = \omega_n A \cos\left(\omega_n t - \phi + \frac{\pi}{2}\right) \\ \ddot{x}(t) &= \frac{d^2x}{dt^2}(t) = -\omega_n^2 A \cos(\omega_n t - \phi) = \omega_n^2 A \cos(\omega_n t - \phi + \pi) \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

式(2.31)说明, 速度的相位超前位移的相位 $\frac{\pi}{2}$, 加速度的相位超前位移的相位 π 。

(3) 如果初始位移 x_0 是零, 那么式(2.21)变为

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \cos\left(\omega_n t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t \quad (2.32)$$

如果初始速度 \dot{x}_0 是零, 那么结果变为

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t \quad (2.33)$$

(4) 单自由度系统的响应还可以在位移(x)-速度(\dot{x})平面上表示,这被称为状态空间或相平面。考虑式(2.21)所给的位移以及与之相对应的速度:

$$x(t) = A\cos(\omega_n t - \phi)$$

或写作

$$\cos(\omega_n t - \phi) = \frac{x}{A}$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega_n \sin(\omega_n t - \phi) \quad (2.34)$$

或写作

$$\sin(\omega_n t - \phi) = -\frac{\dot{x}}{A\omega_n} = -\frac{y}{A} \quad (2.35)$$

其中, $y = \dot{x}/\omega_n$ 。将式(2.34)与式(2.35)两边平方再相加,可得

$$\cos^2(\omega_n t - \phi) + \sin^2(\omega_n t - \phi) = 1$$

或写作

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2} = 1 \quad (2.36)$$

式(2.36)的图形在(x, y)平面上是一个圆,如图 2.9(a)所示,它是在相平面或状态空间上表示一个无阻尼系统的自由振动。圆的半径 A 是由振动的初始条件决定的。注意:式(2.36)在(x, \dot{x})平面上的图形为椭圆,如图 2.9(b)所示。

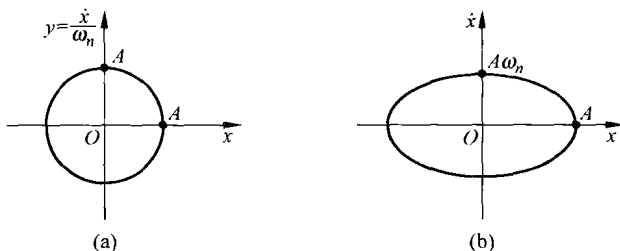


图 2.9 无阻尼系统的相平面表示

例 2.1 如图 2.10(a)所示,水塔塔身的高度为 300 ft,材料为钢筋混凝土,横截面的内、外径分别为 8 ft 和 10 ft,装满水时水塔的重量为 6×10^5 lbf。假设钢筋混凝土的弹性模量为 4×10^6 lbf/in²,并忽略塔身的质量。求(1)水塔横向振动的固有频率和周期。(2)由于 10 in 的横向初始位移而引起的水塔的振动响应。(3)水塔速度和加速度的最大值。

解: 假设水塔是一个集中质量,塔身为等截面且其质量可忽略不计,因此系统可简化为在自由端具有一个集中重量的悬臂梁,如图 2.10(b)所示。

(1) 根据材料力学的结果,由于横向载荷 P 而引起的自由端的变形为 $Pl^3/3EI$,所以

$$k = \frac{P}{\delta} = \frac{3EI}{l^3}$$

由于 $l = 3600$ in, $E = 4 \times 10^6$ lbf/in², $I = \frac{\pi}{64}(d_o^4 - d_i^4) = \frac{\pi}{64}(120^4 - 96^4) = 600.9554 \times 10^4$ (in⁴)

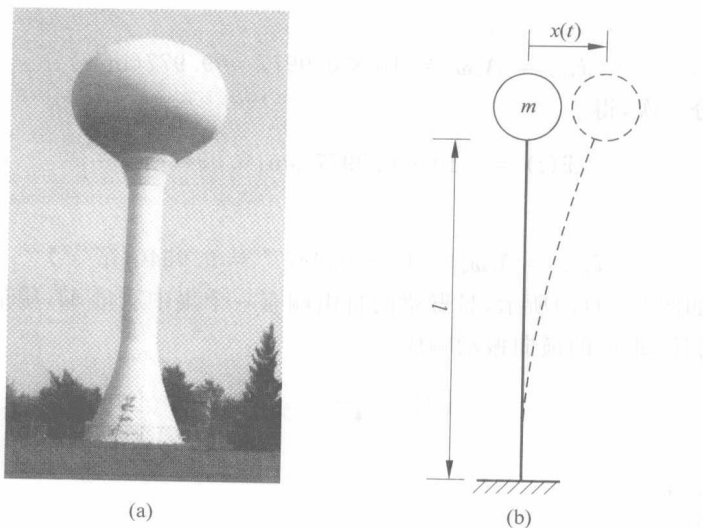


图 2.10 压力水塔(照片版权归 West Lafayette Water Company 所有)

所以

$$k = \frac{3 \times 4 \times 10^6 \times 600.9554 \times 10^4}{3600^3} = 1545.6672 (\text{lbf/in})$$

因此水塔横向振动的固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1545.6672 \times 386.4}{6 \times 10^5}} = 0.9977 (\text{rad/s})$$

而相应的周期为

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{0.9977} = 6.2977 (\text{s})$$

(2) 根据初始位移 $x_0 = 10 \text{ in}$ 和初始速度 $\dot{x}_0 = 0$, 由式(2.23), 水塔的简谐响应为

$$x(t) = A_0 \sin(\omega_n t + \phi_0)$$

式中, 振幅和相角分别由以下二式决定:

$$A_0 = \left[x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \right)^2 \right]^{1/2} = x_0 = 10 (\text{in})$$

$$\phi_0 = \arctan\left(\frac{x_0 \omega_n}{0}\right) = \frac{\pi}{2}$$

所以

$$x(t) = 10 \sin\left(0.9977t + \frac{\pi}{2}\right) = 10 \cos 0.9977t (\text{in}) \quad (\text{E. 1})$$

(3) 对式(E.1)微分一次, 得

$$\dot{x}(t) = 10 \times 0.9977 \cos\left(0.9977t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{E. 2})$$

所以

$$\dot{x}_{\max} = A_0 \omega_n = 10 \times 0.9977 = 9.977 (\text{in/s})$$

对式(E.2)微分一次,得

$$\ddot{x}(t) = -10 \times 0.9977^2 \sin\left(0.9977t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{E.3})$$

所以

$$\ddot{x}_{\max} = A_0 \omega_n^2 = 10 \times 0.9977^2 = 9.9540 (\text{in/s}^2)$$

例 2.2 如图 2.11(a)所示,悬臂梁的自由端有一个集中质量 M ,质量 m 自高度处落下与 M 作塑性碰撞,求梁的横向振动响应。

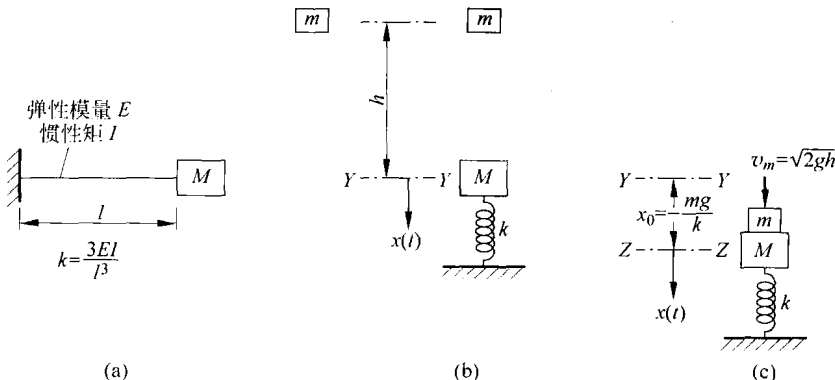


图 2.11 冲击响应

解: 质量 m 自高度处落下与 M 碰撞前的速度为 $v_m = \sqrt{2gh}$, g 是重力加速度。由于两者作塑性碰撞,根据动量守恒,碰撞后两者的共同速度 \dot{x}_0 为

$$mv_m = (M+m) \dot{x}_0$$

即

$$\dot{x}_0 = \left(\frac{m}{M+m}\right)v_m = \left(\frac{m}{M+m}\right)\sqrt{2gh} \quad (\text{E.1})$$

如图 2.11(c)所示, $(M+m)$ 共同作用下的静平衡位置在原载荷 M 作用下静平衡位置以下 mg/k 。悬臂梁的刚度为 $k = 3EI/l^3$ 。以 $(M+m)$ 共同作用下的静平衡位置为振动位移的坐标原点,则该问题的初始条件为

$$x_0 = -\frac{mg}{k}, \quad \dot{x}_0 = \left(\frac{m}{M+m}\right)\sqrt{2gh} \quad (\text{E.2})$$

所以,由于 m 的冲击而引起的梁的横向振动响应为

$$x(t) = A \cos(\omega_n t - \phi)$$

其中

$$A = \left[x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad \phi = \arctan \left(\frac{\dot{x}_0}{x_0 \omega_n} \right), \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{M+m}} = \sqrt{\frac{3EI}{l^3(M+m)}}$$

例 2.3 正方形截面(5 mm×5 mm)两端固定梁的长度为 $l=1$ m, 在其中点固结一个 2.3 kg 的集中质量, 如果其横向振动的固有频率为 30 rad/s, 求梁材料的弹性模量 E 。

解: 忽略梁的自重, 则其横向振动固有频率的表达式为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{E. 1})$$

其中

$$k = \frac{192EI}{l^3} \quad (\text{E. 2})$$

而横截面的惯性矩为

$$I = \frac{1}{12} (5 \times 10^{-3}) (5 \times 10^{-3})^3 = 0.5208 \times 10^{-10} (\text{m}^4)$$

由式(E. 1)和式(E. 2)得

$$k = \frac{192EI}{l^3} = m\omega_n^2$$

所以

$$E = \frac{m\omega_n^2 l^3}{192I} = \frac{2.3 \times 30.0^2 \times 1.0^3}{192(0.5208 \times 10^{-10})} = 207.0132 \times 10^9 (\text{N/m}^2)$$

例 2.4 如图 2.12(a)所示, 消防车的座舱位于伸缩臂的端部。座舱和人的总重量为 2000 N, 求座舱在竖直方向振动的固有频率。已知材料的弹性模量为 $E=2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, $l_1=l_2=l_3=3 \text{ m}$, 各段横截面的面积分别为 $A_1=20 \text{ cm}^2$, $A_2=10 \text{ cm}^2$, $A_3=5 \text{ cm}^2$ 。

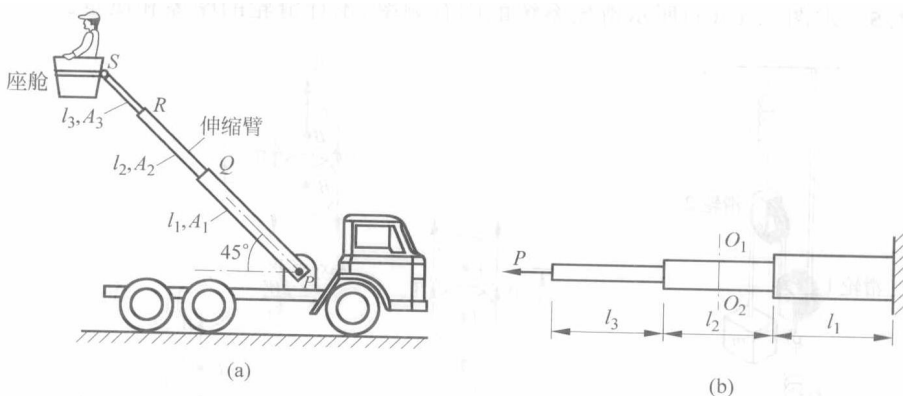


图 2.12 消防车的伸缩臂

解: 为求系统振动的固有频率, 首先基于单自由度系统模型确定伸缩臂在竖直方向的等效刚度。假设可以忽略伸缩臂的质量, 且伸缩臂只产生轴向变形(无弯曲)。由于任一横截面上的内力等于作用在端部的轴向载荷, 所以伸缩臂的轴向刚度为

$$\frac{1}{k_b} = \frac{1}{k_{b1}} + \frac{1}{k_{b2}} + \frac{1}{k_{b3}} \quad (\text{E. 1})$$

其中, k_{bi} 代表伸缩臂第 i 段的轴向刚度:

$$k_{bi} = \frac{A_i E_i}{l_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

根据已知数据可得

$$k_{b1} = \frac{(20 \times 10^{-4})(2.1 \times 10^{11})}{3} = 14 \times 10^7 (\text{N/m})$$

$$k_{b2} = \frac{(10 \times 10^{-4})(2.1 \times 10^{11})}{3} = 7 \times 10^7 (\text{N/m})$$

$$k_{b3} = \frac{(5 \times 10^{-4})(2.1 \times 10^{11})}{3} = 3.5 \times 10^7 (\text{N/m})$$

所以

$$\frac{1}{k_b} = \frac{1}{14 \times 10^7} + \frac{1}{7 \times 10^7} + \frac{1}{3.5 \times 10^7} = \frac{1}{2 \times 10^7}$$

即

$$k_b = 2 \times 10^7 \text{ N/m}$$

伸缩臂在竖直方向的刚度可按式确定:

$$k = k_b \cos^2 45^\circ = 10^7 (\text{N/m})$$

故座舱在竖直方向振动的固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10^7 \times 9.81}{2000}} = 221.4723 (\text{rad/s})$$

例 2.5 求图 2.13(a) 所示滑轮系统的固有频率, 不计滑轮的摩擦和质量。

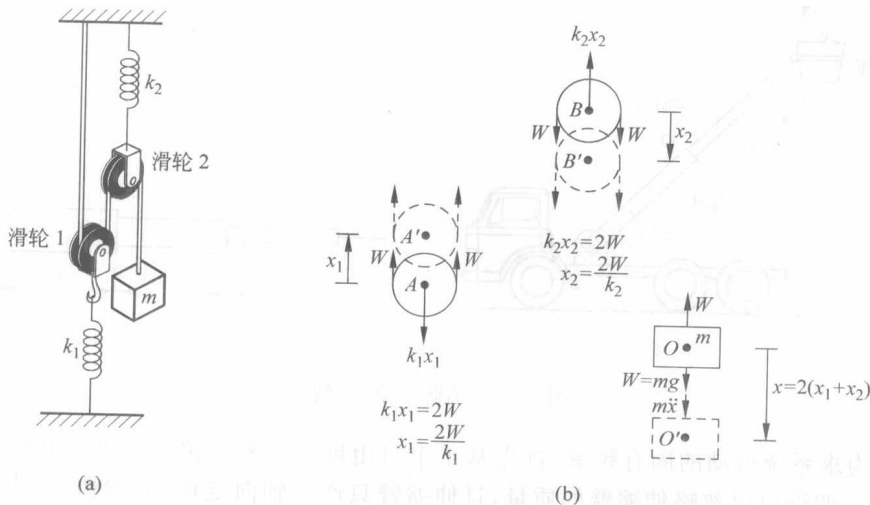


图 2.13 滑轮系统

解: 为求系统振动的固有频率,首先基于单自由度系统模型确定等效刚度。由于不计滑轮的摩擦和滑轮质量,所以绳子的张力为一常量,等于质量块 m 的重量 W 。根据滑轮和质量块的静力平衡(见图 2.13(b))可知,作用在滑轮 1 上的向上的力为 $2W$,作用在滑轮 2 上的向下的力也为 $2W$ 。因此滑轮 1 的中心向上移动的距离为 $2W/k_1$,滑轮 2 的中心向下移动的距离为 $2W/k_2$ 。所以质量块 m 的位移为

$$2\left(\frac{2W}{k_1} + \frac{2W}{k_2}\right)$$

如果用系统的等效弹簧刚度表示,则有

$$\frac{W}{k_{\text{eq}}} = 4W\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) = \frac{4W(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}$$

即

$$k_{\text{eq}} = \frac{k_1 k_2}{4(k_1 + k_2)} \quad (\text{E. 1})$$

使质量块有一个从静平衡位置量起的位移 x ,其运动微分方程为

$$m\ddot{x} + k_{\text{eq}}x = 0 \quad (\text{E. 2})$$

所以振动的固有频率为

$$\omega_n = \left(\frac{k_{\text{eq}}}{m}\right)^{1/2} = \left[\frac{k_1 k_2}{4m(k_1 + k_2)}\right]^{1/2} \text{ rad/s} \quad (\text{E. 3})$$

或

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}\right]^{1/2} \text{ cycles/s} \quad (\text{E. 4})$$

2.3 无阻尼扭转系统的自由振动

如果刚体绕着某一特定的参考轴摆动时,对应着弹性元件的扭转变形,则将这种运动称为**扭振**。此时,刚体的位移要用角坐标描述。在扭振问题中,恢复力矩可能是由于弹性部件的扭转引起的,也可能是由于不平衡的力矩或力偶矩引起的。

如图 2.14 所示的圆盘,其转动惯量为 J_0 ,安装在圆杆的一端,而圆杆的另一端固定。设圆盘绕杆轴转过的角度为 θ , θ 也表示杆的扭转角。由圆截面杆的扭转理论可知

$$M_t = \frac{GI_0}{l} \quad (2.37)$$

其中, M_t 是引起扭转角 θ 的扭矩; G 是剪切弹性模量; l 是杆长; I_0 是杆横截面的极惯性矩,大小为

$$I_0 = \frac{\pi d^4}{32} \quad (2.38)$$

其中, d 为杆横截面的直径。如果圆盘由静平衡位置转动了角度 θ ,那么杆将产生恢复力矩

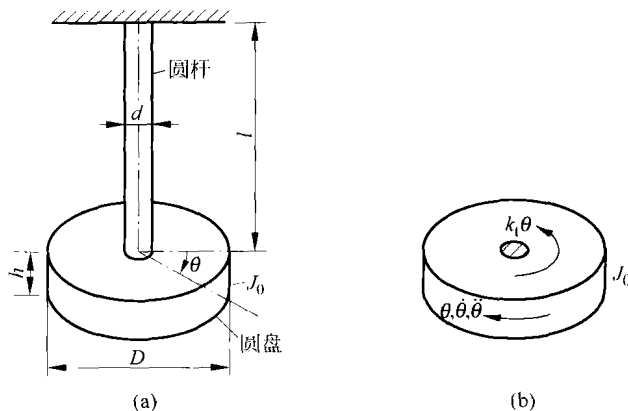


图 2.14 圆盘的扭转振动

M_t 。因此,就像受扭弹簧一样,杆的弹簧刚度为

$$k_t = \frac{M_t}{\theta} = \frac{GI_0}{l} = \frac{\pi Gd^4}{32l} \quad (2.39)$$

2.3.1 运动微分方程

圆盘扭振的运动微分方程可以用牛顿第二定律或在 2.2.2 节中讨论的方法求得。圆盘的受力如图 2.14(b)所示,应用牛顿第二定律,可得运动微分方程:

$$J_0 \ddot{\theta} + k_t \theta = 0 \quad (2.40)$$

若用质量、线位移和弹簧常数分别代替上式中的转动惯量、角位移和扭簧的刚度,则上式与方程(2.3)完全一样。因此,扭振系统的固有角频率为

$$\omega_n = \left(\frac{k_t}{J_0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.41)$$

周期和频率分别为

$$\tau_n = 2\pi \left(\frac{J_0}{k_t} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.42)$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{k_t}{J_0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.43)$$

对此类扭振系统还应注意以下几点:

(1) 如果圆盘是安装在非圆截面杆的一端,那么也可以找到一个近似的扭簧刚度。

(2) 圆盘的转动惯量为 $J_0 = \frac{\rho h \pi D^4}{32} = \frac{WD^2}{8g}$ 。其中, ρ 是材料的质量密度; h , D 和 W 分别是圆盘的厚度、直径和重量。

(3) 图 2.14 所示的系统一般称为扭摆。它的重要应用之一是机械式钟表,其中的棘轮

把微小扭摆的规则振动转变成表针的运动。

2.3.2 运动微分方程的解

方程(2.40)的通解可以像求解方程(2.3)那样得到。令

$$\theta(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t \quad (2.44)$$

其中, ω_n 由式(2.41)给出; A_1 和 A_2 则由初始条件决定。如果

$$\begin{aligned} \theta(t=0) &= \theta_0 \\ \dot{\theta}(t=0) &= \frac{d\theta}{dt}(t=0) = \dot{\theta}_0 \end{aligned} \quad (2.45)$$

则可得

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \theta_0 \\ A_2 &= \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_n} \end{aligned} \right\} \quad (2.46)$$

不难看出, 式(2.44)描述的也是简谐运动。

例 2.6 任何悬挂于不经过质心的旋转轴的刚体在其自身重力作用下都会绕旋转轴摆动, 这样的物理系统称为**复摆**。求复摆微幅摆动的固有频率。

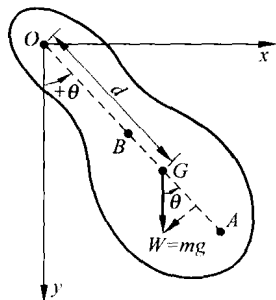


图 2.15 复摆

解: 如图 2.15 所示, 设悬挂点在 O 处, G 表示复摆的质心。当其在 xy 平面内摆动时, 可以选 θ 为广义坐标。用 d 表示悬挂点到质心的距离, J_0 表示刚体对旋转轴的转动惯量。当摆动的角位移为 θ 时, 由于重力 W 而引起的恢复力矩为 $Wd \sin \theta$, 系统的运动微分方程为

$$J_0 \ddot{\theta} + Wd \sin \theta = 0 \quad (E.1)$$

这是一个二阶非线性的常微分方程。虽然能够得到其精确的解析解, 但对于大多数非线性的常微分方程而言, 却不能得到它们的精确解析解。可以通过下列两种方法之一得到它们的近似解: 其一是数值求解; 其二是对方程(E.1)进行线性化。事实上, 对于微幅摆动有 $\sin \theta \approx \theta$,

故式(E.1)可以近似为如下线性方程:

$$J_0 \ddot{\theta} + Wd \theta = 0 \quad (E.2)$$

由此可得复摆的固有角频率为

$$\omega_n = \left(\frac{Wd}{J_0} \right)^{1/2} = \left(\frac{mgd}{J_0} \right)^{1/2} \quad (E.3)$$

将式(E.3)与单摆的固有频率 $\omega_n = (g/l)^{1/2}$ 比较, 可知等效单摆长度(参见习题 2.61)为

$$l = \frac{J_0}{md} \quad (E.4)$$

用 mk_0^2 代替 J_0 (其中 k_0 为关于 O 点的回转半径), 则式(E.3)和式(E.4)分别成为

$$\omega_n = \left(\frac{gd}{k_0^2} \right)^{1/2} \quad (\text{E. 5})$$

$$l = \frac{k_0^2}{d} \quad (\text{E. 6})$$

如果 k_G 表示对质心 G 的回转半径, 由于存在下列关系:

$$k_0^2 = k_G^2 + d^2 \quad (\text{E. 7})$$

所以, 式(E. 6)成为

$$l = \frac{k_G^2}{d} + d \quad (\text{E. 8})$$

将 \overline{OG} 延长至 A 点, 使得

$$\overline{GA} = \frac{k_G^2}{d} \quad (\text{E. 9})$$

则式(E. 8)成为

$$l = \overline{GA} + d = \overline{OA} \quad (\text{E. 10})$$

利用式(E. 5), 固有频率的表达式为

$$\omega_n = \left(\frac{g}{k_0^2/d} \right)^{1/2} = \left(\frac{g}{l} \right)^{1/2} = \left(\frac{g}{\overline{OA}} \right)^{1/2} \quad (\text{E. 11})$$

此式表明, 不管复摆是悬挂于 O 点还是悬挂于 A 点, 其固有频率是一样的。 A 点称为复摆的撞击中心。

复摆及其撞击中心的概念在许多实际问题中都有应用, 下面是其中的一些例子。

(1) 可以使锤的撞击中心位于锤头, 而旋转中心在手柄上。此时作用于锤头的冲击力不会在手柄上引起任何法向反作用力(图 2.16(a))。

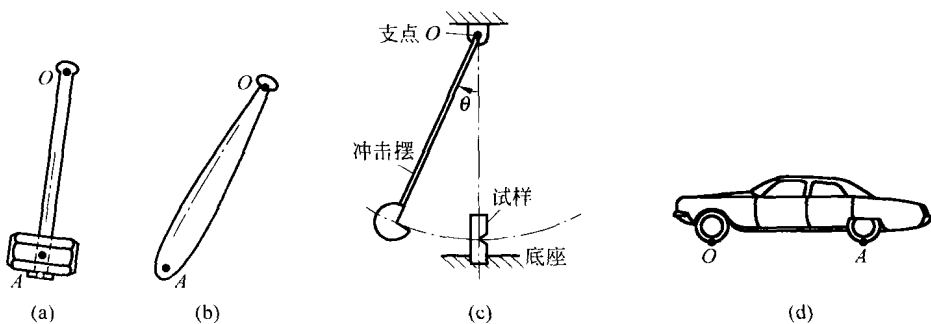


图 2.16 撞击中心的应用

(2) 打棒球时, 如果能使球棒的撞击中心与球接触, 而手可看作是球棒的旋转中心, 那么击球手将不会受到与球棒垂直方向上的反作用力(图 2.16(b))。另一方面, 如果击球的部位靠近端部或手握的部位, 击球手就会由于受到与球棒垂直方向上的反作用力而感到疼痛。

(3) 在材料的冲击实验中,要在试样上开一个合适的槽口,并固定在机械的底座上(图 2.16(c)). 从一个标准高度处释放冲击摆,当其通过最低位置时,撞击试样的自由端。如果摆的撞击中心在冲击刃口的附近,就可以减小摆的弯曲变形。此时,摆的悬挂点不会受到任何冲击反作用力。

(4) 当汽车前轮受到一个冲击而产生颠簸时,如果它的撞击中心在后轴附近,乘员就基本上不会感觉到。与此类似,后轮受到一个冲击而产生颠簸时,如果它的撞击中心在前轴附近,乘员也基本上不会感觉到。所以设计时希望车身的振动中心在某一个轴上时,撞击中心要在另一个轴上(图 2.16(d))。

2.4 运动的稳定性条件

图 2.17(a)所示的均质刚性杆,一端铰支,另一端对称地与两个弹簧相连。假设杆的质量是 m ,且当杆在铅垂位置时弹簧无变形。当杆有一个角位移 θ 时,两个弹簧的弹性恢复力都是 $kl\sin\theta$,总的弹性恢复力是 $2kl\sin\theta$ 。重力 $W=mg$ 作用在杆的重心 G ,方向铅垂向下。由于杆绕 O 点转动具有角加速度 $\ddot{\theta}$,故对旋转轴 O 的惯性力矩为 $J_O\ddot{\theta}=(ml^2/3)\ddot{\theta}$ 。因此,杆绕 O 点转动的运动微分方程为

$$\frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} + (2kl\sin\theta)l\cos\theta - W\frac{l}{2}\sin\theta = 0 \quad (2.47)$$

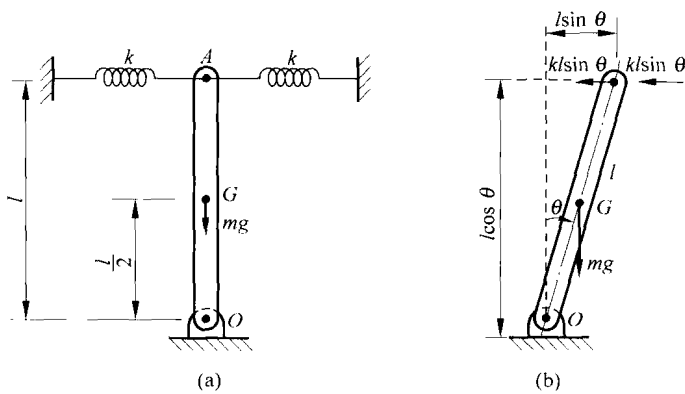


图 2.17 刚性杆的稳定性

对于微幅摆动,方程(2.47)可简化为

$$\frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} + 2kl^2\theta - \frac{Wl}{2}\theta = 0$$

或

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{12kl^2 - 3Wl}{2ml^2} \right)\theta = 0 \quad (2.48)$$

方程(2.48)的解取决于表达式 $(12kl^2 - 3Wl)/2ml^2$ 的正负号,讨论如下。

情形 1 $(12kl^2 - 3Wl)/2ml^2 > 0$ 时,方程(2.48)的解代表稳态振动。具体形式为

$$\theta(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t \quad (2.49)$$

其中, A_1 和 A_2 为常数,且

$$\omega_n = \left(\frac{12kl^2 - 3Wl}{2ml^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.50)$$

情形 2 $(12kl^2 - 3Wl)/2ml^2 = 0$ 时,方程(2.48)变为 $\ddot{\theta} = 0$,积分两次可得

$$\theta(t) = C_1 t + C_2 \quad (2.51)$$

由初始条件 $\theta(t=0) = \theta_0$ 和 $\dot{\theta}(t=0) = \dot{\theta}_0$ 可得方程的解为

$$\theta(t) = \dot{\theta}_0 t + \theta_0 \quad (2.52)$$

式(2.52)说明,角位移以恒定的角速度 $\dot{\theta}_0$ 随时间线性地增加。然而如果 $\dot{\theta}_0 = 0$,式(2.52)则确定了一个静平衡位置 $\theta = \theta_0$ 。这说明杆将保持在它的初始位置 $\theta = \theta_0$ 处。

情形 3 $(12kl^2 - 3Wl)/2ml^2 < 0$ 时,定义

$$\alpha = \left(\frac{3Wl - 12kl^2}{2ml^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

则方程(2.48)的解为

$$\theta(t) = B_1 e^{\alpha t} + B_2 e^{-\alpha t} \quad (2.53)$$

其中, B_1, B_2 是常数。若初始条件为 $\theta(t=0) = \theta_0$ 和 $\dot{\theta}(t=0) = \dot{\theta}_0$, 则式(2.53)成为

$$\theta(t) = \frac{1}{2\alpha} [(\alpha\theta_0 + \dot{\theta}_0)e^{\alpha t} + (\alpha\theta_0 - \dot{\theta}_0)e^{-\alpha t}] \quad (2.54)$$

由式(2.54)可以看出, $\theta(t)$ 随着时间按指数规律增加, 因此这种运动是不稳定的。导致这一结果的物理原因是由于弹簧力产生的恢复力矩(其作用是使杆趋于平衡位置, 大小为 $2kl^2\theta$) 小于重力产生的力矩(其作用是使杆远离平衡位置, 大小为 $-W(l/2)\theta$)。虽然在本节中借助图 2.17 对稳定条件进行了说明, 但在许多工程系统的振动分析中, 类似的稳定条件仍需进行具体分析。

2.5 瑞利能量法

如 2.2.2 节所述, 对于单自由度系统, 可以利用能量方法得到其运动微分方程。本节中将运用能量法来求单自由度系统的固有频率。对无阻尼的振动系统而言, 能量守恒定律也可以这样表示:

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2 \quad (2.55)$$

其中, 下标 1, 2 代表两个不同的时刻。特别地, 可用下标 1 代表质量块通过其静平衡位置的时刻, 并取此刻为零势能位置即 $U_1 = 0$; 用下标 2 代表质量块达到最大位移的时刻, 此时有

动能 $T_2=0$ 。因此式(2.55)变为

$$T_1 + 0 = 0 + U_2 \quad (2.56)$$

如果系统作的是简谐运动,那么 T_1 和 U_2 分别代表了动能 T 和势能 U 的最大值。因此式(2.56)变为

$$T_{\max} = U_{\max} \quad (2.57)$$

这就是瑞利能量法。应用这种方法可以直接求出系统的固有频率。下面通过具体例子进一步说明。

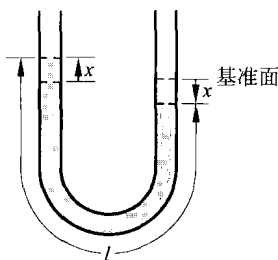


图 2.18 U 形管式压力计

例 2.7 从单缸四冲程柴油机中排出的废气与一个静音器相连。可以利用一个 U 形压力计(见图 2.18)对其中的气体压力进行测量。计算压力计 U 形管的最小长度,以使静音器中压力波动的频率是汞柱振动固有频率的 3.5 倍。发动机的转速为 600 r/min,静音器中压力波动的频率为

$$\frac{\text{汽缸数} \times \text{发动机的转速}}{2}$$

解: 以图 2.18 中的基准面为汞柱的静平衡位置,用 x 表示汞柱自静平衡位置算起的振动位移,势能的变化为

U = 上升汞柱的势能 + 下降汞柱的势能

= 上升汞柱的重量 \times 此段汞柱重心的位移 + 下降汞柱的重量 \times 此段汞柱重心的位移

$$= (A\gamma x) \frac{x}{2} + (A\gamma x) \frac{x}{2} = A\gamma x^2 \quad (\text{E. 1})$$

式中, A 是汞柱的横截面面积; γ 是汞柱单位体积的重量。

动能的变化为

$$T = \frac{1}{2} \times \text{汞的质量} \times \text{速度}^2 = \frac{1}{2} \frac{Al\gamma}{g} \dot{x}^2 \quad (\text{E. 2})$$

式中, l 是汞柱的长度。假设汞柱作简谐运动,即令

$$x(t) = X \cos \omega_n t \quad (\text{E. 3})$$

式中, X 是振幅; ω_n 是固有圆频率。将式(E. 3)代入式(E. 1)和式(E. 2)得

$$U = U_{\max} \cos^2 \omega_n t \quad (\text{E. 4})$$

$$T = T_{\max} \sin^2 \omega_n t \quad (\text{E. 5})$$

式中

$$U_{\max} = A\gamma X^2 \quad (\text{E. 6})$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \frac{A\gamma l \omega_n^2}{g} X^2 \quad (\text{E. 7})$$

令 $U_{\max} = T_{\max}$, 得

$$\omega_n = \left(\frac{2g}{l} \right)^{1/2} \quad (\text{E. 8})$$

$$\begin{aligned}
 \text{静音器中压力波动的频率} &= \frac{1 \times 600}{2} = 300(\text{r/min}) \\
 &= \frac{300 \times 2\pi}{60} = 10\pi(\text{rad/s})
 \end{aligned} \quad (\text{E. 9})$$

所以,压力计中汞柱振动的频率为 $10\pi/3.5=9.0(\text{rad/s})$ 。由式(E.8)得

$$\left(\frac{2g}{l}\right)^{1/2} = 9.0 \quad (\text{E. 10})$$

即

$$l = \frac{2.0 \times 9.81}{9.0^2} = 0.243(\text{m}) \quad (\text{E. 11})$$

例 2.8 讨论图 2.19 所示弹簧-质量系统中弹簧质量对固有频率的影响。

解: 为说明弹簧质量对系统固有频率的影响,将弹簧的动能等效为一个附加质量的动能。用 l 表示弹簧的长度,当质量块具有振动位移 x 时,距悬挂点为 y 的微质量的位移为 $y(x/l)$ 。同理,当质量块具有振动速度 \dot{x} 时,微质量的速度为 $y(\dot{x}/l)$ 。微段 dy 的动能为

$$dT_s = \frac{1}{2} \left(\frac{m_s}{l} dy \right) \left(\frac{y\dot{x}}{l} \right)^2 \quad (\text{E. 1})$$

式中, m_s 是弹簧的质量。所以系统的总动能为

$$\begin{aligned}
 T &= \text{质量块的动能 } T_m + \text{弹簧的动能 } T_s \\
 &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \int_{y=0}^l \frac{1}{2} \left(\frac{m_s}{l} dy \right) \left(\frac{y^2 \dot{x}^2}{l^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_s}{3} \dot{x}^2
 \end{aligned} \quad (\text{E. 2})$$

系统的总势能为

$$U = \frac{1}{2} kx^2 \quad (\text{E. 3})$$

假设系统的自由振动是简谐的,即

$$x(t) = X \cos \omega_n t \quad (\text{E. 4})$$

式中, X 是振幅; ω_n 是固有频率。动能和势能的最大值分别为

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \left(m + \frac{m_s}{3} \right) X^2 \omega_n^2 \quad (\text{E. 5})$$

$$U_{\max} = \frac{1}{2} kX^2 \quad (\text{E. 6})$$

令 $T_{\max} = U_{\max}$, 得

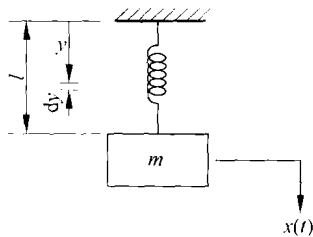


图 2.19 弹簧的等效质量

$$\omega_n = \left[\frac{k}{m + \frac{m_s}{3}} \right]^{1/2} \quad (\text{E. 7})$$

所以考虑弹簧质量的影响时,其等效质量为 $\frac{1}{3}m_s$ 。

例 2.9 讨论例 2.1 中水塔塔身的质量对水塔横向振动固有频率的影响。

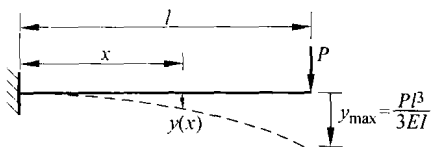


图 2.20 杆的等效质量

解: 为说明塔身质量对水塔横向振动固有频率的影响,需要确定将其等效到自由端时等效质量的大小,然后就可借助于单自由度系统模型得到水塔横向振动的固有频率。塔身可以看成是一个在自由端具有附加质量的悬臂梁。悬臂梁自由端受一个集中载荷时,其变形为(见图 2.20)

$$y(x) = \frac{Px^2}{6EI}(3l-x) = \frac{y_{\max}x^2}{2l^3}(3l-x) = \frac{y_{\max}}{2l^3}(3x^2l-x^3) \quad (\text{E. 1})$$

梁本身的最大动能为

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{m}{l} \{\dot{y}(x)\}^2 dx \quad (\text{E. 2})$$

式中, m 是梁的总质量; m/l 是梁单位长度的质量。由式(E.1)可得各点的速度为

$$\dot{y}(x) = \frac{\dot{y}_{\max}}{2l^3}(3x^2l-x^3) \quad (\text{E. 3})$$

代入式(E.2)得

$$\begin{aligned} T_{\max} &= \frac{m}{2l} \left(\frac{\dot{y}_{\max}}{2l^3} \right)^2 \int_0^l (3x^2l-x^3)^2 dx = \frac{1}{2} \frac{m}{l} \frac{\dot{y}_{\max}^2}{4l^6} \left(\frac{33}{35} l^7 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{33}{140} m \right) \dot{y}_{\max}^2 \end{aligned} \quad (\text{E. 4})$$

如果用 m_{eq} 表示塔身的质量等效到悬臂梁自由端时的大小,它的最大动能可表示为

$$T_{\max} = \frac{1}{2} m_{\text{eq}} \dot{y}_{\max}^2 \quad (\text{E. 5})$$

令式(E.4)和式(E.5)相等,得

$$m_{\text{eq}} = \frac{33}{140} m \quad (\text{E. 6})$$

所以考虑塔身质量的影响时,作用于悬臂梁端部的全部质量为

$$M_{\text{eff}} = M + m_{\text{eq}} \quad (\text{E. 7})$$

式中, M 是水塔的质量。故水塔横向振动的固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M_{\text{eff}}}} = \sqrt{\frac{k}{M + \frac{33}{140} m}} \quad (\text{E. 8})$$

2.6 黏性阻尼系统的自由振动

2.6.1 运动微分方程

如 1.6 节所述,黏性阻尼力 F 与速度 v 成正比,即可表示为

$$F = -c\dot{x} \quad (2.58)$$

其中, c 是黏性阻尼系数,负号表示阻尼力的方向与速度方向相反。图 2.21 所示为一有黏性阻尼的单自由度系统。用 x 表示质量块由静平衡位置算起的振动位移,向下为正。应用牛顿定律可得运动微分方程:

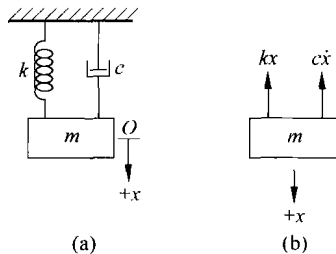
$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx$$

或

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$(2.59) \quad \text{图 2.21 带黏性阻尼器的单自由度系统}$$

(a) 系统组成; (b) 受力图



2.6.2 方程的解

为了求解方程(2.59),假设解的形式为

$$x(t) = Ce^{st} \quad (2.60)$$

其中, C 和 s 是待定常数。将式(2.60)代入方程(2.59)可得如下特征方程:

$$ms^2 + cs + k = 0 \quad (2.61)$$

该特征方程的根为

$$s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (2.62)$$

由这两个根可得方程(2.59)的两个特解为

$$x_1(t) = C_1 e^{s_1 t}, \quad x_2(t) = C_2 e^{s_2 t} \quad (2.63)$$

因此方程(2.59)的通解为这两个特解的线性组合,即

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} = C_1 e^{\left\{-\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right\}t} + C_2 e^{\left\{-\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right\}t} \quad (2.64)$$

其中, C_1, C_2 是两个任意的常数,可由系统的初始条件来确定。

使式(2.62)中根式的值为零的阻尼系数称为**临界阻尼系数**,用 c_c 表示,即

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0$$

或

$$c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\sqrt{km} = 2m\omega_n \quad (2.65)$$

对于有阻尼系统,阻尼系数与临界阻尼系数的比值称为阻尼比,用 ζ 表示,即

$$\zeta = \frac{c}{c_c} \quad (2.66)$$

由式(2.65)和式(2.66)可得

$$\frac{c}{2m} = \frac{c}{c_c} \frac{c_c}{2m} = \zeta \omega_n \quad (2.67)$$

因此

$$s_{1,2} = (-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n \quad (2.68)$$

故通解(2.64)可化为

$$x(t) = C_1 e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + C_2 e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \quad (2.69)$$

可见,特征根 s_1 和 s_2 的性质以及通解(2.69)的特点取决于阻尼的大小。当 $\zeta=0$ 时,就是2.2节中讨论的无阻尼的情形。因此下面只考虑 $\zeta \neq 0$ 的情形。

情形1 欠阻尼的情形($\zeta < 1$ 或 $c < c_c$ 或 $c/2m < \sqrt{k/m}$,欠阻尼也称为小阻尼或弱阻尼)

对于这种情况, $(\zeta^2 - 1)$ 是负的,因此 s_1 和 s_2 可表示为

$$s_1 = (-\zeta + i\sqrt{1 - \zeta^2})\omega_n$$

$$s_2 = (-\zeta - i\sqrt{1 - \zeta^2})\omega_n$$

通解成为如下形式:

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{(-\zeta + i\sqrt{1 - \zeta^2})\omega_n t} + C_2 e^{(-\zeta - i\sqrt{1 - \zeta^2})\omega_n t} \\ &= e^{-\zeta\omega_n t} \{ C_1 e^{i\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t} + C_2 e^{-i\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t} \} \\ &= e^{-\zeta\omega_n t} \{ (C_1 + C_2) \cos \sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t + i(C_1 - C_2) \sin \sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t \} \\ &= e^{-\zeta\omega_n t} \{ C'_1 \cos \sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t + C'_2 \sin \sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t \} \\ &= X e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t + \phi) \\ &= X_0 e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t - \phi_0) \end{aligned} \quad (2.70)$$

其中, (C'_1, C'_2) , (X, ϕ) 和 (X_0, ϕ_0) 为任意常数,可根据具体的初始条件来确定。例如,对于初始条件 $x(t=0)=x_0$ 和 $\dot{x}(t=0)=\dot{x}_0$,可求得 C'_1 和 C'_2 分别为

$$\left. \begin{aligned} C'_1 &= x_0 \\ C'_2 &= \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n} \end{aligned} \right\} \quad (2.71)$$

因此解的具体形式为

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left\{ x_0 \cos \sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t + \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n} \sin \sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t \right\} \quad (2.72)$$

常数 (X, ϕ) 和 (X_0, ϕ_0) 可以表示为

$$X = X_0 = \sqrt{C'^2_1 + C'^2_2} \quad (2.73)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{C'_1}{C'_2}\right) \quad (2.74)$$

$$\phi_0 = \arctan\left(-\frac{C'_2}{C'_1}\right) \quad (2.75)$$

式(2.72)所描述的运动是角频率为 $\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n$ 的有阻尼简谐运动。但由于 $e^{-\zeta\omega_n t}$ 项的存在, 振幅将随着时间按指数规律减小, 如图 2.22 所示。令

$$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n \quad (2.76)$$

称为阻尼振动的频率。可以看出, 有阻尼自由振动的频率 ω_d 总小于无阻尼自由振动的固有频率 ω_n 。由式(2.76)可知, 有阻尼系统自由振动的频率随着阻尼的增大而减小, 这种变化如图 2.23 所示。欠阻尼的情形在研究机械振动时是非常重要的, 因为它是唯一一种能够引起振动的情形。

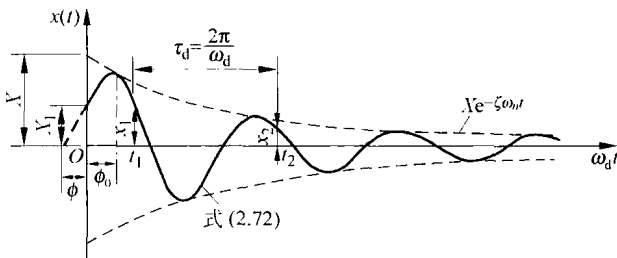


图 2.22 弱阻尼系统的衰减振动

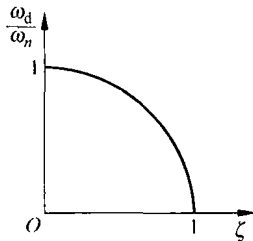


图 2.23 ω_d 随阻尼的变化

情形 2 临界阻尼的情形 ($\zeta=1$ 或 $c=c_c$ 或 $c/2m=\sqrt{k/m}$)

在这种情形下, 方程(2.68)的两个根 s_1 和 s_2 相等, 即

$$s_1 = s_2 = -\frac{c_c}{2m} = -\omega_n \quad (2.77)$$

由于是重根, 方程(2.59)的通解为^①

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega_n t} \quad (2.78)$$

由初始条件 $x(t=0)=x_0$ 和 $\dot{x}(t=0)=\dot{x}_0$ 可得

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= x_0 \\ C_2 &= \dot{x}_0 + \omega_n x_0 \end{aligned} \right\} \quad (2.79)$$

因此通解为

^① 式(2.78)还可以通过令式(2.72)中的 $\zeta \rightarrow 1$ 得到。由于 $\zeta \rightarrow 1, \omega_n \rightarrow 0$, 故 $\cos \omega_d t \rightarrow 1, \sin \omega_d t \rightarrow \omega_d t$ 。所以由式(2.72)得

$$x(t) = e^{-\omega_n t} (C'_1 + C'_2 \omega_d t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega_n t}$$

式中, $C_1 = C'_1, C_2 = C'_2 \omega_d$ 是新的常数。

$$x(t) = [x_0 + (\dot{x}_0 + \omega_n x_0)t]e^{-\omega_n t} \quad (2.80)$$

可以看出,式(2.80)所代表的运动是非周期的。当 $t \rightarrow \infty$ 时, $e^{-\omega_n t} \rightarrow 0$, 因此,该运动会最终消失,如图 2.24 所示。

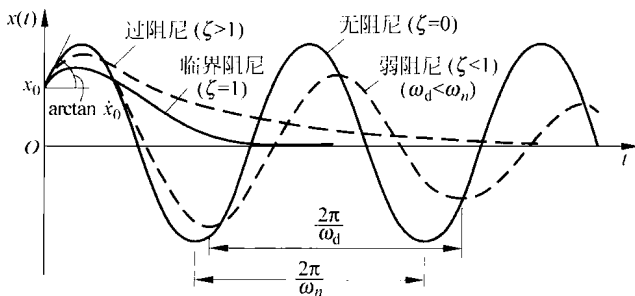


图 2.24 具有不同强弱的阻尼时解曲线的对比

情形 3 过阻尼的情形 ($\zeta > 1$ 或 $c > c_c$ 或 $c/2m > \sqrt{k/m}$, 过阻尼也称为大阻尼或强阻尼)

因为 $\sqrt{\zeta^2 - 1} > 0$, 由式(2.68)可知, s_1 和 s_2 为两个不相等的实根, 即

$$s_1 = (-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n < 0$$

$$s_2 = (-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n < 0$$

且 $s_2 \ll s_1$ 。通解式(2.69)可写作

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} \quad (2.81)$$

由初始条件 $x(t=0) = x_0$ 和 $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$, 可得常数 C_1, C_2 为

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{x_0 \omega_n (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) + \dot{x}_0}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} \\ C_2 &= \frac{-x_0 \omega_n (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) - \dot{x}_0}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} \end{aligned} \right\} \quad (2.82)$$

式(2.81)表明, 不管初始条件怎样, 该运动都不会是周期的。因为 s_1 和 s_2 都为负数, 所以运动将随着时间按指数规律衰减, 如图 2.24 所示。

下面将阻尼系统的特点作一总结:

(1) 特征根 s_1 和 s_2 随阻尼系数 c 或阻尼比 ζ 的变化规律可在复平面中讨论。在图 2.25 中, 水平轴和铅垂轴分别是实轴和虚轴。半圆弧代表 ζ 在 $0 < \zeta < 1$ 区间内变化时对应的 s_1 和 s_2 的轨线。从这个图可以迅速地看出参数 ζ 对系统行为的影响。当 $\zeta = 0$ 时, 得到

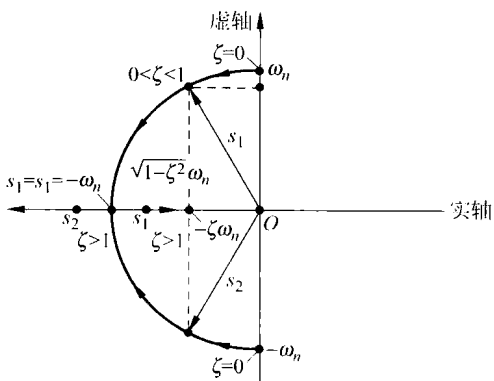


图 2.25 s_1 和 s_2 的轨线

虚根 $s_1 = i\omega_n$ 和 $s_2 = -i\omega_n$, 进而可以求出通解式(2.15); 当 $0 < \zeta < 1$ 时, s_1 和 s_2 是复共轭特征根, 即关于实轴对称。当 ζ 趋近于 1 时, 两个根趋近于实轴上的 $-\omega_n$ 点。当 $\zeta > 1$ 时, 两个根都在实轴上, 一个增大另一个就减小。当 $\zeta \rightarrow \infty$ 时, $s_1 \rightarrow 0, s_2 \rightarrow \infty$ 。 $\zeta = 1$ 是一种临界情形, 阻尼比大于 1 时, 两个特征根都是实数, 阻尼比小于 1 时, 两个特征根都是复数。

(2) 临界阻尼系数是使系统作非周期运动的最小阻尼。因此, 质量块将以最短的时间回到静止平衡位置。在许多实际应用中都利用了临界阻尼的这一性质。例如, 大型火炮的枪膛具有临界阻尼, 这样火炮受反冲力后, 会以最短的时间回到初始位置而不致引起振动。如果枪膛的阻尼大于临界阻尼, 那么就会拖延第二次开火的时间。

(3) 如图 2.26 所示, 单自由度有阻尼系统的自由振动响应也可以在相平面或状态空间中表示出来。

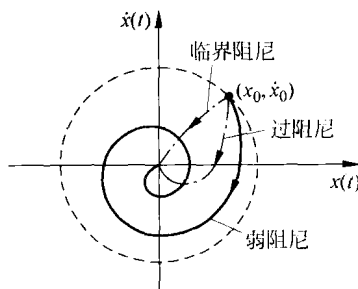


图 2.26 阻尼系统的相轨线

2.6.3 对数衰减系数

对数衰减系数用来表示有阻尼自由振动衰减的快慢。它定义为任意两个相邻的振幅之比的自然对数。如图 2.22 所示, 用 t_1 和 t_2 分别代表与两个连续的振幅相对应的时间, 即 t_1 和 t_2 相差一个周期。由式(2.70)可得

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{X_0 e^{-\zeta \omega_n t_1} \cos(\omega_d t_1 - \phi_0)}{X_0 e^{-\zeta \omega_n t_2} \cos(\omega_d t_2 - \phi_0)} \quad (2.83)$$

因为 $t_2 = t_1 + \tau_d$, 其中 $\tau_d = 2\pi/\omega_d$ 是有阻尼振动的周期, 因此 $\cos(\omega_d t_2 - \phi_0) = \cos(2\pi + \omega_d t_1 - \phi_0) = \cos(\omega_d t_1 - \phi_0)$, 进而式(2.83)可化为

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{-\zeta \omega_n t_1}}{e^{-\zeta \omega_n (t_1 + \tau_d)}} = e^{\zeta \omega_n \tau_d} \quad (2.84)$$

由式(2.84)可得对数衰减系数为

$$\begin{aligned} \delta = \ln \frac{x_1}{x_2} &= \zeta \omega_n \tau_d = \zeta \omega_n \frac{2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n} \\ &= \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi}{\omega_d} \cdot \frac{c}{2m} \end{aligned} \quad (2.85)$$

对于小阻尼($\zeta \ll 1$)的情况, 式(2.85)可近似为

$$\delta \simeq 2\pi\zeta, \quad \zeta \ll 1 \quad (2.86)$$

图 2.27 分别根据式(2.85)和式(2.86)给出了对数衰减系数 δ 随 ζ 的变化规律。可以看出, 在 $0 < \zeta < 0.3$ 这一区间内, 这两条曲线非常接近。

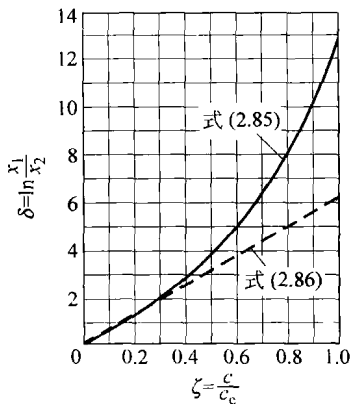


图 2.27 对数衰减系数 δ 随阻尼的变化

对数衰减系数是一个无量纲量, 可以看作是无量

纲阻尼比 ζ 的另一种形式。只要知道了 δ , 就可以由式(2.85)求出 ζ :

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} \quad (2.87)$$

如果不用式(2.85)而用式(2.86), 可得

$$\zeta \simeq \frac{\delta}{2\pi} \quad (2.88)$$

如果一个给定系统的阻尼大小未知, 可以通过实验测量相差一个周期的两个相邻位移 x_1 和 x_2 , 对 x_1 与 x_2 的比值取自然对数就可得到对数衰减系数 δ 的大小, 再由式(2.87)计算出阻尼比 ζ 。事实上, 阻尼比 ζ 也可通过测量相差任意整数个周期的两个位移来求得。如 x_1 和 x_{m+1} 分别代表 t_1 时刻和 t_{m+1} 时刻的振动幅度, 其中 $t_{m+1} = t_1 + m\tau_d$ (m 为整数), 则

$$\frac{x_1}{x_{m+1}} = \frac{x_1}{x_2} \frac{x_2}{x_3} \frac{x_3}{x_4} \cdots \frac{x_m}{x_{m+1}} \quad (2.89)$$

因为相差 1 个周期的任意两相邻振幅满足

$$\frac{x_j}{x_{j+1}} = e^{\xi\omega_n\tau_d} \quad (2.90)$$

故式(2.89)变为

$$\frac{x_1}{x_{m+1}} = (e^{\xi\omega_n\tau_d})^m = e^{m\xi\omega_n\tau_d} \quad (2.91)$$

由式(2.91)与式(2.85)可得

$$\delta = \frac{1}{m} \ln\left(\frac{x_1}{x_{m+1}}\right) \quad (2.92)$$

将式(2.92)代入式(2.87)或式(2.88)可求得黏性阻尼的阻尼比 ζ 。

2.6.4 黏性阻尼消耗的能量

一个有黏性阻尼的系统, 能量随时间的变化率 (dW/dt) 等于力与速度的乘积。利用式(2.58)可得

$$\frac{dW}{dt} = Fv = -cv^2 = -c\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \quad (2.93)$$

该式中的负号说明, 随着时间的延续, 能量在不断损耗。假设简谐运动为 $x(t) = X\sin\omega_d t$, 其中 X 是该运动的振幅, 则该系统在一个周期中消耗的能量为^①

$$\Delta W = \int_{t=0}^{2\pi/\omega_d} c\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt = \int_0^{2\pi} cX^2\omega_d \cos^2\omega_d t d(\omega_d t) = c\pi\omega_d X^2 \quad (2.94)$$

式(2.94)说明, 能量的减少量与振幅的平方成正比。注意: 当阻尼大小和振幅一定时, 能量

① 对阻尼系统, 只有考虑在频率为 ω_d 的简谐力作用下的稳态响应时, 简谐运动 $x(t) = X\cos\omega_d t$ 才是可能的 (见 3.4 节)。在稳态受迫振动中, 由阻尼器而引起的能量损失由激励补给。

的消耗也不是一个常数,因为它还是 ω_d 的函数。

当给黏性阻尼器并联上一个刚度为 k 的弹簧后,式(2.94)仍然成立。为了证明这一点,现在研究图 2.28 所示的系统。全部运动阻力可写为

$$F = -kx - c\dot{v} = -kx - c\dot{x} \quad (2.95)$$

像前面一样,仍假设运动是简谐的:

$$x(t) = X \sin \omega_d t \quad (2.96)$$

那么式(2.95)可化为

$$F = -kX \sin \omega_d t - c\omega_d X \cos \omega_d t \quad (2.97)$$

在一个周期中消耗的能量为

$$\begin{aligned} \Delta W &= \int_{t_0}^{t_0+2\pi/\omega_d} Fv dt = \int_0^{2\pi/\omega_d} kX^2 \omega_d \sin \omega_d t \cos \omega_d t d(\omega_d t) \\ &\quad + \int_0^{2\pi/\omega_d} c\omega_d X^2 \cos^2 \omega_d t d(\omega_d t) = c\pi\omega_d X^2 \end{aligned} \quad (2.98)$$

可见,式(2.98)与式(2.94)的结果是一致的。此结论正是我们所预料的,因为弹簧的恢复力在一个周期或任意整数个周期内实际做功为零。

也可以按如下方法计算每个运动周期中消耗的能量占系统总能量的多少,即 $\Delta W/W$ 。一个系统的能量可以用最大势能 $\left(\frac{1}{2}kX^2\right)$ 或最大动能 $\left(\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}mX^2\omega_d^2\right)$ 来表示。就小阻尼而言,这两个值近似相等。因此根据式(2.85)和式(2.88)可得

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{c\pi\omega_d X^2}{\frac{1}{2}m\omega_d^2 X^2} = 2\left(\frac{2\pi}{\omega_d}\right)\left(\frac{c}{2m}\right) = 2\delta \simeq 4\pi\zeta = \text{常数} \quad (2.99)$$

$\frac{\Delta W}{W}$ 称为阻尼比容,在比较工程材料的阻尼时经常用到它。另一个用来描述工程材料阻尼的量是损耗因子,它定义为每弧度所消耗的能量与系统总能量的比,即

$$\eta = \frac{\Delta W/2\pi}{W} = \frac{\Delta W}{2\pi W} \quad (2.100)$$

2.6.5 有黏性阻尼的扭振系统

2.6.1 节~2.6.4 节中提到的处理有黏性阻尼的直线振动的方法可以直接推广到有黏性阻尼的扭振系统。为此,考虑图 2.29(a)所示的有黏性阻尼的单自由度扭振系统。黏性阻尼力矩为(见图 2.29(b))

$$T = -c_t \dot{\theta} \quad (2.101)$$

其中, c_t 为扭转黏性阻尼系数; $\dot{\theta} = d\theta/dt$ 是圆盘的角速度,负号表示阻尼力矩与角速度方向相反。此时的运动微分方程为

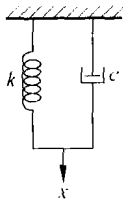


图 2.28 弹簧和阻尼器并联的情况

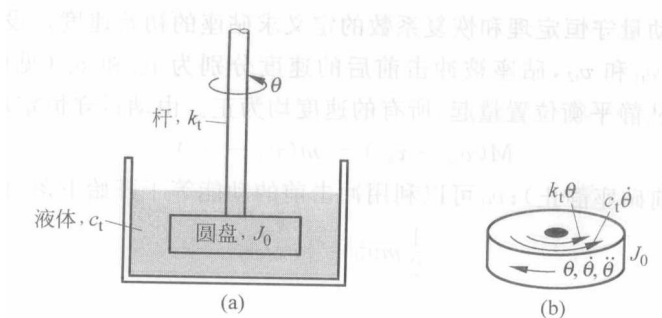


图 2.29 扭转黏性阻尼器

$$J_0 \ddot{\theta} + c_t \dot{\theta} + k_t \theta = 0 \quad (2.102)$$

其中, J_0 是圆盘的转动惯量; k_t 是系统的弹簧常数(发生单位角位移所需的扭矩); θ 是圆盘的角位移。方程(2.102)的解可根据直线振动的结论直接得到。例如, 在欠阻尼的情形下, 该振动的周期为

$$\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n \quad (2.103)$$

其中

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_t}{J_0}} \quad (2.104)$$

阻尼比 ζ 为

$$\zeta = \frac{c_t}{c_{tc}} = \frac{c_t}{2J_0 \omega_n} = \frac{c_t}{2\sqrt{k_t J_0}} \quad (2.105)$$

其中, c_{tc} 是临界扭振阻尼系数。

例 2.10 锻锤的砧座重 5000 N, 安装在一个基础上。基础的黏性阻尼系数为 10 000 N·s/m, 支承弹簧的刚度为 5×10^6 N/m。某次锻造加工时, 重为 1000 N 的锻锤从 2 m 高处落下(见图 2.30(a)), 冲击前砧座静止。求砧座的响应。假设砧座和锻锤之间的恢复系数为 0.4。

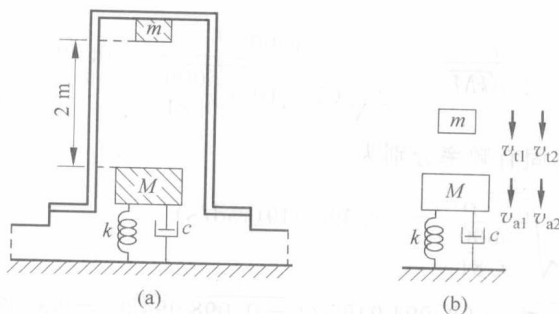


图 2.30 锻锤的简化模型

解: 首先根据动量守恒定理和恢复系数的定义求砧座的初始速度。设锻锤与砧座冲击前后的速度分别为 v_{t1} 和 v_{t2} , 砧座被冲击前后的速度分别为 v_{a1} 和 v_{a2} (见图 2.30(b))。注意: 砧座的位移是从静平衡位置量起, 所有的速度均为正。由动量守恒定理得

$$M(v_{a2} - v_{a1}) = m(v_{t1} - v_{t2}) \quad (\text{E. 1})$$

式中, $v_{a1} = 0$ (冲击前砧座静止); v_{t1} 可以利用冲击前的动能等于开始下落时的势能确定, 即

$$\frac{1}{2}mv_{t1}^2 = mgh \quad (\text{E. 2})$$

由此得

$$v_{t1} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.81 \times 2} = 6.26099 (\text{m/s})$$

所以式(E.1)成为

$$\frac{5000}{9.81}(v_{a2} - 0) = \frac{1000}{9.81}(6.26099 - v_{t2})$$

即

$$510.204082v_{a2} = 638.87653 - 102.040813v_{t2} \quad (\text{E. 3})$$

根据恢复系数的定义

$$r = -\frac{v_{a2} - v_{t2}}{v_{a1} - v_{t1}} \quad (\text{E. 4})$$

得

$$0.4 = -\frac{v_{a2} - v_{t2}}{0 - 6.26099}$$

即

$$v_{a2} = v_{t2} + 2.504396 \quad (\text{E. 5})$$

由式(E.3)和式(E.5)解得

$$v_{a2} = 1.460898 \text{ m/s}, \quad v_{t2} = -1.043498 \text{ m/s}$$

所以砧座的初始条件为

$$x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = 1.460898 \text{ m/s}$$

阻尼比为

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{kM}} = \frac{1000}{2\sqrt{(5 \times 10^6) \frac{5000}{9.81}}} = 0.0989949$$

砧座的无阻尼和有阻尼固有频率分别为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{5 \times 10^6}{\frac{5000}{9.81}}} = 98.994949 (\text{rad/s})$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 98.994949 \sqrt{1 - 0.0989949^2} = 98.024799 (\text{rad/s})$$

由式(2.72), 砧座的位移响应为

$$\begin{aligned}
 x(t) &= e^{-\zeta\omega_n t} \left\{ \cos \omega_d t + \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d} \sin \omega_d t \right\} \\
 &= e^{-9.799\,995t} \{ \cos 98.024\,799t + 0.014\,903\,35 \sin 98.024\,799t \}
 \end{aligned}$$

例 2.11 摩托车的质量为 200 kg, 为其设计了一个弱阻尼吸振器。当吸振器受到一个由于路面冲击而引起的竖直方向的速度时, 相应的位移-时间曲线如图 2.31(b) 所示。如果阻尼振动的周期为 2 s, 经过半个周期后振幅衰减为原来的 1/4 (即 $x_{1.5} = x_1/4$)。求 (1) 弹簧的刚度以及阻尼器的阻尼系数; (2) 引起 250 mm 的最大位移所需的最小初始速度。

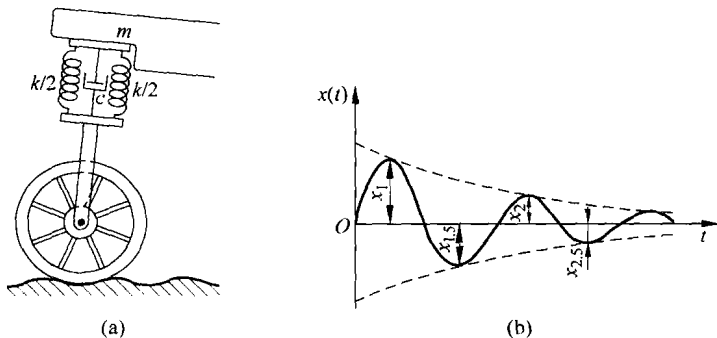


图 2.31 摩托车的吸振器

解: 由于 $x_{1.5} = x_1/4$, $x_2 = x_{1.5}/4 = x_1/16$, 所以对数衰减系数为

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \ln 16 = 2.7726 = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (\text{E. 1})$$

据此可以求出 $\zeta = 0.4037$ 。由于已知衰减振动的周期为 2 s, 故

$$\begin{aligned}
 2 = \tau_d &= \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \\
 \omega_n &= \frac{2\pi}{2 \sqrt{1-0.4037^2}} = 3.4338 \text{ (rad/s)}
 \end{aligned}$$

所以临界阻尼系数为

$$c_c = 2m\omega_n = 2 \times 200 \times 3.4338 = 1373.54 \text{ (N} \cdot \text{s/m)}$$

而阻尼系数为

$$c = \zeta c_c = 0.4037 \times 1373.54 = 554.4981 \text{ (N} \cdot \text{s/m)}$$

弹簧刚度为

$$k = m\omega_n^2 = 200 \times 3.4338^2 = 2358.2652 \text{ (N/m)}$$

位移达到最大值的时间由下式确定 (见习题 2.86):

$$\sin \omega_d t_1 = \sqrt{1-\zeta^2}$$

即

$$\sin \omega_d t_1 = \sin \pi t_1 = \sqrt{1 - 0.4037^2} = 0.9149$$

由此得

$$t_1 = \frac{\sin^{-1} 0.9149}{\pi} = 0.3678(\text{s})$$

衰减振动的包络线为

$$x = \sqrt{1 - \zeta^2} X e^{-\zeta \omega_n t} \quad (\text{E. 2})$$

在式(E. 2)中,令 $x = 250 \text{ mm}$, $t = t_1$, 得

$$0.25 = \sqrt{1 - 0.4037^2} X e^{0.4037 \times 3.4338 \times 0.3678}$$

即

$$X = 0.4550 \text{ m}$$

质量块的位移响应为

$$x(t) = X e^{-\zeta \omega_n t} \sin \omega_d t$$

微分一次得

$$\dot{x}(t) = X e^{-\zeta \omega_n t} (-\zeta \omega_n \sin \omega_d t + \omega_d \cos \omega_d t) \quad (\text{E. 3})$$

在式(E. 3)中令 $t = 0$, 得

$$\begin{aligned} \dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0 &= X \omega_d = X \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \\ &= 0.4550 \times 3.4338 \sqrt{1 - 0.4037^2} = 1.4294(\text{m/s}) \end{aligned}$$

例 2.12 图 2.32 为一大型火炮的示意图。发射时,高压气体使子弹在炮筒内获得一个很高的速度。后坐力使炮筒沿与子弹射出相反的方向移动。由于希望火炮不会由此产生振动并能以最短的时间停下来,所以设计了一个具有临界阻尼的弹簧-阻尼器系统,称为反冲机构。设炮筒和反冲机构的总质量为 500 kg ,反冲弹簧的刚度为 $10\,000 \text{ N/m}$,发射时后坐的距离为 0.4 m 。求:(1)阻尼器的临界阻尼系数;(2)初始后坐速度;(3)火炮返回到距初始位置 0.1 m 所需的时间。

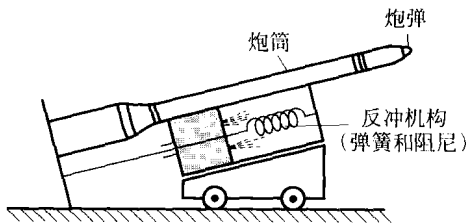


图 2.32 火炮的后坐问题

解: (1) 系统的无阻尼固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10\,000}{500}} = 4.4721(\text{rad/s})$$

由式(2.65)得临界阻尼系数为

$$c_c = 2m\omega_n = 2 \times 500 \times 4.4721 = 4472.1(\text{N} \cdot \text{s/m})$$

(2) 根据式(2.78),临界阻尼系统的响应为

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\omega_n t} \quad (\text{E. 1})$$

式中, $C_1 = x_0$, $C_2 = \dot{x}_0 + \omega_n x_0$ 。令 $\dot{x}_0(t) = 0$ 可以确定 $x(t)$ 达到最大值的时间。由式(E. 1)得

$$\dot{x}(t) = C_2 e^{-\omega_n t} - \omega_n (C_1 + C_2 t) e^{-\omega_n t}$$

由 $\dot{x}_0(t)=0$ 得

$$t_1 = \frac{1}{\omega_n} - \frac{C_1}{C_2} \quad (\text{E. 2})$$

由于此时 $C_1 = x_0 = 0$, 故由式 (E. 2) 得 $t_1 = 1/\omega_n$ 。由于 $x(t)$ 的最大值即后坐距离为 $x_{\max} = 0.4 \text{ m}$, 即

$$x_{\max} = x(t = t_1) = C_2 t_1 e^{-\omega_n t_1} = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} e^{-1} = \frac{\dot{x}_0}{e \omega_n}$$

故

$$\dot{x}_0 = x_{\max} \omega_n e = 0.4 \times 4.4721 \times 2.7183 = 4.8626 (\text{m/s})$$

(3) 如果用 t_2 表示火炮返回到距初始位置 0.1 m 所需的时间, 则有

$$0.1 = C_2 t_2 e^{-\omega_n t_2} = 4.8626 t_2 e^{-4.4721 t_2} \quad (\text{E. 3})$$

由上式得

$$t_2 = 0.8258 \text{ s}$$

2.7 库仑阻尼系统的自由振动

在许多机械系统中, 为了简单和方便, 经常采用库仑阻尼(或称干摩擦阻尼)模型。两个相互接触的物体有相对滑动时, 它们之间会产生摩擦阻力, 在振动结构中也是这样。如 1.6 节所述, 物体在干的表面上滑动时会有库仑阻尼。库仑干摩擦定律表明, 对于两个相互接触的物体, 为使它们之间产生相对滑动所需的力, 与作用在接触面上的正压力成正比, 因此摩擦力可写为

$$F = \mu N = \mu W = \mu mg \quad (2.106)$$

其中, N 是法向力(等于质量块的重量 $W = mg$); μ 是动摩擦系数。该摩擦系数 μ 的值取决于相互接触物体的材料性质以及接触表面的粗糙程度。例如, 有润滑时的金属与金属之间的摩擦系数 $\mu \approx 0.1$, 没有润滑时金属与金属之间的摩擦系数 $\mu \approx 0.3$, 橡胶与金属之间的摩擦系数接近于 1.0 。摩擦力的方向与速度的方向相反。库仑阻尼有时也被称为常数阻尼, 因为阻尼力的大小与位移和速度的大小均无关, 只取决于滑动表面间的正压力 N 。

2.7.1 运动微分方程

对图 2.33(a)所示的有库仑阻尼的单自由度振动系统来说, 因为摩擦力的方向随着速度方向的改变而改变, 因此需要考虑两种情况, 分别如图 2.33(b)和(c)所示。

情形 1 当 x 是正的, 且 dx/dt 也是正的; 或者当 x 是负的, 但 dx/dt 是正的(即质量块从左向右运动的半个周期)。由图 2.33(b), 应用牛顿第二定律可得运动微分方程为

$$m\ddot{x} = -kx - \mu N$$

即

$$m\ddot{x} + kx = -\mu N \quad (2.107)$$

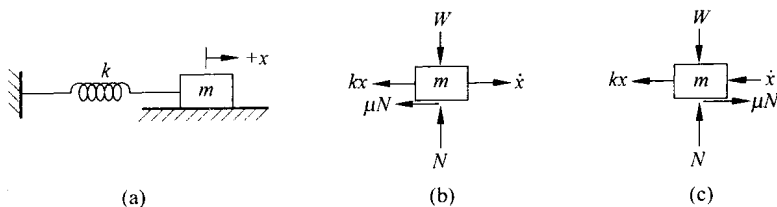


图 2.33 具有库仑阻尼的弹簧-质量系统

这是一个二阶非齐次常微分方程。它的通解的形式为

$$x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t - \frac{\mu N}{k} \quad (2.108)$$

其中, $\omega_n = \sqrt{k/m}$ 是振动的固有圆频率; A_1 和 A_2 为常数, 它们的大小可由这半个周期的初始条件来确定。

情形 2 当 x 是正的, 但 dx/dt 是负的; 或者当 x 是负的, 且 dx/dt 也是负的 (即质量块从右向左运动的半个周期)。由图 2.33(c) 可得运动微分方程为

$$-kx + \mu N = m\ddot{x}$$

即

$$m\ddot{x} + kx = \mu N \quad (2.109)$$

方程(2.109)的通解为

$$x(t) = A_3 \cos \omega_n t + A_4 \sin \omega_n t + \frac{\mu N}{k} \quad (2.110)$$

其中, A_3 和 A_4 为常数, 它们的大小可由这半个周期的初始条件来确定。式(2.108)和式(2.110)中出现的 $\mu N/k$ 这一项, 可以看作是常力 μN 以静载荷方式作用在质量块上时弹簧产生的虚位移。式(2.108)和式(2.110)表明在每一个半周期中运动都是简谐的, 只是对应的静平衡位置从 $\mu N/k$ 变为 $-\mu N/k$, 如图 2.34 所示。

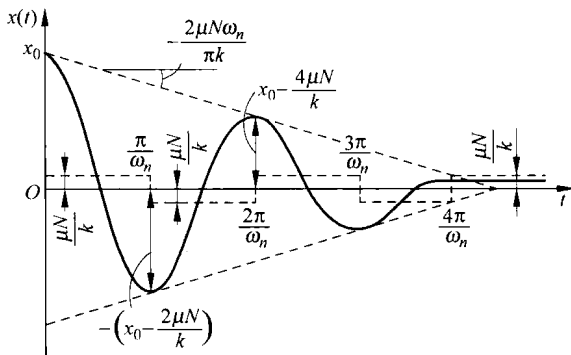


图 2.34 具有库仑阻尼时质量块的运动

2.7.2 方程的解

方程(2.107)和方程(2.109)可以用一个方程来表示,注意到 $N=mg$,该方程可写为

$$m\ddot{x} + \mu mg \operatorname{sgn}(\dot{x}) + kx = 0 \quad (2.111)$$

其中, $\operatorname{sgn}(y)$ 称为符号函数, y 是正数时 $\operatorname{sgn} y$ 的值为1, y 是负数时 $\operatorname{sgn} y$ 的值为-1, y 为零时 $\operatorname{sgn} y$ 的值也为零。可见,方程(2.111)是一个非线性的微分方程,它没有单一的解析解。但如果用 $\dot{x}=0$ 对应的时刻把时间轴分段(即在同一时间段里运动的方向相同,在相邻时间段的运动方向不相同),就能写出方程的解析解。为了求出这一解析解,假设初始条件为

$$\left. \begin{aligned} x(t=0) &= x_0 \\ \dot{x}(t=0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.112)$$

这说明,系统在初始时刻,即 $t=0$ 时刻,速度为零,位移为 x_0 。因为在 $t=0$ 时刻 $x=x_0$,所以质量块是从右向左运动。我们用 x_0, x_1, x_2, \dots 来代表一系列连续的半周期内运动的振幅。利用式(2.110)和式(2.112)可以计算出常数 A_3 和 A_4 :

$$A_3 = x_0 - \frac{\mu N}{k}, \quad A_4 = 0$$

因此,方程(2.110)可变为

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{\mu N}{k}\right) \cos \omega_n t + \frac{\mu N}{k} \quad (2.113)$$

这一解析解只在这半个周期,即 $0 \leq t \leq \pi/\omega_n$ 这一时间段是成立的。当 $t=\pi/\omega_n$ 时,质量块会到达它的最左端的位置,它距平衡位置的位移可以由式(2.113)求出:

$$-x_1 = x\left(t = \frac{\pi}{\omega_n}\right) = \left(x_0 - \frac{\mu N}{k}\right) \cos \pi + \frac{\mu N}{k} = -\left(x_0 - \frac{2\mu N}{k}\right)$$

因为运动是由 $x=x_0$ 开始,半个周期后位移 x 的值变为 $-\left(x_0 - \frac{2\mu N}{k}\right)$,所以在 π/ω_n 的时间内,位移大小的改变量为 $2\mu N/k$ 。

在第2个半周期中,质量块从左向右运动。所以应该用式(2.108)来求解。前一个半周期终止时刻的运动情况就是这半个周期的初始条件,即这半个周期的初始位移等于式(2.113)中 $t=\pi/\omega_n$ 时的位移。初始速度等于与式(2.113)相对应的速度表达式(即 $x(t)$ 关于时间求一阶导)在 $t=\pi/\omega_n$ 时的值,因此可得

$$\begin{aligned} x(t=0) &= -\left(x_0 - \frac{2\mu N}{k}\right) \\ \dot{x}(t=0) &= 0 \end{aligned}$$

因此式(2.108)中的常数满足

$$-A_1 = -x_0 + \frac{3\mu N}{k}, \quad A_2 = 0$$

式(2.108)可写为

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{3\mu N}{k}\right) \cos \omega_n t - \frac{\mu N}{k} \quad (2.114)$$

这一表达式也只在第 2 个半周期成立,即在 $\pi/\omega_n \leq t \leq 2\pi/\omega_n$ 这一时间段成立。在这半个周期的最后时刻的位移和速度分别为式(2.114)和与其相对应的速度表达式在 $t=2\pi/\omega_n$ 时的值,具体大小为

$$x_2 = x_0 - \frac{4\mu N}{k}, \quad \dot{x} = 0$$

这又是第 3 个半周期的初始条件。这样的计算过程可以一直重复下去,直到运动结束。当 $x_n \leq \mu N/k$ 时运动就会停止,因为这时弹簧的恢复力 kx 将小于摩擦力 μN 。因此在运动终止前,发生的半周期的个数 r 为

$$x_0 - r \frac{2\mu N}{k} \leq \frac{\mu N}{k}$$

即

$$r \geq \frac{x_0 - \frac{\mu N}{k}}{\frac{2\mu N}{k}} \quad (2.115)$$

要注意有库仑阻尼系统的下列特性:

(1) 黏性阻尼系统的运动微分方程是线性的,而库仑阻尼系统的运动微分方程是非线性的。

(2) 黏性阻尼增加会使系统的固有频率减小;而库仑阻尼增加,系统的固有频率却不发生变化。

(3) 有黏性阻尼的系统,在过阻尼的情形下运动是非周期的;而库仑阻尼系统的运动则是周期的。

(4) 即使只有一个极小的振幅,黏性阻尼或滞后阻尼系统的振动在理论上将永远运动下去;但有库仑阻尼的系统,运动一段时间后肯定会停止下来。

(5) 有黏性阻尼的系统,振幅随时间按指数规律减小;而有库仑阻尼的系统,振幅是按线性规律减小的。

(6) 在一个整周期内,运动的振幅减小了 $4\mu N/k$ 。因此任意两相邻周期的终点时刻的振幅满足

$$X_m = X_{m-1} - \frac{4\mu N}{k} \quad (2.116)$$

因为振幅在 1 个周期(即在 $2\pi/\omega_n$ 这一时间段内)减少 $4\mu N/k$,所以图 2.34 中振动曲线的包络线(即图中的虚线)的斜率为

$$-\frac{4\mu N}{k} \bigg/ \frac{2\pi}{\omega_n} = -\frac{2\mu N\omega_n}{\pi k}$$

质量块最后的位置一般与平衡位置($x=0$)之间有一定位移,在这一位置,摩擦力是固

定的。轻轻地敲击质量块就可以让它回到平衡位置。

2.7.3 有库仑阻尼的扭振系统

在扭振系统中,如果摩擦力引起的扭矩为常数,那么这一振动系统的运动微分方程为

$$J_0 \ddot{\theta} + k_t \theta = -T \quad (2.117)$$

或

$$J_0 \ddot{\theta} + k_t \theta = T \quad (2.118)$$

其中, T 是由摩擦力引起的扭矩。可以看出,方程(2.117)、方程(2.118)与方程(2.107)、方程(2.109)非常相似。因而它的解与直线振动时也相似。扭振的周期为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_t}{J_0}} \quad (2.119)$$

第2个半周期结束时的振幅为

$$\theta_r = \theta_0 - r \frac{2T}{k_t} \quad (2.120)$$

其中, θ_0 是 $t=0$ 时刻的角位移($t=0$ 时 $\dot{\theta}=0$)。当

$$r \geq \frac{\theta_0 - \frac{T}{k_t}}{\frac{2T}{k_t}} \quad (2.121)$$

时,运动会停止。

例 2.13 放在粗糙表面上的金属块系在一个弹簧上,获得一个 10 cm 的初始位移(从平衡位置量起)。经过 5 个周期后(2 s),其距平衡位置的距离为 1 cm。求金属块和粗糙表面之间的摩擦系数。

解: 由于在 2 s 内经过了 5 个周期,所以周期为 $\tau_n = 2/5 = 0.4$ (s),振动的角频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{\tau_n} = \frac{2\pi}{0.4} = 15.708 \text{ (rad/s)}$$

由于在一个周期内振幅的减少为 $\frac{4\mu N}{k} = \frac{4\mu mg}{k}$,故由已知条件得

$$5 \times \frac{4\mu mg}{k} = 0.10 - 0.01 = 0.09 \text{ (m)}$$

所以摩擦系数为

$$\mu = \frac{0.09k}{20mg} = \frac{0.09\omega_n^2}{20g} = \frac{0.09 \times 15.708^2}{20 \times 9.81} = 0.1132$$

例 2.14 钢制圆轴长 1 m,直径为 50 mm,一端固定,另一端装有一个转动惯量为 $25 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 的滑轮。带式制动器沿滑轮的圆周施加的摩擦力矩为 $400 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。如果使滑轮转动 6° 后释放。求:(1)滑轮停止角振动前经过的周期数;(2)滑轮的最终位置。

解: (1) 根据式(2.121), 滑轮停止角振动前经过的半周期数为

$$r \geq \frac{\theta_0 - \frac{T}{k_t}}{\frac{2T}{k_t}} \quad (\text{E.1})$$

式中, $\theta_0 = 6^\circ = 0.10472 \text{ rad}$ 是初始角位移; k_t 是轴的扭转弹簧刚度, 其表达式为

$$k_t = \frac{GJ}{l} = \frac{(8 \times 10^{10}) \left(\frac{\pi}{32} \times 0.05^4 \right)}{1} = 49\,087.5 (\text{N} \cdot \text{m}/\text{rad})$$

T 为施于滑轮的恒定摩擦力矩。由式(E.1)得

$$r \geq \frac{0.10472 - \frac{400}{49\,087.5}}{\frac{800}{49\,087.5}} = 5.926$$

故经过 6 个半周期后滑轮停止运动。

(2) 根据式(2.120), 经过 6 个半周期后滑轮的角位移为

$$\theta = 0.10472 - 6 \times 2 \times \frac{400}{49\,087.5} = 0.006935 (\text{rad}) = 0.39734^\circ$$

所以滑轮停止的位置与平衡位置的夹角为 0.39734° , 且与初始角位移在平衡位置的同侧。

2.8 滞后阻尼系统的自由振动

如图 2.35(a) 所示, 对于弹簧与黏性阻尼器并联的系统, 引起位移 $x(t)$ 所需的力 F 为

$$F = kx + c\dot{x} \quad (2.122)$$

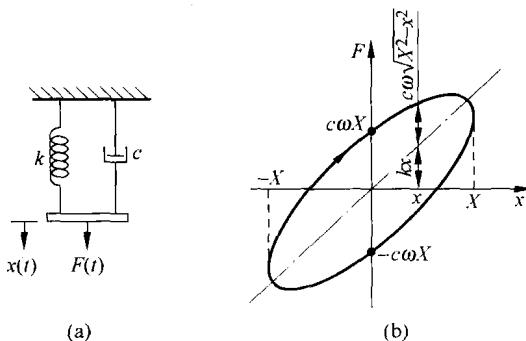


图 2.35 弹簧-黏性阻尼器系统

对于频率为 ω 、振幅为 X 的简谐运动来说, 有

$$x(t) = X \sin \omega t \quad (2.123)$$

由式(2.122)和式(2.123)得

$$\begin{aligned} F(t) &= kX \sin \omega t + cX\omega \cos \omega t = kx \pm c\omega \sqrt{X^2 - (X \sin \omega t)^2} \\ &= kx \pm c\omega \sqrt{X^2 - x^2} \end{aligned} \quad (2.124)$$

如图 2.35(b) 所示, F 随 x 的变化曲线是一条闭合回线。该曲线所围成的面积代表了阻尼器在一个周期内消耗的能量, 其大小为

$$\Delta W = \oint F dx = \int_0^{2\pi/\omega} (kX \sin \omega t + cX\omega \cos \omega t)(\omega X \cos \omega t) dt = c\pi\omega X^2 \quad (2.125)$$

上式在 2.6.4 节中也曾推导过(见式(2.98))。

如 1.6 节所述, 由于结构变形使内部材料之间发生相对滑动而产生的阻尼被称为滞后阻尼(或固体阻尼、结构阻尼)。这样在应力-应变平面或力-位移平面就会形成一条封闭曲线, 如图 2.36(a) 所示。在一次加载与卸载的过程中, 所消耗的能量就等于封闭曲线所围成的面积。由于图 2.36(a) 与图 2.35(b) 很相近, 所以可以由图 2.36(a) 来定义一个滞后阻尼常数。实验发现, 在一个周期中, 由内部摩擦力所消耗的能量近似与振幅的平方成正比, 但与频率无关。为使式(2.125)满足这一结论, 假定阻尼系数 c 与频率成反比, 即

$$c = \frac{h}{\omega} \quad (2.126)$$

其中, h 称为滞后阻尼系数。由式(2.125)和式(2.126)得

$$\Delta W = \pi h X^2 \quad (2.127)$$

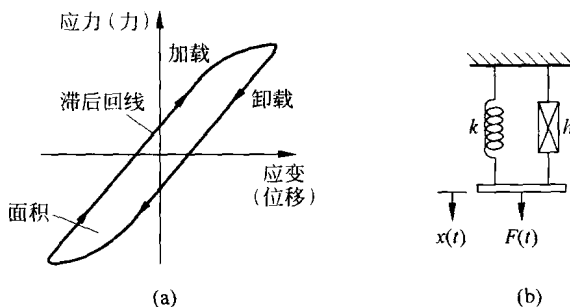


图 2.36 应力-应变滞后回线

在图 2.35(a) 中, 弹簧与黏性阻尼器并联。对于一般的简谐运动 $x = X e^{i\omega t}$, 则力 F 为

$$F = kX e^{i\omega t} + c\omega iX e^{i\omega t} = (k + i\omega c)x \quad (2.128)$$

同理, 弹簧与滞后阻尼器并联时, 如图 2.36(b) 所示, 则力与位移的关系可表达为

$$F = (k + ih)x \quad (2.129)$$

其中

$$k + ih = k \left(1 + i \frac{h}{k} \right) = k(1 + i\beta) \quad (2.130)$$

称为系统的复数刚度。 $\beta = h/k$ 是一个常数, 表示系统的无量纲阻尼。

由于阻尼, 在一个周期中系统损耗的能量可以表示成 β 的函数:

$$\Delta W = \pi k \beta X^2 \quad (2.131)$$

滞后阻尼系统的运动也可以认为是近于简谐的(因为 ΔW 很小), 每个周期中振幅的减小可以用能量平衡来确定。例如, 图 2.37 中相差半个周期的 P 和 Q 两点的能量之间的关系为

$$\frac{kX_j^2}{2} - \frac{\pi k \beta X_j^2}{4} - \frac{\pi k \beta X_{j+0.5}^2}{4} = \frac{kX_{j+0.5}^2}{2}$$

即

$$\frac{X_j}{X_{j+0.5}} = \sqrt{\frac{2+\pi\beta}{2-\pi\beta}} \quad (2.132)$$

同理, 由点 Q 和点 R 的能量之间的关系可得

$$\frac{X_{j+0.5}}{X_{j+1}} = \sqrt{\frac{2+\pi\beta}{2-\pi\beta}} \quad (2.133)$$

将式(2.132)与式(2.133)相乘可得

$$\frac{X_j}{X_{j+1}} = \frac{2+\pi\beta}{2-\pi\beta} = \frac{2-\pi\beta+2\pi\beta}{2-\pi\beta} \simeq 1+\pi\beta = \text{常数} \quad (2.134)$$

因此滞后阻尼系统自由振动的对数衰减系数为

$$\delta = \ln\left(\frac{X_j}{X_{j+1}}\right) \simeq \ln(1+\pi\beta) \simeq \pi\beta \quad (2.135)$$

因为假设运动是近似简谐的, 由此可知, 相对应的频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.136)$$

等效黏性阻尼比 ζ_{eq} 可由与对数衰减系数 δ 的关系导出, 即由

$$\delta \simeq 2\pi\zeta_{eq} \simeq \pi\beta = \frac{\pi h}{k}$$

得

$$\zeta_{eq} = \frac{\beta}{2} = \frac{h}{2k} \quad (2.137)$$

因此, 等效黏性阻尼系数 c_{eq} 为

$$c_{eq} = c_c \zeta_{eq} = 2\sqrt{mk} \frac{\beta}{2} = \beta\sqrt{mk} = \frac{\beta k}{\omega} = \frac{h}{\omega} \quad (2.138)$$

注意: 以上这种计算等效黏性阻尼系数的方法, 只在简谐激励的情况下成立, 并认为系统的响应是一个近似于以 ω 为频率的简谐振动。

例 2.15 由实验测量所得某结构的力-变形关系曲线如图 2.38 所示。根据此结果, 估计滞后阻尼常数 β 和对数衰减系数 δ 。

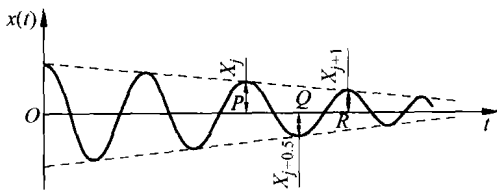


图 2.37 滞后阻尼系统的响应

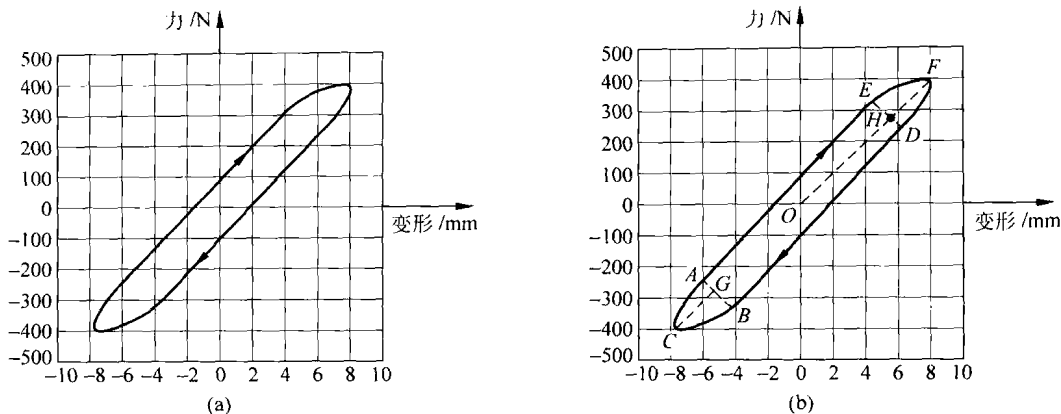


图 2.38 载荷-变形关系曲线

解：一个加载卸载循环内的能量耗散等于滞后回线所围的面积。图 2.38 中每一个正方形表示 $100 \times 2 = 200 (\text{N} \cdot \text{mm})$ 。由滞后回线所围绕的面积可以通过如下方式找到：面积 ACB + 面积 $ABDE$ + 面积 $DFE \approx \frac{1}{2} L_{AB} L_{CG} + L_{AB} L_{AE} + \frac{1}{2} L_{DE} L_{FH} = \frac{1}{2} \times 1.25 \times 1.8 + 1.25 \times 8 + \frac{1}{2} \times 1.25 \times 1.8 = 12.25$ 个正方形单元。所以这个区域表示的能量大小为 $12.25 \times 200 / 1000 = 2.5 (\text{N} \cdot \text{m})$ 。根据式(2.127), 有

$$\Delta W = \pi h X^2 = 2.5 (\text{N} \cdot \text{m}) \quad (\text{E.1})$$

由于最大变形为 0.008 m , 并且力-变形曲线的斜率(由直线 OF 的斜率近似给出)为 $k = 400/8 = 50 (\text{N/mm}) = 50\,000 \text{ N/m}$, 则滞后阻尼系数为

$$h = \frac{\Delta W}{\pi X^2} = \frac{2.5}{\pi \times 0.008^2} = 12\,433.95 \quad (\text{E.2})$$

因此

$$\beta = \frac{h}{k} = \frac{12\,433.95}{50\,000} = 0.248\,679$$

对数缩减系数 δ 可由下式得出：

$$\delta \simeq \pi \beta = \pi \times 0.248\,679 = 0.781\,25 \quad (\text{E.3})$$

例 2.16 一个桥梁结构可以模拟成一个单自由度系统, 等效质量为 $5 \times 10^5 \text{ kg}$, 等效刚度为 $25 \times 10^6 \text{ N/m}$ 。在一次自由振动实验中, 测得相邻振幅比为 1.04 。试估计结构阻尼常数 β 和桥梁结构的近似自由振动响应。

解：利用相邻振幅的比, 式(2.135)给出的对数衰减系数 δ 为

$$\delta = \ln \frac{X_i}{X_{i+1}} = \ln 1.04 = \ln(1 + \pi \beta)$$

由此得

$$1 + \pi\beta = 1.04$$

或

$$\beta = \frac{0.04}{\pi} = 0.0127$$

等效黏性阻尼系数 c_{eq} 可以由式(2.138)确定:

$$c_{\text{eq}} = \frac{\beta k}{\omega} = \frac{\beta k}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = \beta \sqrt{km} \quad (\text{E.1})$$

根据已知的等效刚度 k 和等效质量 m 的值,由式(E.1)得

$$c_{\text{eq}} = 0.0127 \sqrt{(25 \times 10^6)(5 \times 10^5)} = 44.9013 \times 10^3 (\text{N} \cdot \text{s}/\text{m})$$

结构的等效临界阻尼常数可由式(2.65)算出:

$$c_c = 2\sqrt{km} = 2\sqrt{(25 \times 10^6)(5 \times 10^5)} = 7071.0678 \times 10^3 (\text{N} \cdot \text{s}/\text{m})$$

因为 $c_{\text{eq}} < c_c$, 所以是弱阻尼的情况。由式(2.72), 其自由振动响应为

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left\{ x_0 \cos \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t + \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n} \sin \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t \right\}$$

其中, x_0 和 \dot{x}_0 表示在开始自由振动时的初始位移和初始速度; ζ 为

$$\zeta = \frac{c_{\text{eq}}}{c_c} = \frac{44.9013 \times 10^3}{7071.0678 \times 10^3} = 0.0063$$

2.9 利用 MATLAB 求解的例子

例 2.17 绘制无阻尼单自由度系统的固有频率和周期随静变形的变化曲线。

解: 固有频率 ω_n 和周期 τ_n 由式(2.28)和式(2.30)给出, 即

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}, \quad \tau_n = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}}$$

取 $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ 。可以利用下列 MATLAB 程序画出 δ_{st} 在 $0 \sim 0.5$ 范围内 ω_n 和 τ_n 的变换曲线:

```
%Ex2_17.m
g=9.81;
for i=1:101
    t(i)=0.01+(0.5-0.01)*(i-1)/100;
    w(i)=(g/t(i))^0.5;
    tao(i)=2*pi*(t(i)/g)^0.5;
end
plot(t,w);
gtext('w_n');
```

```
hold on;
plot(t,tao);
gtext('T_n');
xlabel('Delta_s_t');
title('Example 2. 17');
```

所绘曲线如图 2.39 所示。

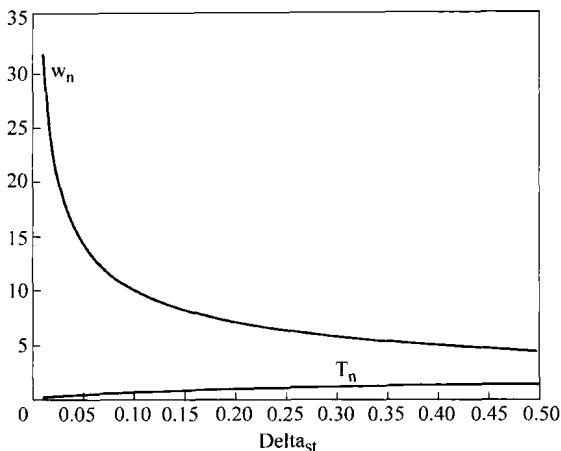


图 2.39 例 2.17 图

例 2.18 一个弹簧-质量系统, 质量为 $20 \text{ lbf} \cdot \text{s}^2/\text{in}$, 刚度为 500 lbf/in , 在初始激励下作自由振动, 初始位移和初始速度分别为 $x_0 = 3.0 \text{ in}$ 和 $\dot{x}_0 = 4.0 \text{ in/s}$ 。用 MATLAB 画出质量块的位移、速度和加速度随时间变化的图像。

解: 根据式(2.23), 无阻尼系统的位移可表示为

$$x(t) = A_0 \sin(\omega_n t + \phi_0) \quad (\text{E. 1})$$

其中

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{500}{20}} = 5 (\text{rad/s})$$

$$A_0 = \left[x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \right)^2 \right]^{1/2} = \left[3.0^2 + \left(\frac{4.0}{5.0} \right)^2 \right]^{1/2} = 3.1048 (\text{in})$$

$$\phi_0 = \arctan \frac{x_0 \omega_n}{\dot{x}_0} = \arctan \frac{3.0 \times 5.0}{4.0} = 75.0686^\circ = 1.3102 \text{ rad}$$

故由式(E.1)得

$$x(t) = 3.1048 \sin(5t + 1.3102) \text{ in} \quad (\text{E. 2})$$

$$\dot{x}(t) = 15.524 \cos(5t + 1.3102) \text{ in/s} \quad (\text{E. 3})$$

$$\ddot{x}(t) = -77.62 \sin(5t + 1.3102) \text{ in/s}^2 \quad (\text{E. 4})$$

根据式(E.2)~式(E.4),利用 MATLAB 绘制 $0 \sim 6$ s 内位移、速度和加速度随时间变化的程序如下:

```
%Ex2_18.m
for i=1:101
    t(i)=6*(i-1)/100;
    x(i)=3.1048*sin(5*t(i)+1.3102);
    x1(i)=15.524*cos(5*t(i)+1.3102);
    x2(i)=-77.62*sin(5*t(i)+1.3102);
end
subplot(311);
plot(t,x);
ylabel('x(t)');
title('Example 2.18');
subplot(312);
plot(t,x1);
ylabel('x^(.)(t)');
subplot(313);
plot(t,x2);
xlabel('t');
ylabel('x^(.^)(t)');
```

所绘图形如图 2.40 所示。

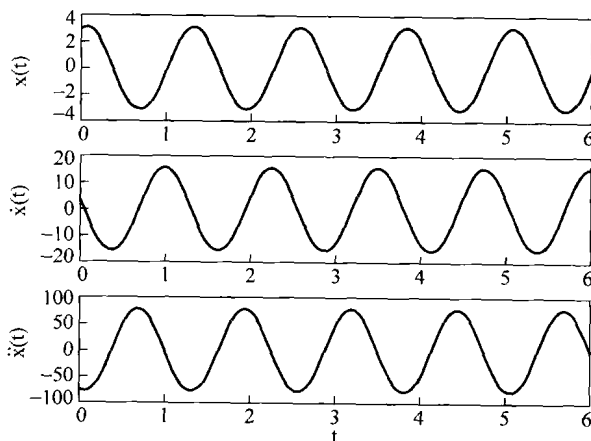


图 2.40 例 2.18 图

例 2.19 求具有库仑阻尼的弹簧-质量系统的自由振动响应,初始条件为 $x(0)=0.5$ m, $\dot{x}(0)=0$ 。其他参数为 $m=10$ kg, $k=200$ N/m, $\mu=0.5$ 。

解: 系统的运动微分方程为

$$m\ddot{x} + \mu mg \operatorname{sgn}(\dot{x}) + kx = 0 \quad (\text{E. 1})$$

用 Runge-Kutta 法解式(E. 1)。令 $x_1 = x, x_2 = \dot{x}_1 = \dot{x}$, 可将其写成如下一阶微分方程组的形式:

$$\dot{x}_1 = x_2 \equiv f_1(x_1, x_2) \quad (\text{E. 2})$$

$$\dot{x}_2 = -\mu g \operatorname{sgn}(x_2) - \frac{k}{m}x_1 \equiv f_2(x_1, x_2) \quad (\text{E. 3})$$

式(E. 2)和式(E. 3)也可写成如下矩阵形式:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}) \quad (\text{E. 4})$$

其中

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{X}(t=0) = \begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{Bmatrix}$$

利用 MATLAB 的 ode23 指令求解式(E. 4)的程序如下:

```
%Ex2_19.m
%This program will use dfunc1.m
tspan=[0: 0.05: 8];
x0=[5.0; 0.0];
[t, x]=ode23('dfunc1', tspan, x0);
plot(t, x(:, 1));
xlabel('t');
ylabel('x(1)');
title('Example 2.19');

%dfunc1.m
function f=dfunc1(t, x)
f=zeros(2,1);
f(1)=x(2);
f(2)=-0.5*9.81*sign(x(2))-200*x(1)/10;
```

所绘图形如图 2.41 所示。

例 2.20 编写一个命名为 Program2.m 的通用 MATLAB 程序, 求黏性阻尼系统的自由振动响应。已知数据如下: $m=450.0, k=26\,519.2, c=1000.0, x_0=0.539\,657, \dot{x}_0=1.0$ 。

解: 程序 Program2.m 中的如下数据需要在运行后由键盘输入:

m——质量;
k——弹簧刚度;
c——阻尼常数;
x0——初始位移;
xd0——初始速度;

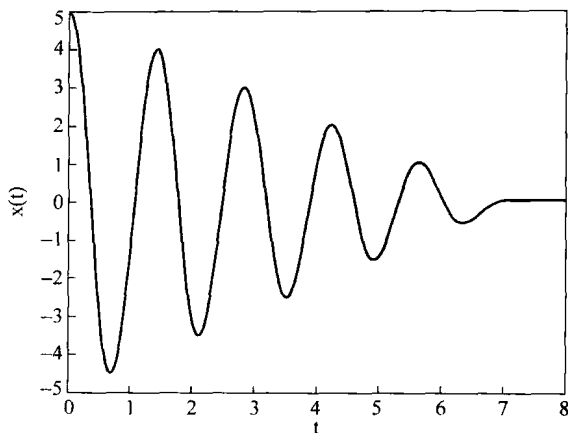


图 2.41 例 2.19 图

n ——一个周期内所取步长数以确定在一个周期内计算响应的离散点数；

delt ——时间步长(Δt)。

程序的输出为：

步长的序号 i , $x(i)$, $\dot{x}(i)$, $\ddot{x}(i)$

程序还可绘制 x , \dot{x} 和 \ddot{x} 随时间的变化曲线。程序的运行结果为：

```
>>program2
```

```
Free vibration analysis of a single degree of freedom analysis
```

```
Data:
```

```
m= 4.50000000e+002
```

```
k= 2.65192000e+004
```

```
c= 1.00000000e+003
```

```
x0= 5.39657000e-001
```

```
xd0= 1.00000000e+000
```

```
n= 100
```

```
delt= 2.50000000e-002
```

```
system is under damped
```

```
Results:
```

```
i      time(i)      x(i)      xd(i)      xdd(i)
```

1	2.500000e-002	5.540992e-001	1.596159e-001	-3.300863e+001
2	5.000000e-002	5.479696e-001	-6.410545e-001	-3.086813e+001
3	7.500000e-002	5.225989e-001	-1.375559e+000	-2.774077e+001
4	1.000000e-001	4.799331e-001	-2.021239e+000	-2.379156e+001
5	1.250000e-001	4.224307e-001	-2.559831e+000	-1.920599e+001
6	1.500000e-001	3.529474e-001	-2.977885e+000	-1.418222e+001
.				
.				
.				
96	2.400000e+000	2.203271e-002	2.313895e-001	-1.812621e+000
97	2.425000e+000	2.722809e-002	1.834092e-001	-2.012170e+000
98	2.450000e+000	3.117018e-002	1.314707e-001	-2.129064e+000
99	2.475000e+000	3.378590e-002	7.764312e-002	-2.163596e+000
100	2.500000e+000	3.505350e-002	2.395118e-002	-2.118982e+000

绘出的图形如图 2.42 所示。

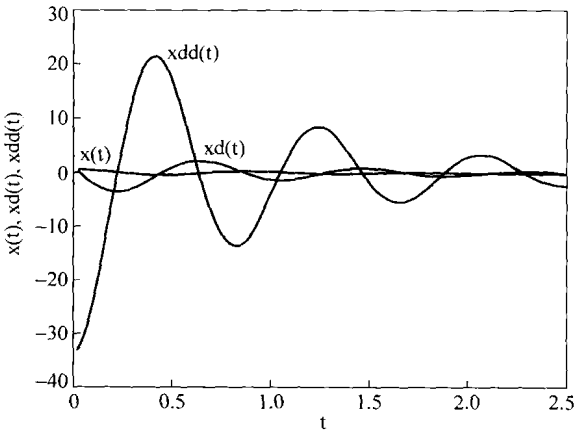


图 2.42 例 2.20 图

2.10 C++ 程序

除了利用 MATLAB,也可用一个交互式的 C++ 程序(Program2.cpp)来求解例 2.20 中黏性阻尼单自由度系统的自由振动响应。

例 2.21 用 C++ 程序求黏性阻尼系统的自由振动响应,系统参数同例 2.20。

解: 需要输入的数据通过交互的方式键入。程序执行后的结果为:

```
Please input M, K, C, X0, XD0, DELT:
450. 26519.2 1000. 0.539567 1.0 0.25
```

Please input n:

10

FREE VIBRATION ANALYSIS OF A SINGLE DEGREE OF FREEDOM SYSTEM

DATA

M =450

K =26519.2

C =1000

X0 =0.539567

XD0 =1

N =10

DELT =0.25

SYSTEM IS UNDER DAMPED

RESULTS:

I	TIME(I)	X(I)	XD(I)	XDD(I)
0	0.250000	0.019265	-3.350687	6.310661
1	0.500000	-0.318985	1.062303	16.437608
2	0.750000	0.144699	1.403773	-11.646832
3	1.000000	0.112366	-1.294927	-3.744280
4	1.250000	-0.137887	-0.173140	8.510647
5	1.500000	0.002856	0.827508	-2.007241
6	1.750000	0.077718	-0.304712	-3.902928
7	2.000000	-0.039587	-0.326003	3.057362
8	2.250000	-0.025262	0.334008	0.746486
9	2.500000	0.035048	0.023957	-2.118662

2.11 Fortran 程序

本节说明如何利用一个命名为 FREVIB. F 的 Fortran 子程序, 来求黏性阻尼单自由度系统的自由振动响应。系统可以是欠阻尼、临界阻尼或过阻尼的。

例 2.22 利用命名为 FREVIB. F 的 Fortran 子程序求解例 2.20。

解: 调用子程序 FREVIB. F 的主程序为 PROGRAM2. F。程序的执行结果为:

FREE VIBRATION ANALYSIS OF A SINGLE DEGREE OF FREEDOM SYSTEM

DATA

M = 0.45000000E+03
 K = 0.26519199E+05
 C = 0.10000000E+04
 X0 = 0.53956699E+00
 XD0 = 0.10000000E+01
 N = 10
 DELT = 0.25000000E+00

SYSTEM IS UNDER DAMPED

RESULTS:

I	TEME(I)	X(I)	XD(I)	XDD(I)
1	0.250000E+00	0.192649E-01	-0.335069E+01	0.631066E+01
2	0.500000E+00	-0.318985E+00	0.106230E+01	0.164376E+02
3	0.750000E+00	0.144699E+00	0.140377E+01	-0.116468E+02
4	0.100000E+01	0.112366E+00	-0.129493E+01	-0.374428E+01
5	0.125000E+01	-0.137887E+00	-0.173140E+00	0.851065E+01
6	0.150000E+01	0.285635E-02	0.827508E+00	-0.200724E+01
7	0.175000E+01	0.777184E-01	-0.304712E+00	-0.390293E+01
8	0.200000E+01	-0.395868E-01	-0.326002E+00	0.305736E+01
9	0.225000E+01	-0.252620E-01	0.334008E+00	0.746487E+00
10	0.250000E+01	0.350478E-01	0.239573E-01	-0.211866E+01

参 考 文 献

- 2.1 R. W. Fitzgerald, *Mechanics of Materials* (2nd ed.), Addison-Wesley, Reading, Mass., 1982.
- 2.2 R. F. Steidel, Jr., *An Introduction to Mechanical Vibrations* (4th ed.), Wiley, New York, 1989.
- 2.3 W. Zambrano, "A brief note on the determination of the natural frequencies of a spring-mass system," *International Journal of Mechanical Engineering Education*, Vol. 9, October 1981, pp. 331-334; Vol. 10, July 1982, p. 216.
- 2.4 R. D. Blevins, *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1979.
- 2.5 A. D. Dimarogonas, *Vibration Engineering*, West Publishing, Saint Paul, 1976.
- 2.6 E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics* (7th ed.), Wiley, New York, 1993.
- 2.7 S. H. Crandall, "The role of damping in vibration theory," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 11,

1970, pp. 3-18.

- 2.8 I. Cochin, *Analysis and Design of Dynamic Systems*, Harper & Row, New York, 1980.
- 2.9 D. Sinclair, "Frictional Vibrations," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 22, 1955, pp. 207-214.
- 2.10 T. K. Caughey and M. E. J. O'Kelly, "Effect of damping on the natural frequencies of linear dynamic systems," *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 33, 1961, pp. 1458-1461.
- 2.11 E. E. Ungar, "The status of engineering knowledge concerning the damping of built-up structures," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 26, 1973, pp. 141-154.
- 2.12 W. Pinsker, "Structural damping," *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. 16, 1949, p. 699.
- 2.13 R. H. Scanlan and A. Mendelson, "Structural damping," *AIAA Journal*, Vol. 1, 1963, pp. 938-939.

思 考 题

2.1 简答题

1. 找出一种方法,用来求大黏性阻尼振动系统的阻尼系数。
2. 能将2.2节的结果应用于恢复力不与位移成正比关系,即 k 不为常数的系统吗?
3. 叙述在扭振系统中,与 m, c, k, x 相对应的参数。
4. 质量减小对系统的固有频率有什么影响?
5. 刚度减小对系统的固有周期有什么影响?
6. 为什么在实际系统中,自由振动的振幅会逐渐变小?
7. 为什么求振动系统的固有频率非常重要?
8. 一个二阶微分方程的通解中至少有几个任意常数?它们怎样确定?
9. 是否能将能量法用于求所有单自由度系统的运动微分方程?
10. 利用能量法求单自由度系统的固有频率时,是基于什么假设?
11. 有阻尼系统自由振动的频率与固有频率,哪个大?
12. 什么是对数衰减系数?
13. 滞后阻尼是最大应力的函数吗?
14. 什么是临界阻尼?它有何重要意义?
15. 由阻尼引起的能量耗散会引起哪些后果?
16. 什么是等效黏性阻尼?等效黏性阻尼系数是常数吗?
17. 为什么要研究单自由度系统的振动?
18. 怎样通过测量静变形求出系统的固有频率?
19. 列举实际应用中两个利用扭摆的例子。
20. 名词解释: 阻尼比, 对数衰减系数, 损失因子, 阻尼比容。
21. 库仑阻尼系统的响应与其他阻尼系统的响应有什么不同?
22. 什么是复数刚度?

23. 滞后阻尼系数是如何定义的?
24. 给出3个利用撞击中心的实际例子。

2.2 判断题

1. 无阻尼系统的振幅不随时间变化。 ()
2. 在空气中振动的系统可以看作是一个阻尼系统。 ()
3. 对于单自由度系统而言,无论质量是在水平面还是在斜面上运动,运动微分方程都是相同的。 ()
4. 当质量块在垂直方向振动时,推导运动微分方程时都可以不计重力。 ()
5. 能量守恒定律可用于推导有阻尼系统和无阻尼系统的运动微分方程。 ()
6. 有阻尼系统自由振动的频率有时大于无阻尼系统的固有频率。 ()
7. 有阻尼系统自由振动的频率有时可能是零。 ()
8. 扭转系统振动的固有频率等于 $\sqrt{\frac{k}{m}}$,其中 k, m 分别表示扭簧的刚度和物体的转动惯量。 ()
9. 瑞利法的基础是能量守恒定律。 ()
10. 在库仑阻尼的情况下,质量的最终位置永远是平衡位置。 ()
11. 无阻尼系统的固有频率等于 $\sqrt{g/\delta_{st}}$,其中 δ_{st} 是质量的静位移。 ()
12. 对于无阻尼系统,速度超前位移 $\pi/2$ 。 ()
13. 对于无阻尼系统,速度超前加速度 $\pi/2$ 。 ()
14. 库仑阻尼可以叫做常数阻尼。 ()
15. 损失因子表示每弧度每单位应变能的能量损耗。 ()
16. 在欠阻尼和过阻尼的情况下,运动都将衰减为零。 ()
17. 对数衰减系数可以用来求阻尼比。 ()
18. 材料的应力-应变曲线的滞后回线引起阻尼。 ()
19. 复数刚度可以用来求滞后阻尼系统的阻尼力。 ()
20. 滞后阻尼系统的运动可以认为是简谐的。 ()

2.3 填空题

1. 无阻尼系统的自由振动反映了_____能和_____能不断转换。
2. 作简谐运动的系统叫做_____振子。
3. 机械式钟表是_____摆的例子。
4. _____中心可有效地应用于网球拍。
5. 对于黏性阻尼和滞后阻尼,理论上运动可以永远_____。

6. 计算库仑阻尼中阻尼力的公式为_____。
7. _____系数用于比较不同工程材料的阻尼效果。
8. 当_____体关于某一轴线作往复摆动时,称为扭转振动。
9. _____阻尼的性质有许多实际应用,比如在大型火炮中。
10. 对数衰减系数表示有阻尼自由振动_____衰减的快慢。
11. 瑞利法可用于直接求出系统的_____频率。
12. 系统中间隔一个周期的两个相邻位移可以用来求得_____衰减系数。
13. 有阻尼固有频率可以用无阻尼固有频率 ω_n 表示为_____。

2.4 选择题

1. 质量为 m 、刚度为 k 的系统,固有频率为_____。
 (a) $\frac{k}{m}$ (b) $\sqrt{\frac{k}{m}}$ (c) $\sqrt{\frac{m}{k}}$
2. 在库仑阻尼中,每一周期运动的振幅减少_____。
 (a) $\frac{\mu N}{k}$ (b) $\frac{2\mu N}{k}$ (c) $\frac{4\mu N}{k}$
3. 初始位移为 0、初始速度为 \dot{x}_0 的有阻尼系统的振幅为_____。
 (a) \dot{x}_0 (b) $\dot{x}_0 \omega_n$ (c) $\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}$
4. 考虑弹簧质量的影响,应该在系统质量中加上弹簧质量的_____。
 (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{4}{3}$
5. 对于阻尼常数为 c 的黏性阻尼来说,阻尼力为_____。
 (a) $c\dot{x}$ (b) cx (c) $c\ddot{x}$
6. 一个机械系统内各部分之间的相对滑动,可产生_____。
 (a) 干摩擦阻尼 (b) 黏性阻尼 (c) 滞后阻尼
7. 在扭转振动中,位移用_____来描述。
 (a) 线坐标 (b) 角坐标 (c) 力坐标
8. 阻尼比用阻尼常数和临界阻尼常数可表示为_____。
 (a) $\frac{c_c}{c}$ (b) $\frac{c}{c_c}$ (c) $\sqrt{\frac{c}{c_c}}$
9. 初始位移为 x_0 、初始速度为 0 的欠阻尼系统的振幅为_____。
 (a) x_0 (b) $2x_0$ (c) $x_0 \omega_n$
10. 初始位移为 x_0 、初始速度为 0 的无阻尼系统的相角为_____。
 (a) x_0 (b) $2x_0$ (c) 0

11. 由黏性阻尼引起的能量耗散与振幅的_____次幂成正比。
 (a) 1 (b) 2 (c) 3
12. 对于临界阻尼系统,其运动为_____。
 (a) 周期的 (b) 非周期的 (c) 谐振的
13. 作简谐运动 $x(t) = X \sin \omega_d t$ 的黏性阻尼系统,阻尼常数为 c , 每个周期的能量耗散为_____。
 (a) $\pi c \omega_d X^2$ (b) $\pi \omega_d X^2$ (c) $\pi c \omega_d X$
14. 对于总能量为 W 、每个周期能量耗散为 ΔW 的振动系统,其阻尼比容的表达式为_____。
 (a) $\frac{W}{\Delta W}$ (b) $\frac{\Delta W}{W}$ (c) ΔW

2.5 连线题(对于单自由度系统: $m=1, k=2, c=0.5$)

- | | |
|---------------------|------------|
| 1. 固有频率 ω_n | (a) 1.3919 |
| 2. 线性频率 f_n | (b) 2.8284 |
| 3. 固有周期 τ_n | (c) 2.2571 |
| 4. 有阻尼频率 ω_d | (d) 0.2251 |
| 5. 临界阻尼系数 c_c | (e) 0.1768 |
| 6. 阻尼比 ξ | (f) 4.4429 |
| 7. 对数衰减系数 δ | (g) 1.4142 |

2.6 连线题(质量 $m=5 \text{ kg}$ 的物体,以 $v=10 \text{ m/s}$ 的速度运动)

- | 阻尼力 | 阻尼类型 |
|----------|--|
| 1. 20 N | (a) 库仑阻尼,摩擦系数为 0.3 |
| 2. 1.5 N | (b) 黏性阻尼,阻尼系数为 $1 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ |
| 3. 30 N | (c) 黏性阻尼,阻尼系数为 $2 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ |
| 4. 25 N | (d) 滞后阻尼,滞后阻尼系数为 12 N/m ,当频率为 4 rad/s 时 |
| 5. 10 N | (e) 平方阻尼($F=av^2$),阻尼常数 $a=0.25 \text{ N} \cdot \text{s}^2/\text{m}^2$ |

习 题

- 2.1 一个工业压力机放置在一个橡胶垫上,使它与地基隔开。如果橡胶垫被压力机的自重压缩了 5 mm ,求系统的固有频率。
- 2.2 一个弹簧-质量系统的固有周期为 0.21 s 。当(a)弹簧刚度增加 50% ; (b)弹簧刚度减

少 50% 时, 周期将分别变为多少?

- 2.3 一个弹簧-质量系统的固有频率为 10 Hz, 当弹簧刚度减少了 800 N/m 时, 频率改变了 45%, 求原系统的质量和弹簧的刚度。
- 2.4 一个螺旋弹簧, 一端固定, 在另一端施加 100 N 的力时能产生 10 mm 的伸长量。现将弹簧垂直放置, 两端刚性固定。在弹簧中点处悬挂一个质量为 10 kg 的物体。求物体在垂直方向上振动一个周期所需的时间。
- 2.5 一个重 2000 lbf 的空调制冷设备由 4 个空气弹簧支承(见图 2.43)。设计弹簧, 使该设备振动的固有频率在 5~10 rad/s 之间。
- 2.6 一个简谐振荡器质量的最大速度为 10 cm/s, 振荡周期为 2 s。如果将物体在初始位移为 2 cm 的地方释放, 求: (a) 振幅; (b) 初始速度; (c) 加速度最大值; (d) 相角。
- 2.7 如图 2.44 所示, 一个刚性无重量杆 PQ 上连接着 3 个弹簧和 1 个质量块, 求振动系统的固有频率。
- 2.8 一辆质量为 2000 kg 的汽车在静载条件下使其悬架弹簧产生了 0.02 m 的变形。假设忽略阻尼影响, 求汽车在垂直方向上的固有频率。
- 2.9 如图 2.45 所示, 求放置在斜平面上的弹簧-质量系统的固有振动频率。

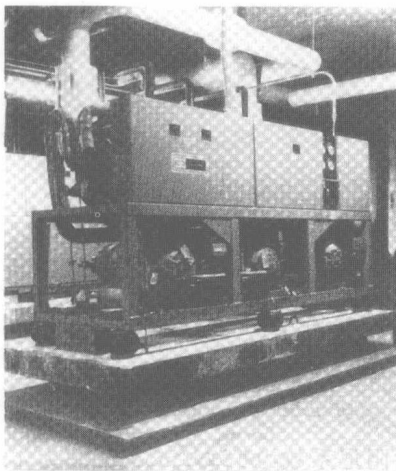


图 2.43 习题 2.5 图(经 Journal of Sound and Vibration 授权使用)

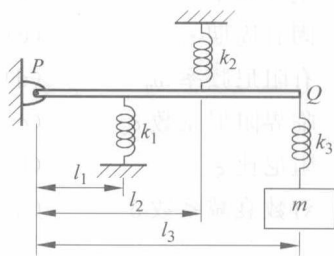


图 2.44 习题 2.7 图

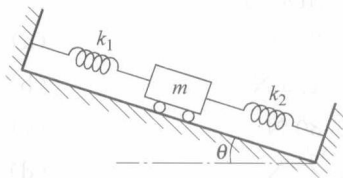


图 2.45 习题 2.9 图

- 2.10 如图 2.46 所示, 重 5000 lbf 的满载运煤小车, 由一个无摩擦的滑轮和钢丝绳牵引。求在图中所给位置小车的振动固有频率。
- 2.11 一台重 500 N 的电子设备由 4 个螺旋弹簧支承, 如图 2.47 所示。设计弹簧, 使该设备能应用在振动频率在 0~5 Hz 之间的环境中。

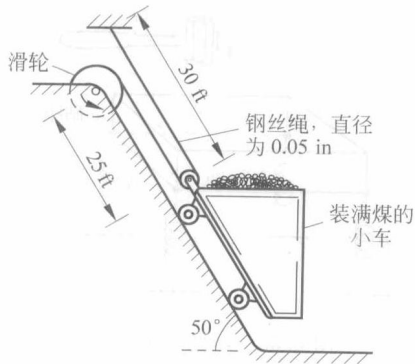


图 2.46 习题 2.10 图

图 2.47 安装在隔振器上的电子底盘
(经 Titan SESCO 授权使用)

- 2.12 如图 2.48 所示的弹性梁, 分别求出在梁中间装有弹簧 k_1, k_2 , 以及没有弹簧 k_1, k_2 情况下的系统固有频率。
- 2.13 如图 2.49 所示, 忽略摩擦和滑轮质量, 求滑轮系统的固有频率。
- 2.14 如图 2.50 所示, 一重物 W 由 3 个不计摩擦及质量的滑轮和一个刚度为 k 的弹簧支承, 求 W 作微小摆动时的固有频率。

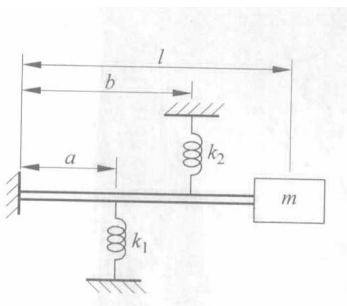


图 2.48 习题 2.12 图

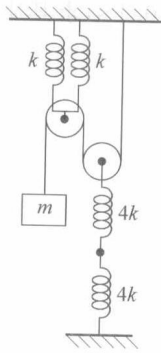


图 2.49 习题 2.13 图

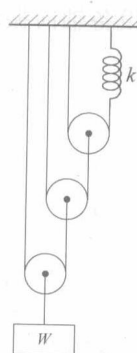


图 2.50 习题 2.14 图

- 2.15 如图 2.51 所示, 质量为 M 的刚体由 4 个弹性支座支承。一个质量为 m 的物体由高度 l 处落下, 附着在刚体上没有反弹。如果每个弹性支座的刚度为 k , 求在如下情况下系统的固有频率: (a) m 没有掉落时; (b) m 掉落后。并求出 (b) 情况下系统的运动。
- 2.16 锤子以 50 ft/s 的速度敲击砧座 (见图 2.52)。锤子和砧座分别重 12 lbf 和 100 lbf 。砧座由 4 个刚度 $k = 100 \text{ lbf/in}$ 的弹簧支承。求砧座的运动: (a) 锤子与砧座保持接触; (b) 在最初的敲击后, 锤子与砧座不再接触。

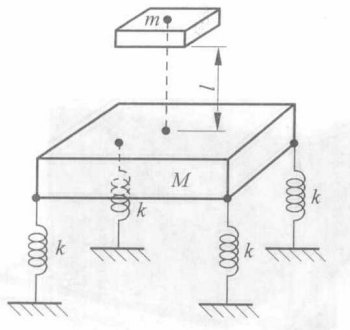


图 2.51 习题 2.15 图

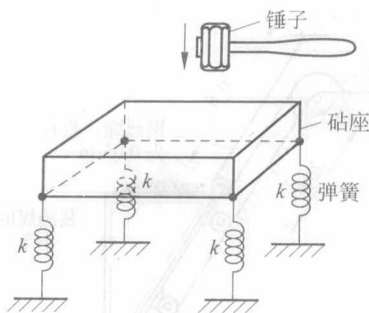


图 2.52 习题 2.16 图

- 2.17 导出图 2.53 所示系统的固有频率表达式。注意：载荷 W 作用于梁 1 的末端和梁 2 的中点。
- 2.18 一台重 9810 N 的机器被卷扬机以 2 m/s 的速度匀速下放。吊机器的钢丝绳直径为 0.01 m。当放到绳长为 20 m 时，卷扬机突然停止工作。求由此引起的机器振动的周期和振幅。
- 2.19 一个弹簧-质量系统的固有频率为 2 Hz，当 1 kg 的额外质量加到原质量 m 上时，固有频率减少到 1 Hz。求系统的刚度 k 和质量 m 。
- 2.20 一个电气开关设备被吊车吊起。已知钢索长 4 m，直径 0.01 m（见图 2.54）。如果此设备轴向振动的固有周期为 0.1 s，求其质量。

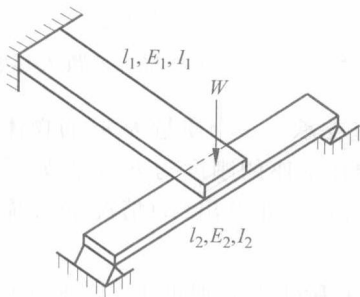


图 2.53 习题 2.17 图



图 2.54 习题 2.20 图(经 Institution of Electrical Engineers 授权使用)

- 2.21 如图 2.55 所示, 4 个刚性无重量杆和 1 个弹簧, 用两种不同的方式吊着重物 W 。分别求两种布置方式的固有振动频率。

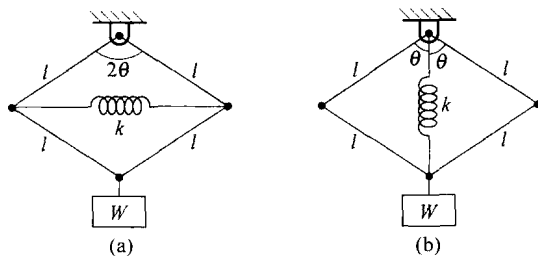


图 2.55 习题 2.21 图

- 2.22 一个剪形千斤顶用来举起重物 W 。千斤顶的支承杆是刚性的, 套管可以顶着弹簧沿轴自由移动。弹簧刚度分别为 k_1 和 k_2 (见图 2.56)。求重物在垂直方向的固有振动频率。

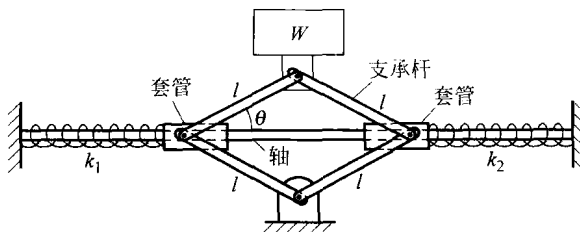


图 2.56 习题 2.22 图

- 2.23 如图 2.57 所示, 一个重物由 6 个刚性杆和 2 个弹簧以两种不同方式悬挂。求两种悬挂方式的固有振动频率。
- 2.24 如图 2.58 所示, 一个小质量块 m 被 4 个线弹性弹簧约束。每个弹簧的原长为 l , 与 x 轴的夹角为 45° 。求质量块在 x 方向上产生微小位移时的运动微分方程。

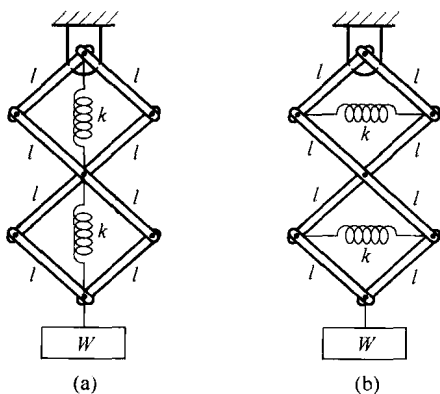


图 2.57 习题 2.23 图

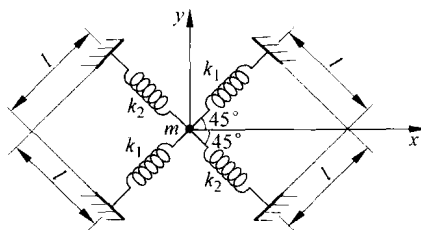


图 2.58 习题 2.24 图

- 2.25 如图 2.59 所示,一个质量块 m 被两对与 X 轴夹角分别为 30° 和 120° 的弹簧支承。现增加一对刚度为 k_3 的弹簧,使系统沿任意方向 x 的振动固有频率为常数。求弹簧刚度 k_3 及其与 X 轴的夹角。
- 2.26 如图 2.60 所示,一个质量块 m 系在绳索上,张紧力为 T 。假设质量块产生垂直于绳的位移时,张紧力 T 不变。(a)写出横向振动的运动微分方程;(b)求出振动的固有频率。

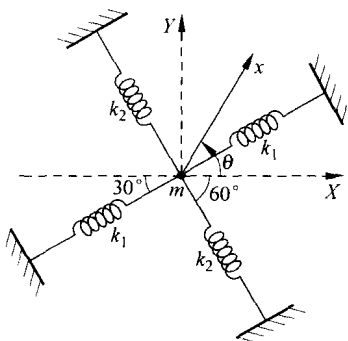


图 2.59 习题 2.25 图

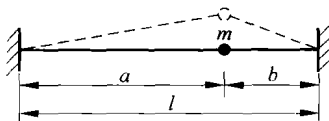


图 2.60 习题 2.26 图

- 2.27 一个重 160 lbf 的人从桥上作蹦极跳。系在他身上的弹性绳长 200 ft,刚度为 10 lbf/in (见图 2.61)。假设桥是刚性的,求蹦极者相对于其自身的平衡位置作上下振动时的运动规律。
- 2.28 如图 2.62 所示,一个重 120 lbf 的杂技演员行走在一根绷紧的钢丝上。图中所给位置在垂直方向上的固有频率为 10 rad/s。求钢丝的拉力。

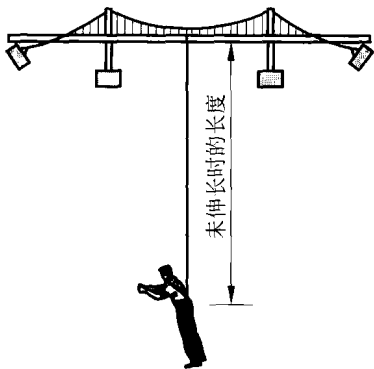


图 2.61 习题 2.27 图

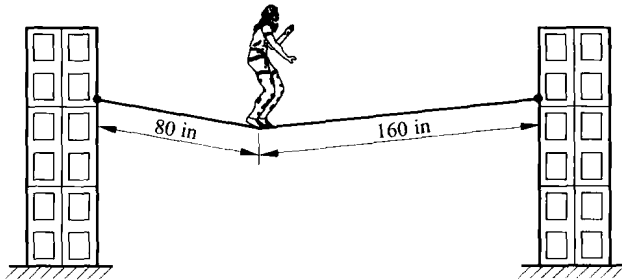


图 2.62 习题 2.28 图

- 2.29 图 2.63 为一个离心式调速器的简图。每根杆的长度为 l ,每个球的质量为 m ,弹簧的原长为 h 。如果角速度为 ω ,找出系统的平衡位置,并求出在平衡位置附近作小幅振动时的固有频率。

- 2.30 图 2.64 所示的是哈特尼尔(Hartnell)调速器,弹簧刚度为 10^4 N/m ,每个球重 25 N 。球臂长 20 cm ,套筒长 12 cm ,转轴到曲杆转轴的距离为 16 cm 。当球臂处于垂直位置的时候,弹簧被压缩了 1 cm 。求(a)当球臂保持垂直的时候,调速器的速度;(b)球臂在垂直位置有小位移时的固有振动频率。

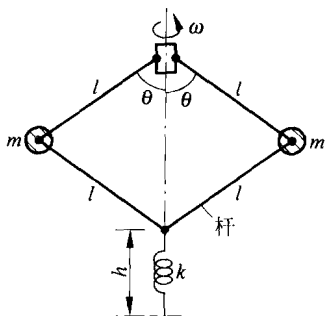


图 2.63 习题 2.29 图

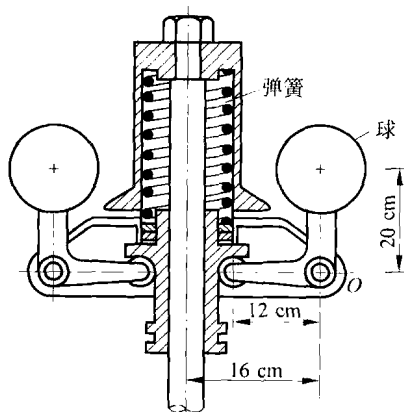


图 2.64 哈特尼尔调速器

- 2.31 一个正方形平台 $PQRS$ 上放着一辆小汽车,它们的总质量为 M 。平台由 4 条从定点 O 引出的弹性钢丝绳吊着,如图 2.65 所示。悬点 O 与平台水平平衡位置的垂直距离为 h 。如果平板边长为 a ,每条钢丝绳刚度均为 k 。求平台垂直振动的周期。
- 2.32 如图 2.66 所示,一个斜压力计用来测量压力。如管中的水银柱总长为 L ,求水银摆动的固有频率的表达式。

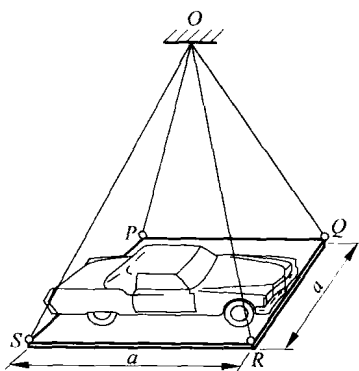


图 2.65 习题 2.31 图

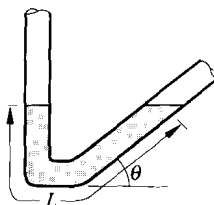


图 2.66 习题 2.32 图

- 2.33 一个质量为 250 kg 的箱子被直升机吊着(如图 2.67(a)所示)。这个情形可以简化为图 2.67(b)。直升机的螺旋桨速度为 300 r/min, 求钢索的直径, 使箱子振动的固有频率至少是螺旋桨频率的 2 倍。

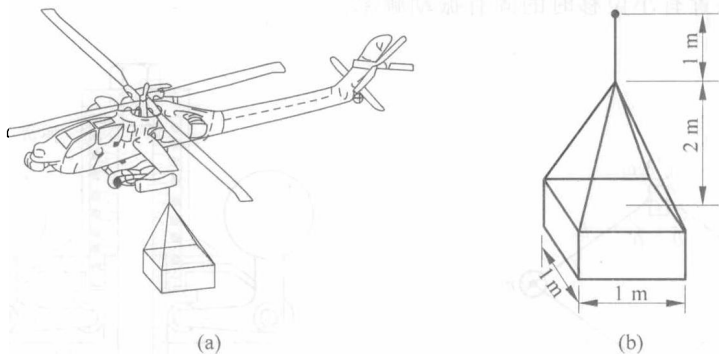


图 2.67 习题 2.33 图

- 2.34 如图 2.68 所示, 一个压力罐的顶部被一组长 2 m 的钢索吊着。当压力罐顶部增加一个 5000 kg 的质量后, 系统的轴向振动周期(垂直方向)由 5 s 变为 4.0825 s。求钢索的等效横截面积和压力罐顶部的质量。

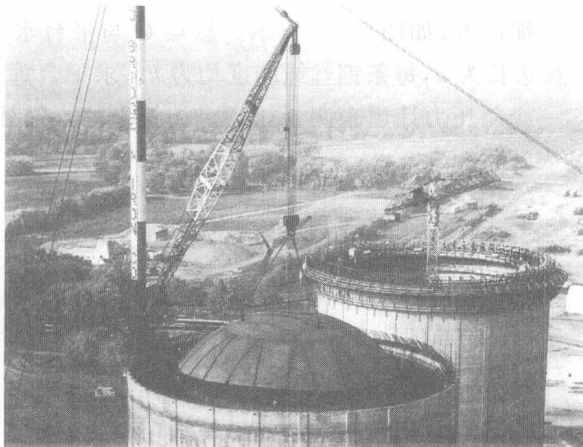


图 2.68 习题 2.34 图(经 CBI Industries Inc. 授权使用)

- 2.35 如图 2.69 所示, 一个飞轮被安装在一个垂直轴上, 轴的直径为 d , 长为 l , 两端固定; 飞轮重 W , 回转半径为 r 。分别求出系统作轴向、横向和扭转振动的固有频率。
- 2.36 如图 2.70 所示, 一座电视发射塔由 4 根张紧钢索加固。每条钢索均受拉, 截面积为 0.5 in^2 , 发射塔可以简化为一个边长为 1 in 的方形截面钢质梁以便估算其质量和刚度, 求发射塔沿 y 轴方向发生弯曲振动的固有频率。

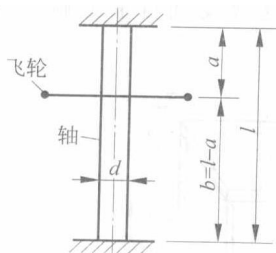


图 2.69 习题 2.35 图

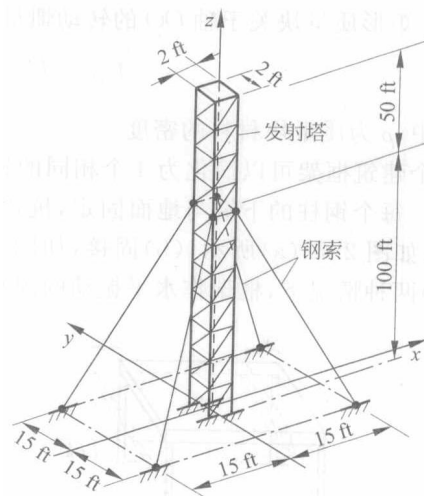


图 2.70 习题 2.36 图

- 2.37 图 2.71(a)中,一个厚 $1/8$ in 的钢质交通标志牌固定一根钢质立柱上。立柱高 72 in, 截面积为 $2\text{ in} \times 1/4\text{ in}$ 。它可以承受扭转振动(关于 z 轴)或弯曲振动(在 zx 面内或在 yz 面内)。确定立柱的风致振动模式。设风速波动的频率为 1.25 Hz 。

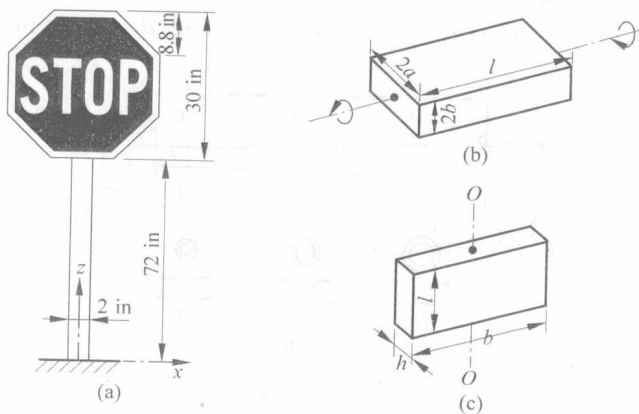


图 2.71 习题 2.37 图

提示:

- (1) 求振动固有频率时忽略立柱的重量。
- (2) 矩形截面梁的扭转刚度(如图 2.71(b))为

$$k_t = 5.33 \frac{ab^3 G}{l} \left[1 - 0.63 \frac{b}{a} \left(1 - \frac{b^4}{12a^4} \right) \right]$$

其中, G 为材料的剪切弹性模量。

(3) 矩形质量块关于轴 OO 的转动惯量(如图 2.71(c))为

$$I_{(O)} = \frac{\rho l}{3}(b^3 h + h^3 b)$$

其中, ρ 为质量块材料的密度。

- 2.38 一个建筑框架可以简化为 4 个相同的钢质支柱(每个重 w)和一个重为 W 的刚性平板。每个钢柱的下端与地面固定,抗弯刚度为 EI 。假设平板与支柱的连接为(a)铰接,如图 2.72(a)所示;(b)固接,如图 2.72(b)所示。考虑支柱自重影响,求在(a), (b)两种情况下,框架作水平振动的固有频率。

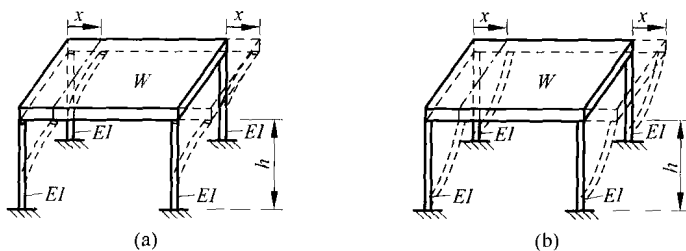


图 2.72 习题 2.38 图

- 2.39 如图 2.73 所示,一个抓放机器手臂抓着一个重 10 lbf 的物体。求机器手臂作轴向振动的固有频率。数据如下: $l_1 = 12$ in, $l_2 = 10$ in, $l_3 = 8$ in; $E_1 = E_2 = E_3 = 10^7$ Pa; $D_1 = 2$ in, $D_2 = 1.5$ in, $D_3 = 1$ in; $d_1 = 1.75$ in, $d_2 = 1.25$ in, $d_3 = 0.75$ in。

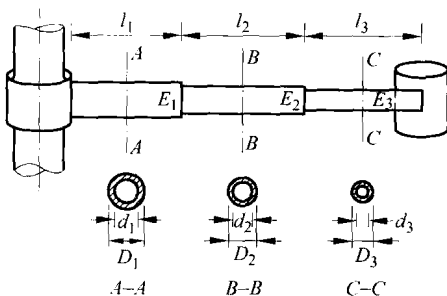


图 2.73 习题 2.39 图

- 2.40 如图 2.74(a)所示,一根刚度为 k 的螺旋弹簧被切成等长的两段,中间连上一个质量为 m 的物体。该系统的固有周期为 0.5 s。如果一根同样的弹簧从原长的 $1/4$ 点处被切开,中间连上一个质量为 m 的物体,如图 2.74(b)所示,则此时系统的固有周期是多少?

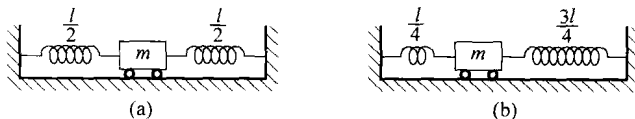


图 2.74 习题 2.40 图

- 2.41* 如图 2.75 所示,一个金属块由两个相同的圆柱形滚筒支承。这两个滚筒的角速度大小相等但方向相反。当金属块的重心产生一个大小为 x 的初始位移时,金属块作简谐振动。如果金属块的运动频率为 ω ,求金属块与滚筒之间的摩擦系数。
- 2.42* 如果两个相同的刚度为 k 的弹簧连接在习题 2.41 中的金属块上,如图 2.76 所示。求金属块与滚筒之间的摩擦系数。

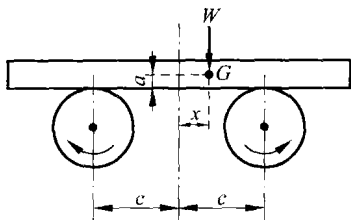


图 2.75 习题 2.41 图

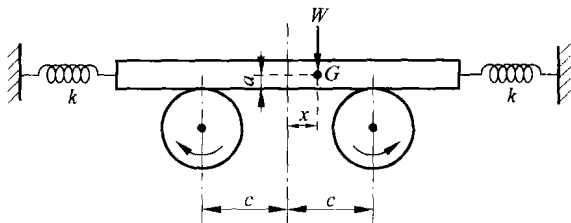


图 2.76 习题 2.42 图

- 2.43 在一个停放报废汽车的院子,一台自重为 3000 lbf 的电磁铁吸住了一台重 2000 lbf 的汽车。由于突然停电,汽车掉了下来。假设起重机和吊索的等效弹簧刚度为 1000 lbf/in。试求:(a)电磁铁的固有振动频率;(b)电磁铁随后的运动;(c)运动过程中吊索中的最大拉力。
- 2.44 求图 2.77 所示系统的运动微分方程,分别利用以下方法:(a)牛顿第二定律;(b)达朗贝尔原理;(c)虚功原理;(d)能量守恒定律。
- 2.45 对图 2.78 所示系统,先画受力分析图,再运用牛顿第二定律建立系统的运动微分方程。

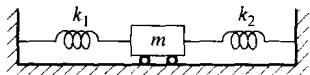


图 2.77 习题 2.44 图

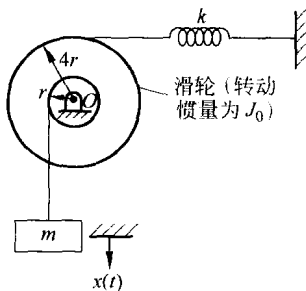


图 2.78 习题 2.45 图

- 2.46 对图 2.79 所示系统,先画受力分析图,再运用牛顿第二定律建立系统的运动微分方程。
- 2.47 运用能量守恒定律建立图 2.78 所示系统的运动微分方程。
- 2.48 运用能量守恒定律建立图 2.79 所示系统的运动微分方程。
- 2.49 一根长 1 m 的钢梁在其自由端放置着质量为 50 kg 的质量块,如图 2.80 所示。将其简化为一个单自由度系统,求质量块作横向振动时的固有频率。

* 表示此题为设计题或无唯一解的题。

- 2.50 一根长 1 m 的钢梁在其自由端放置着质量为 50 kg 的质量块,如图 2.81 所示。将其简化为一个单自由度系统,求质量块作横向振动时的固有频率。

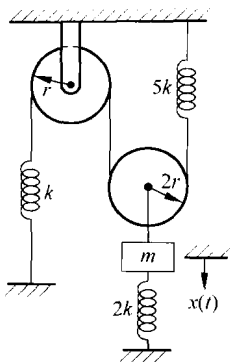


图 2.79 习题 2.46 图

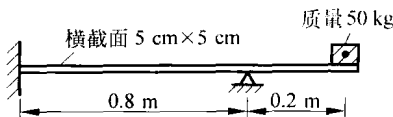


图 2.80 习题 2.49 图

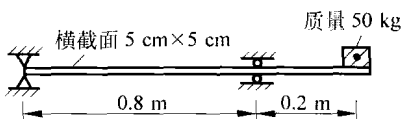


图 2.81 习题 2.50 图

- 2.51 一个弹簧-质量系统, $k=500 \text{ N/m}$, $m=2 \text{ kg}$, $x_0=0.1 \text{ m}$, $\dot{x}_0=5 \text{ m/s}$ 。求质量块的位移, 速度和加速度。
- 2.52 一个弹簧-质量系统, $\omega_n=10 \text{ rad/s}$, 初始条件为 $x_0=0.05 \text{ m}$, $\dot{x}_0=1 \text{ m/s}$ 。求系统的位移(x)、速度(\dot{x})、加速度(\ddot{x}), 并画出 $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$ 从 $t=0$ 到 $t=5 \text{ s}$ 的图形。
- 2.53 一个弹簧-质量系统的自由振动响应频率为 2 rad/s , 振幅为 10 mm , 初相角为 1 rad 。求产生自由振动的初始条件。假设系统阻尼比为 0.1 。
- 2.54 一辆汽车, 空车时的固有频率为 20 rad/s , 载有 500 kg 乘客时的固有频率为 17.32 rad/s 。将汽车看作单自由度系统, 求它的质量和刚度。
- 2.55 一个弹簧-质量系统, 质量块的质量为 2 kg , 弹簧的刚度为 3200 N/m , 初始位移 $x_0=0$ 。要使系统自由振动的振幅不超过 0.1 m , 那么最大初始速度是多少?
- 2.56 一个螺旋弹簧, 由直径为 d 的琴用钢丝制成。它的簧圈平均直径 D 为 0.5625 in , 有效圈数为 N 。若它的振动频率 f 为 193 Hz , 刚度 k 为 26.4 lb/in , 求钢丝直径 d 和有效圈数 N 。假设剪切模量 $G=11.5 \times 10^6 \text{ lbf/in}^2$, 密度 $\rho=0.282 \text{ lb/in}^3$, 刚度 k 与频率 f 的计算公式分别为

$$k = \frac{d^4 G}{8D^3 N}, \quad f = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{kg}{W}}$$

其中, W 为弹簧重量; g 为重力加速度。

- 2.57 如果将习题 2.56 中螺旋弹簧的材料由琴用钢丝换为铝丝, $G=4 \times 10^6 \text{ lbf/in}^2$, $\rho=0.1 \text{ lb/in}^3$, 其相应结果是多少?
- 2.58 一个钢质悬臂梁在其自由端放置着一台机器。为了减轻重量, 想把钢质梁换成同样尺寸的铝质梁。试求系统固有频率的变化。
- 2.59 一个单摆, 在其静止位置受到一个大小为 1 rad/s 的角速度后振动起来。若已知摆动的幅值为 0.5 rad 。求单摆的固有频率和摆长。

- 2.60 一个直径为 250 mm 的皮带轮通过皮带带动另一个直径为 1000 mm 的皮带轮(见图 2.82),被动轮的转动惯量为 $0.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。两轮间的皮带表示成两根弹簧,刚度为 k 。当 k 取何值时系统的固有频率为 6 Hz?

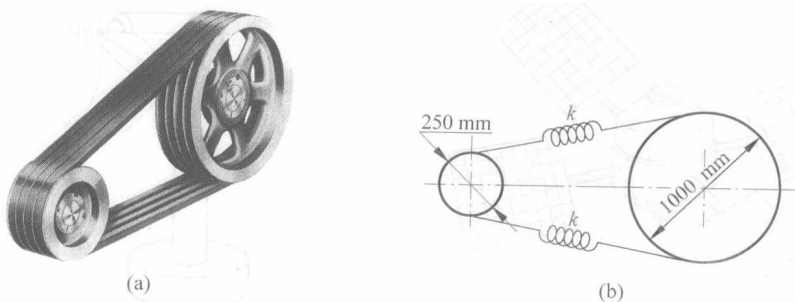


图 2.82 习题 2.60 图(经 Reliance Electric Company 授权使用)

- 2.61 推导如图 1.1 所示单摆的固有频率的表达式并求单摆的周期,其中 $m=5 \text{ kg}$, $l=0.5 \text{ m}$ 。
2.62 一个质量为 m 的物体连在一根杆(质量可忽略)的末端,并在图 2.83 所示的 3 种不同布置下振动。哪一种情况的固有频率最大?

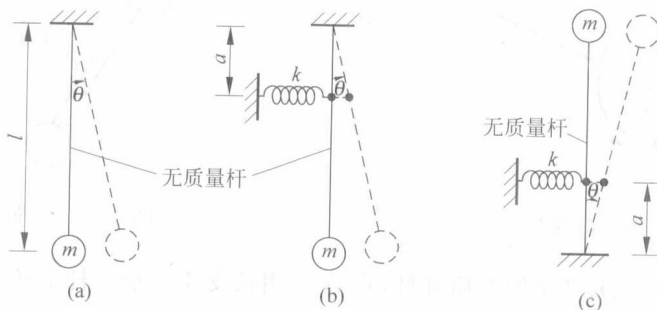


图 2.83 习题 2.62 图

- 2.63 如图 2.84 所示,一艘宇宙飞船有 4 块太阳能电池板。每块板的尺寸为 $5 \text{ ft} \times 3 \text{ ft} \times 1 \text{ ft}$,密度为 0.1 lb/in^3 。每块板由长 12 in、直径 1 in 的铝杆与飞船主体连接。假设飞船主体非常大(刚性),求每块板沿铝杆轴向振动的固有频率。
2.64 由于某种原因,电风扇的一个扇叶被去除了(如图 2.85 中虚线所示)。安装扇叶的钢轴 AB 等效为直径是 1 in、长是 6 in 的均质杆。每个扇叶都可模型化为重 2 lbf、长 12 in 的均质细长杆。求余下 3 个叶片关于 y 轴振动的固有频率。
2.65 一个转动惯量为 $1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 的重环安装在一个长 2 m 的双层空心轴的一端(见图 2.86)。如果双层空心轴由钢和铜制成。求重环作扭转振动时的固有周期。
2.66 图 2.87 所示的单摆摆杆的质量相对于摆锤的质量不能忽略,求单摆的固有频率。
2.67 如图 2.14 所示,直径为 0.05 m、长为 2 m 的钢质杆,一端固定,另一端连着一个直径为 1 m、厚度为 0.1 m 的钢质圆盘。求系统作扭转振动时的固有频率。

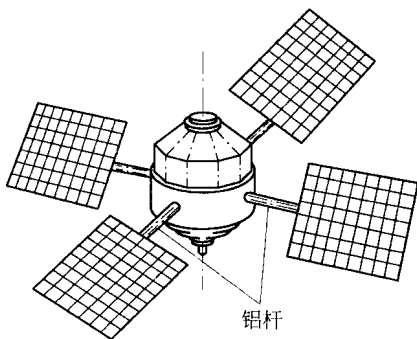


图 2.84 习题 2.63 图

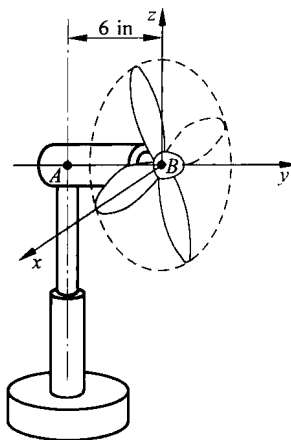


图 2.85 习题 2.64 图

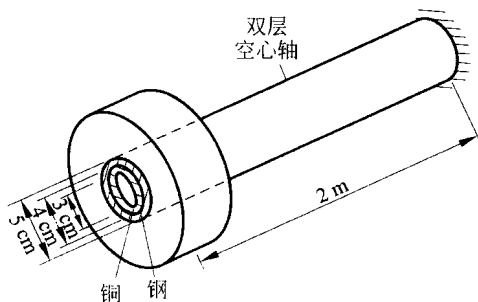


图 2.86 习题 2.65 图

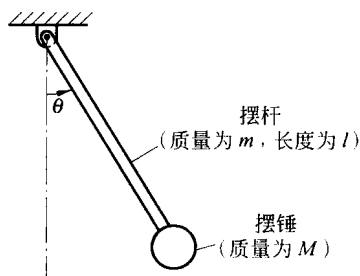


图 2.87 习题 2.66 图

- 2.68 一根质量为 m 、长为 l 的均质细杆, 在 A 点用铰支座支承。杆上还连接着 4 根线性弹簧和 1 个扭转弹簧, 如图 2.88 所示。如果 $k=2000 \text{ N/m}$, $k_t=1000 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$, $m=10 \text{ kg}$, $l=5 \text{ m}$, 求系统的固有频率。
- 2.69 一个质量为 m 、转动惯量为 J_0 的圆柱体自由转动, 没有滑动。它被两根刚度分别为 k_1 , k_2 的弹簧约束, 如图 2.89 所示。求振动的固有频率, 并求出当固有频率最大时 a 的值。

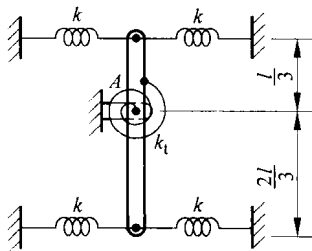


图 2.88 习题 2.68 图

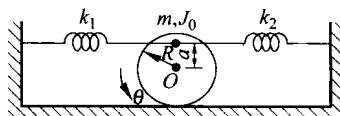


图 2.89 习题 2.69 图

- 2.70 如果习题 2.61 中的单摆放在垂直上升、加速度为 5 m/s^2 的火箭中,那么单摆的周期是多少?
- 2.71 如图 2.90 所示,均质刚性杆 OA 长为 l ,质量为 m 。建立其运动微分方程,并求出固有频率。
- 2.72 一个均质圆盘装在水平轴 O 上,如图 2.91 所示。求系统的固有频率,并求出当 b 值变化时固有频率的最大值。

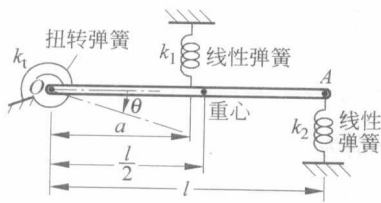


图 2.90 习题 2.71 图

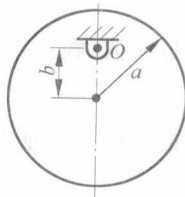


图 2.91 习题 2.72 图

- 2.73 求图 2.92 所示系统的运动微分方程,分别利用以下方法:(a)牛顿第二定律;(b)达朗贝尔原理;(c)虚功原理。
- 2.74 分析图 2.93 所示简支梁的自重对振动固有频率的影响。

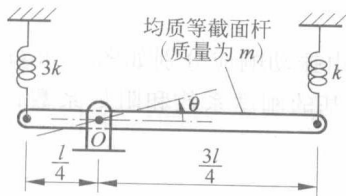


图 2.92 习题 2.73 图

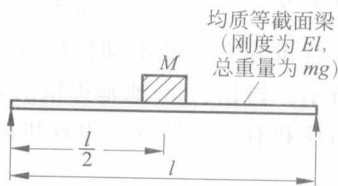


图 2.93 习题 2.74 图

- 2.75 用瑞利法解习题 2.7。
- 2.76 用瑞利法解习题 2.13。
- 2.77 求图 2.58 所示系统的固有频率。
- 2.78 用瑞利法解习题 2.26。
- 2.79 用瑞利法解习题 2.68。
- 2.80 用瑞利法解习题 2.71。
- 2.81 一个木制矩形棱柱的密度为 ρ_w ,高为 h ,横截面尺寸为 $a \times b$ 。将其压入一个盛有油的容器中,并使其在垂直方向上自由振动(见图 2.94)。利用瑞利法求其固有频率,假设油的密度为 ρ 。如果矩形棱柱被一个半径为 r 、高为 h 、密度为 ρ_w 的均质圆柱体代替,则固有频率有何变化?
- 2.82 用能量法求图 2.89 所示系统的固有频率。

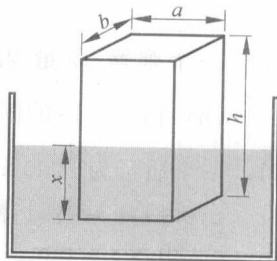


图 2.94 习题 2.81 图

- 2.83 用能量法求图 2.78 所示系统的固有振动频率。
- 2.84 一个单摆在真空中的频率为 0.5 Hz, 在黏性流体介质中的频率为 0.45 Hz。求阻尼常数。假设摆锤质量为 1 kg。
- 2.85 一个黏性阻尼单自由度系统的相邻振幅比为 18 : 1。如果阻尼值 (a) 加倍, (b) 减半, 求各自的相邻振幅比。
- 2.86 假设初相角为 0, 证明弱阻尼单自由度系统的响应 $x(t)$, 在

$$\sin \omega_d t = \sqrt{1 - \zeta^2}$$

时达到最大值; 在

$$\sin \omega_d t = -\sqrt{1 - \zeta^2}$$

时达到最小值。并证明 $x(t)$ 的包络线方程分别为

$$x = \sqrt{1 - \zeta^2} X e^{-\zeta \omega_n t}$$

和

$$x = -\sqrt{1 - \zeta^2} X e^{-\zeta \omega_n t}$$

- 2.87 求当临界阻尼系统的响应达到最大值时的时间表达式, 并求出最大响应的表达式。
- 2.88 设计一个减振器使其位移不大于初始位移的 1.15 倍, 求所需的阻尼比 ζ_0 。如果令 ζ 分别等于 (a) $\frac{3}{4} \zeta_0$, (b) $\frac{5}{4} \zeta_0$, 则超程是多少?
- 2.89 一台重 500 N 的电动机放置在不同地基上的自由振动响应分别如图 2.95(a) 和 (b) 所示。讨论: (a) 地基提供的阻尼的性质; (b) 地基的刚度系数和阻尼系数; (c) 在无阻尼和有阻尼情况下电动机的固有频率。

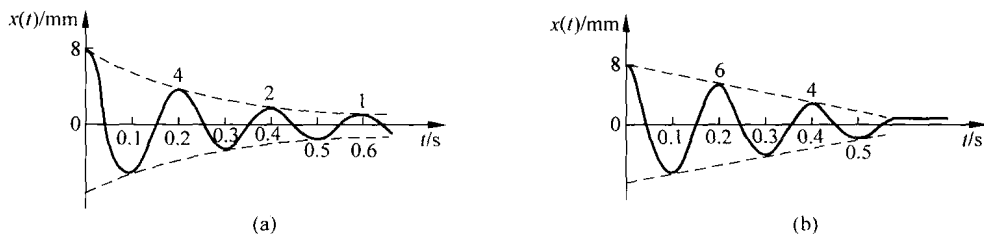


图 2.95 习题 2.89 图

- 2.90 一个弹簧-质量-阻尼系统, $m = 50$ kg, $k = 5000$ N/m。求: (a) 临界阻尼常数 c_c ; (b) 当 $c = \frac{c_c}{2}$ 时的固有频率; (c) 对数衰减系数。
- 2.91 一个质量为 2000 kg 的火车头, 以 $v = 10$ m/s 的速度前进时被铁轨末端的弹簧-阻尼系统挡住并停下来, 如图 2.96 所示。如果弹簧刚度 $k = 40$ N/mm, 阻尼常数 $c = 20$ N · s/mm。求: (a) 火车头与弹簧-阻尼系统接触后的最大位移; (b) 达到最大位移所需的时间。

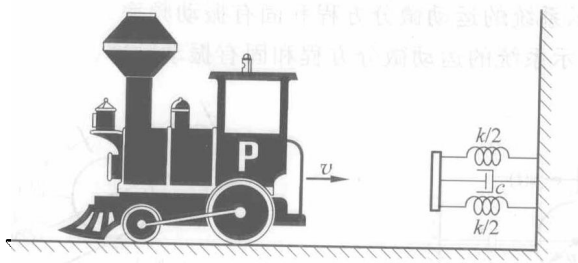


图 2.96 习题 2.91 图

- 2.92 一个扭转摆在真空中的固有频率为每分钟 200 个循环, 圆盘的转动惯量为 $0.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。将扭转摆浸没入油中后, 测得其固有频率为每分钟 180 个循环。求阻尼常数。如果将圆盘放入油中时有 2° 的初始位移, 求在第一个周期末的位移。
- 2.93 一个骑着自行车的男孩可以简化为一个弹簧-质量-阻尼系统。它的等效质量、刚度和阻尼常数分别为 800 N , $50\,000 \text{ N/m}$ 和 $1000 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ 。由于路基下沉造成了如图 2.97 所示的路面不平。如果自行车的速度为 5 m/s (18 km/h), 求男孩在垂直方向上的位移变化规律。假设自行车在遇到路面的阶跃变化前没有竖直方向的振动。

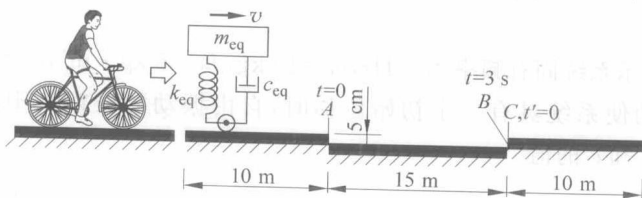


图 2.97 习题 2.93 图

- 2.94 一个木制矩形棱柱, 重 20 lbf , 高 3 ft , 截面尺寸为 $1 \text{ ft} \times 2 \text{ ft}$, 漂浮于一个盛有油的容器中, 并一直保持竖直状态。油的摩擦阻力假设等效于黏性阻尼系数 ζ 。棱柱被从平衡位置下压 6 in 后释放, 测得第一个周期末达到的深度为 5.5 in 。求油的阻尼系数。
- 2.95 一个在黏性阻尼中振动的物体, 每秒完成 5 个循环的摆动, 并且 50 个周期内振幅减少为原来的 10%。求对数衰减系数和阻尼比。如果去掉阻尼, 振动周期会减少为原来的几分之几?
- 2.96 一门大炮的最大允许后坐距离为 0.5 m 。如果大炮的初始后坐速度在 8 m/s 和 10 m/s 之间, 求大炮的质量和后坐机构的刚度系数。假设后坐机构使用了临界阻尼器, 并且大炮的质量至少为 500 kg 。
- 2.97 黏性阻尼系统的刚度为 5000 N/m , 临界阻尼常数为 $0.2 \text{ N} \cdot \text{s/mm}$, 对数衰减系数为 2.0。如果系统的初始速度为 1 m/s , 求系统的最大位移。
- 2.98 当(a)只有初始位移, (b)只有初始速度时, 解释为什么过阻尼系统不会通过静平衡位置。

2.99 求图 2.98 所示系统的运动微分方程和固有振动频率。

2.100 求图 2.99 所示系统的运动微分方程和固有振动频率。

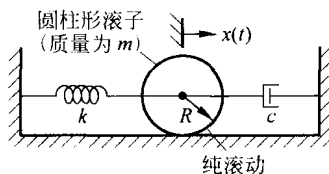


图 2.98 习题 2.99 图

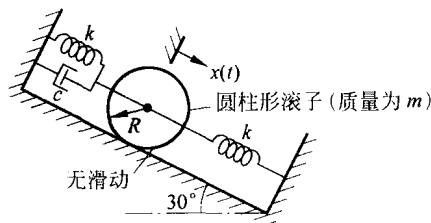


图 2.99 习题 2.100 图

2.101 求图 2.100 所示系统的运动微分方程和固有振动频率。

2.102 用虚功原理求图 2.98 所示系统的运动微分方程。

2.103 用虚功原理求图 2.99 所示系统的运动微分方程。

2.104 用虚功原理求图 2.100 所示系统的运动微分方程。

2.105 一个木制矩形棱柱,截面尺寸为 $40\text{ cm} \times 60\text{ cm}$,高为 120 cm ,质量为 40 kg ,漂浮于液体中,如图 2.94 所示。当受到扰动时,棱柱产生固有周期为 0.5 s 的自由振动,求液体的密度。

2.106 图 2.101 所示系统固有频率为 5 Hz , $m=10\text{ kg}$, $J_0=5\text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $r_1=10\text{ cm}$, $r_2=25\text{ cm}$ 。当受到扰动使系统具有一个初始位移时,自由振动的振幅在 10 个周期内减小了 80% 。求 k 和 c 的值。

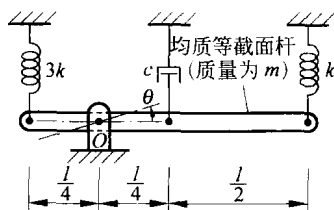


图 2.100 习题 2.101 图

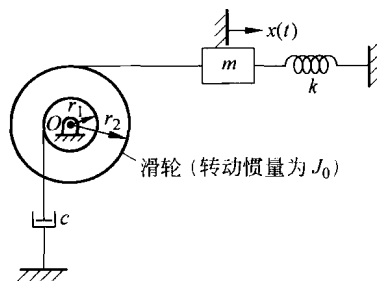


图 2.101 习题 2.106 图

2.107 一个刻度盘指示器的转子与一个单自由度扭转系统的扭簧和扭转阻尼器相连。表盘上刻度均匀,并且转子的平衡位置对应着零刻度位置。当有一个 $2 \times 10^{-3}\text{ N} \cdot \text{m}$ 的扭矩作用时,转子产生了 50° 的角位移,表盘上指针指向 80 刻度位置。当转子从此位置被释放时,第一秒末指针指向 -20 刻度位置,第二秒末指向 5 刻度位置。求: (a) 转子的转动惯量; (b) 转子的无阻尼固有周期; (c) 扭转阻尼系数; (d) 扭转弹簧刚度。

- 2.108 求以下黏性阻尼系统 ζ 和 ω_d 的值:
- (a) $m=10\text{ kg}, c=150\text{ N}\cdot\text{s/m}, k=1000\text{ N/m}$;
- (b) $m=10\text{ kg}, c=200\text{ N}\cdot\text{s/m}, k=1000\text{ N/m}$;
- (c) $m=10\text{ kg}, c=250\text{ N}\cdot\text{s/m}, k=1000\text{ N/m}$ 。
- 2.109 求习题 2.108 中黏性阻尼系统的自由振动响应, 设 $x_0=0.1\text{ m}, \dot{x}_0=10\text{ m/s}$ 。
- 2.110 具有以下参数的黏性阻尼单自由度系统的简谐运动由 $x(t)=0.2\sin\omega_d t$ 给出, 求系统一周期内的能量损耗:
- (a) $m=10\text{ kg}, c=50\text{ N}\cdot\text{s/m}, k=1000\text{ N/m}$;
- (b) $m=10\text{ kg}, c=150\text{ N}\cdot\text{s/m}, k=1000\text{ N/m}$ 。
- 2.111 一个单自由度系统, 由一个质量为 20 kg 的物体和一个刚度为 4000 N/m 的弹簧组成。相邻周期的振幅为 $50, 45, 40, 35, \dots\text{ mm}$ 。求阻尼力的种类和大小, 以及阻尼振动的频率。
- 2.112 一个质量为 20 kg 的物体, 连在一根刚度为 10 N/mm 的弹簧上, 在干燥表面上来回滑动。4 个整周期后, 振幅为 100 mm 。如果原振幅为 150 mm , 两表面间的摩擦系数是多少? 振动 4 个周期所需的时间是多少?
- 2.113 一个质量为 10 kg 的物体连在一根刚度为 3000 N/m 的弹簧上。使物体产生 100 mm 的初始位移后释放。假设物体在水平面上运动, 如图 2.33(a) 所示。求物体静止于何处。假设物体与表面间的摩擦系数为 0.12 。
- 2.114 一个重 25 N 的重物悬挂在一个刚度为 1000 N/m 的弹簧上。假设重物在垂直方向振动时受一个常阻尼力。使重物从静平衡位置向下产生 10 cm 的初始位移, 然后释放。若重物经过 2 个周期后停止, 求阻尼力的大小。
- 2.115 一个刚度为 1000 N/m 的弹簧下端悬挂着一个质量为 20 kg 的物体。设物体在垂直方向运动时受到大小为 50 N 的库仑力作用。使物体从静平衡位置向下产生 5 cm 的初始位移后, 求: (a) 到物体停止运动要经过多少个半周期; (b) 物体需要多长时间才停止下来; (c) 弹簧的最终伸长量。
- 2.116 查贝(Charpy)冲击实验是一种动力学实验。实验时, 用摆锤(或锤子)冲击试样直至破坏, 并把试样破坏前所吸收的能量记录下来。这些能量的值用来比较不同材料的冲击强度。如图 2.102 所示, 摆锤连接在一根杆上, 从特定的位置释放, 使它落下并冲击试样。如果让摆锤自由摆动(没有试样), 求: (a) 每个周期由摩擦产生的角度减小量的表达式; (b) 如果摆锤从 θ_0 释放, $\theta(t)$ 的解; (c) 运动停止时经过的周期数。假设摆锤的质量为 m , 轴与摆轴承之间的摩擦系数为 μ 。
- 2.117 求作正弦振动的库仑阻尼系统的等效黏性阻尼系数。
- 2.118 一个单自由度系统由一个质量块、一个弹簧和一个同时具有干摩擦和黏性阻尼的阻尼器组成。如果振幅为 20 mm , 自由振动的振幅每周期减少 1% ; 如果振幅为 10 mm ,

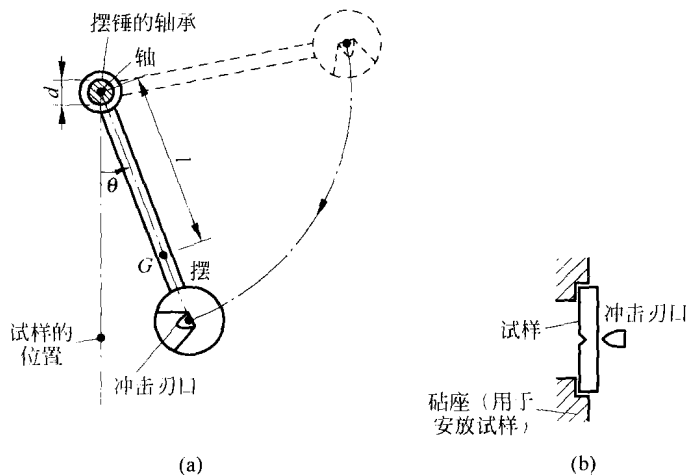


图 2.102 习题 2.116 图

自由振动的振幅每周期减少 2%。求阻尼中的干摩擦成分 $\mu N/k$ 的值。

- 2.119 一个放置在粗糙表面上的金属块,连接着一个弹簧。金属块从平衡位置产生一个 10 cm 的初始位移。已知运动的固有周期为 1.0 s,并且振幅每周期减少 0.5 cm。求: (a) 金属块与表面间的动摩擦系数; (b) 金属块停止时经过了多少个运动周期。
- 2.120 一个弹簧-质量系统, $k=10\,000\text{ N/m}$, $m=5\text{ kg}$, 在粗糙表面上振动。如果摩擦力 $F=20\text{ N}$, 并且物体的振幅 10 个周期内减少了 50 mm。求完成 10 个周期所需的时间。
- 2.121 一个弹簧-质量系统布置在与水平面成 30° 角的斜面上, 如图 2.103 所示。 (a) 建立运动微分方程; (b) 求系统的响应。数据如下: $m=20\text{ kg}$, $k=1000\text{ N/m}$, $x_0=0.1\text{ m}$, $\dot{x}_0=5\text{ m/s}$ 。
- 2.122 一个弹簧-质量系统, 物体受 25 N 的力时, 从没有变形时的位置产生了 10 cm 的初始位移 (这个力是物体重量的 5 倍)。如果物体从这个位置释放, 那么经过多长时间物体才能停下来? 最终位置与未变形时的位置之间的距离是多少? 假设摩擦系数为 0.2。
- 2.123 由实验得出的一个组合结构的力-变形曲线如图 2.104 所示, 求曲线对应的滞后阻尼系数、对数衰减系数、等效黏性阻尼比。
- 2.124 一个由纤维加强复合材料制成的板, 可以看作质量为 1 kg、刚度为 2 N/m 的单自由度系统。若相邻振幅比为 1.1, 求滞后阻尼系数 β 、等效黏性阻尼常数 c_{eq} 和振幅为 10 mm 时每个周期的能量损失。
- 2.125 一个弯曲刚度为 200 N/m 的组合悬臂梁, 在其自由端放置一个质量为 2 kg 的物体。

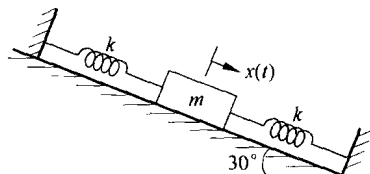


图 2.103 习题 2.121 图

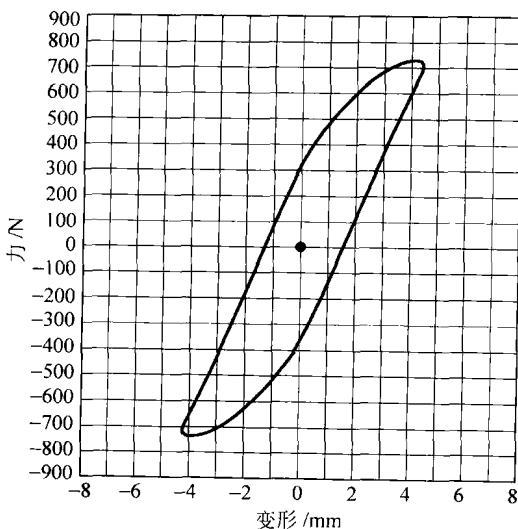


图 2.104 习题 2.123 图

物体产生了一个 30 mm 的初始位移后释放,经过 100 个周期后,振幅变为 20 mm。估算梁的滞后阻尼系数 β 。

- 2.126 一个螺旋弹簧的上端连接着一个质量为 5 kg 的质量块。给质量块一个 25 mm 的初始位移,使系统开始振动。若质量块的振幅经过 100 个周期后减少到 10 mm,螺旋弹簧的刚度为 200 N/m,求弹簧滞后阻尼系数 β 的值。
- 2.127 用 MATLAB 求解具有库仑阻尼的弹簧-质量系统的自由振动响应。数据如下:
 $m=5 \text{ kg}, k=100 \text{ N/m}, \mu=0.5, x_0=0.4 \text{ m}, \dot{x}_0=0$ 。
- 2.128 用 MATLAB 画出临界阻尼系统(式(2.80))的响应图像。数据如下:
 (a) $x_0=10 \text{ mm}, 50 \text{ mm}, 100 \text{ mm}; \dot{x}_0=0, \omega_n=10 \text{ rad/s}$ 。
 (b) $x_0=0, \dot{x}_0=10 \text{ mm/s}, 50 \text{ mm/s}, 100 \text{ mm/s}; \omega_n=10 \text{ rad/s}$ 。
- 2.129 画出式(2.81)中每一项的图像。数据如下: $\omega_n=10 \text{ rad/s}, \zeta=2.0, x_0=20 \text{ mm}, \dot{x}_0=50 \text{ mm/s}$ 。
- 2.130 用 MATLAB 程序 Program2.m 画出黏性阻尼系统的自由振动响应图像。其中 $m=4 \text{ kg}, k=2500 \text{ N/m}, x_0=100 \text{ mm}, \dot{x}_0=-10 \text{ m/s}, \Delta t=0.01 \text{ s}, n=50$, 阻尼常数 $c=0$ 。
- 2.131 用 MATLAB 程序 Program2.m 画出黏性阻尼系统的响应图像。其中 $m=4 \text{ kg}, k=2500 \text{ N/m}, x_0=100 \text{ mm}, \dot{x}_0=-10 \text{ m/s}, \Delta t=0.01 \text{ s}, n=50$, 阻尼常数 $c=100 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ 。
- 2.132 用 MATLAB 程序 Program2.m 画出黏性阻尼系统的响应图像。其中 $m=4 \text{ kg}, k=2500 \text{ N/m}, x_0=100 \text{ mm}, \dot{x}_0=-10 \text{ m/s}, \Delta t=0.01 \text{ s}, n=50$, 阻尼常数 $c=200 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ 。
- 2.133 用 MATLAB 程序 Program2.m 画出黏性阻尼系统的响应图像。其中 $m=4 \text{ kg}, k=2500 \text{ N/m}, x_0=100 \text{ mm}, \dot{x}_0=-10 \text{ m/s}, \Delta t=0.01 \text{ s}, n=50$, 阻尼常数 $c=400 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ 。

- 2.134 用 MATLAB 程序求解习题 2.121 中的系统响应。
 2.135 用 2.10 节中的 C++ 程序求解习题 2.130。
 2.136 用 2.10 节中的 C++ 程序求解习题 2.131。
 2.137 用 2.10 节中的 C++ 程序求解习题 2.132。
 2.138 用 2.10 节中的 C++ 程序求解习题 2.133。
 2.139 用 2.11 节中的 Fortran 程序求解习题 2.130。
 2.140 用 2.11 节中的 Fortran 程序求解习题 2.131。
 2.141 用 2.11 节中的 Fortran 程序求解习题 2.132。
 2.142 用 2.11 节中的 Fortran 程序求解习题 2.133。

设计题目

- 2.143* 如图 2.105 所示,一个质量为 1000 kg 、转动惯量为 $500\text{ kg}\cdot\text{m}^2$ 的水轮机被安装在一个钢制轴上。水轮机的工作速度为 2400 r/min 。假设轴两端固定,求 l, a 和 b 的值,使水轮机在轴向、横向、周向的振动固有频率大于其工作速度。
 2.144* 为图 2.72(a)和(b)所示的建筑框架设计立柱。要求立柱的重量最小,以使振动固有频率大于 50 Hz 。地板重量 W 为 4000 lbf ,立柱长度 l 为 96 in 。假设立柱是钢制的,管状横截面外径为 d ,壁厚为 t 。
 2.145* 质量为 m 的均质刚性杆的一端通过铰支座 O 与墙体相连,另一端放置一集中质量 M ,如图 2.106 所示。杆绕铰支座 O 转动时受到一个扭簧和一个扭转阻尼器的阻碍。现想用这个装置,加上一个机械计数器,来控制游乐场的入口。求质量 m, M 、扭簧的刚度 k_t 和阻尼力 F_d 。要求:(a)可以使用黏性阻尼或库仑阻尼;(b)当杆从初始位置 $\theta=75^\circ$ 释放后,必须在 2 s 内返回到 5° 以内的关闭状态。

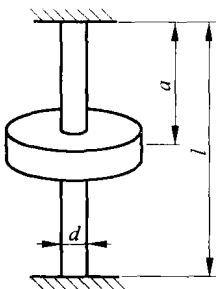


图 2.105 习题 2.143 图

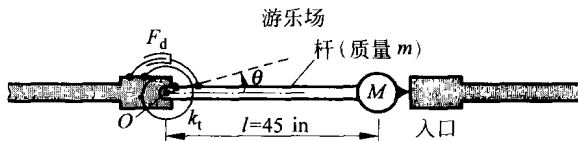


图 2.106 习题 2.145 图

- 2.146 登月舱可以简化为由 4 个对称布置的杆支承的质量块。每根杆可以近似看作可忽略质量的弹簧-阻尼系统(见图 2.107)。设计该系统的弹簧和阻尼器,使有阻尼振动周期在 $1\sim 2\text{ s}$ 之间。

- 2.147 考虑图 2.12(a)所示消防车的伸缩臂和座舱。假设伸缩臂 $PQRS$ 由支柱 QT 支承, 如图 2.108 所示。求支柱 QT 的横截面尺寸, 使装有消防队员的座舱振动固有周期为 1 s。假设伸缩臂的每一段和支柱的横截面均为中空圆截面, 支柱像弹簧一样只产生轴向变形。数据如下:

各段长度: $\overline{PQ}=12\text{ ft}$, $\overline{QR}=10\text{ ft}$, $\overline{RS}=8\text{ ft}$, $\overline{TP}=3\text{ ft}$

伸缩臂和支柱的弹性模量: $30 \times 10^6\text{ lbf/in}^2$

截面外径: PQ 段为 2.0 in, QR 段为 1.5 in, RS 段为 1.0 in

截面内径: PQ 段为 1.75 in, QR 段为 1.25 in, RS 段为 0.75 in

座舱的重量: 100 lbf

消防队员的重量: 200 lbf

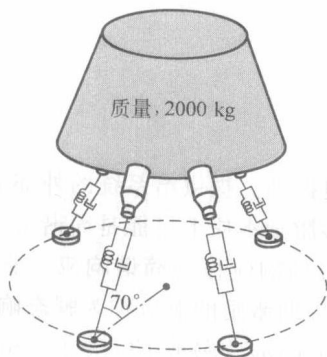


图 2.107 习题 2.146 图

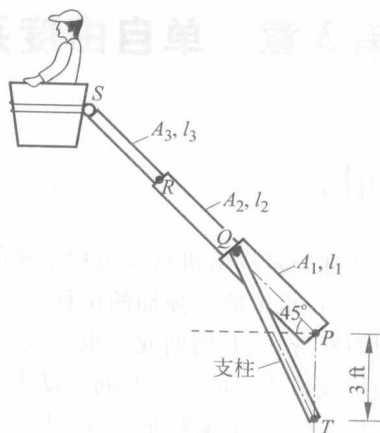
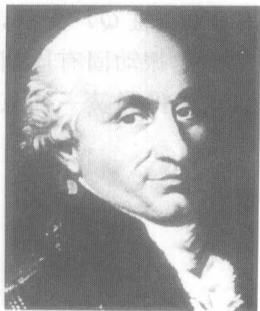


图 2.108 习题 2.147 图



库仑(Charles Augustin de Coulomb, 1736—1806), 法国物理学家、军事工程师。1779年, 总结其早年工作的《简单机械理论》一书面世, 揭示了摩擦力与正压力之间的关系, 即人们熟知的库仑摩擦定律。1784年, 他得到了刚体微幅扭振问题的解。在国际单位制中, 电荷的单位库仑就是用他的名字命名的。

(照片经 Applied Mechanics Reviews 授权使用。)

第3章 单自由度系统在简谐激励下的振动

3.1 引言

当有外部能量供给机械或机构系统时, 一般导致强迫振动。提供给系统的外部能量, 可能是作用力, 也可能是强加的位移激励。作用力或位移激励本质上可能是简谐形式、非简谐但为周期性形式、非周期或随机形式。简谐激励下系统的响应称为简谐响应。非周期激励可能经历或长或短的一段时间。动力学系统对突加非周期激励的响应称为瞬态响应。

本章将讨论在简谐激励 $F(t) = F_0 e^{i(\omega t + \phi)}$ 或 $F(t) = F_0 \cos(\omega t + \phi)$ 或 $F(t) = F_0 \sin(\omega t + \phi)$ (其中, F_0 为幅值, ω 是频率, ϕ 为简谐激励的相角) 作用下的单自由度系统的动态响应。 ϕ 的值取决于 $F(t)$ 在 $t=0$ 时刻的值, 通常取为零。在简谐激励作用下, 系统的响应也将是简谐形式的。若激励频率等于系统的固有频率, 则系统的响应会非常大, 称为共振。应尽量避免出现这种现象, 以防止系统失效。由旋转机器的不平衡导致的振动、在稳定的风中因涡流脱落导致的高耸烟囱的振荡以及在正弦曲线路面上行驶的汽车的重向运动, 均可视为简谐激励下振动的例子。

3.2 运动微分方程

若力 $F(t)$ 作用在图 3.1 所示的黏性阻尼弹簧-质量系统上, 则应用牛顿第二运动定律可得系统的运动微分方程为

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = F(t) \quad (3.1)$$

由于该方程是非齐次的, 所以其通解 $x(t)$ 可表示成齐次解 $x_h(t)$ 与特解 $x_p(t)$ 之和。齐次解即齐次方程

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (3.2)$$

的解,表示系统的自由振动,已在第2章讨论。如2.6.2节所述,该自由振动在3种可能的阻尼条件(欠阻尼、临界阻尼与过阻尼)和所有的初始条件下都将逐渐消失。于是式(3.1)的通解最终演化为特解 $x_p(t)$,它表示系统的稳态振动。只要受到力函数的作用,系统就会有稳态响应。齐次解、特解与通解随时间变化的典型情况如图3.2所示。由该图可知,经过一段时间 τ 之后, $x_h(t)$ 就消失了,而 $x(t)$ 变为 $x_p(t)$ 。由于阻尼存在导致消失的那部分运动(自由振动部分)称为**瞬态振动**。瞬态运动衰减的快慢主要取决于系统的参数 k, c 和 m 。在本章中除了3.3节外,均忽略瞬时运动,只推导如式(3.1)的特解,即在简谐力函数作用下,系统的稳态响应。

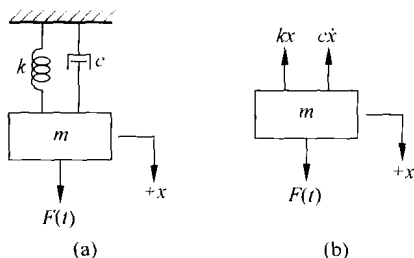


图 3.1 弹簧-质量-阻尼器系统

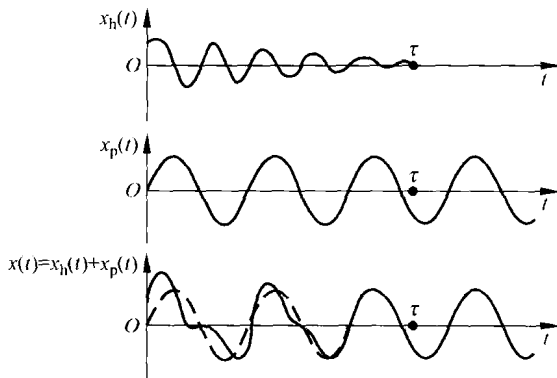


图 3.2 无阻尼时,方程(3.1)的齐次解、特解和一般解

3.3 无阻尼系统在简谐力作用下的响应

在研究阻尼系统的响应前,为简单,先考虑一受简谐力作用的无阻尼系统。若力 $F(t) = F_0 \cos \omega t$ 作用在无阻尼系统的质量块 m 上,则运动微分方程式(3.1)简化为

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \quad (3.3)$$

该方程的齐次解可以表示为

$$x_h(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t \quad (3.4)$$

其中, $\omega_n = (k/m)^{1/2}$ 为系统的固有频率。由于激振力 $F(t)$ 为简谐形式,则特解 $x_p(t)$ 也是简谐的,同时具有与激励频率相同的频率 ω 。于是假定其解的形式为

$$x_p(t) = X \cos \omega t \quad (3.5)$$

其中, X 为常量,表示 $x_p(t)$ 的振幅。将式(3.5)代入式(3.3),可得

$$X = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{\delta_{st}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (3.6)$$

其中, $\delta_{st} = F_0/k$ 表示在力 F_0 作用下质量块的变形。由于 F_0 是常(静态)力, 故有时 δ_{st} 也称为静变形。于是式(3.3)的全解为

$$x(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t + \frac{F_0}{k - m\omega^2} \cos \omega t \quad (3.7)$$

应用初始条件 $x(t=0) = x_0$ 与 $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$, 求得

$$C_1 = x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega^2}, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \quad (3.8)$$

因此

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega^2} \right) \cos \omega_n t + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \right) \sin \omega_n t + \left(\frac{F_0}{k - m\omega^2} \right) \cos \omega t \quad (3.9)$$

式(3.6)中的最大幅值 X 可以表示为

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \quad (3.10)$$

量 X/δ_{st} 表示动态幅值与静态幅值之比, 称为振幅放大系数或幅值比。 X/δ_{st} 随频率比 $r = \omega/\omega_n$ (式 3.10) 的变化如图 3.3 所示, 根据该图, 系统的响应可以分为以下 3 种情况。

情况 1 当 $0 < \omega/\omega_n < 1$ 时, 式(3.10)中的分母为正值, 由式(3.5)给出系统的响应。此时称系统的简谐响应 $x_p(t)$ 与外力同相, 如图 3.4 所示。

情况 2 当 $\omega/\omega_n > 1$ 时, 式(3.10)中的分母为负值, 稳态解可以表示为

$$x_p(t) = -X \cos \omega t \quad (3.11)$$

其中, 运动的幅值 X 重新定义为另一个正量

$$X = \frac{\delta_{st}}{\left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 - 1} \quad (3.12)$$

$F(t)$ 与 $x_p(t)$ 随时间 t 的变化如图 3.5 所示。由于 $x_p(t)$ 与 $F(t)$ 符号相反, 则说明响应与外力反相, 即响应与激励有 180° 的相角差。此外, 当 $\omega/\omega_n \rightarrow \infty$ 时, $X \rightarrow 0$, 即简谐力的频率非常高时, 则系统的响应趋于零。

情况 3 当 $\omega/\omega_n = 1$ 时, 由式(3.10)或式(3.12)给定的幅值 X 成为无限大。激振力频率 ω 等于系统的固有频率 ω_n , 此条件称为共振。为求此条件对应的响应, 将式(3.9)重新表示为

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \delta_{st} \left[\frac{\cos \omega t - \cos \omega_n t}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right] \quad (3.13)$$

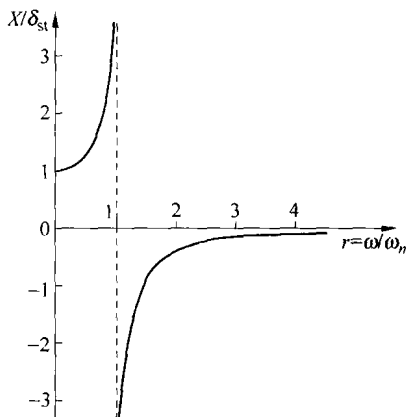
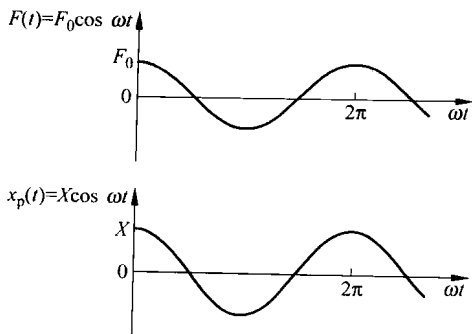
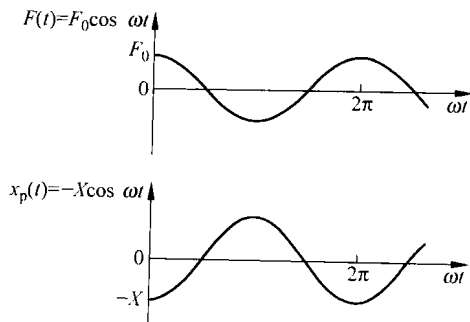


图 3.3 无阻尼系统的振幅放大系数

图 3.4 $0 < \omega/\omega_n < 1$ 时的简谐响应图 3.5 $\omega/\omega_n > 1$ 时的简谐响应

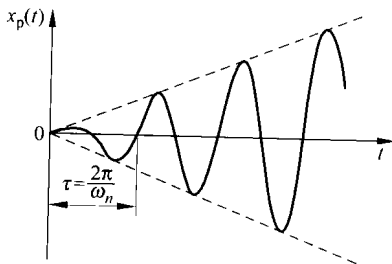
由于该式的最后一项对于 $\omega = \omega_n$ 为 $0:0$ 型的不定式,为此应用罗毕塔(L'Hospital)法则计算该项的极限值:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \omega_n} \left[\frac{\cos \omega t - \cos \omega_n t}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right] &= \lim_{\omega \rightarrow \omega_n} \left[\frac{\frac{d}{d\omega}(\cos \omega t - \cos \omega_n t)}{\frac{d}{d\omega} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)} \right] \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \omega_n} \left[\frac{t \sin \omega t}{2 \frac{\omega}{\omega_n^2}} \right] = \frac{\omega_n t}{2} \sin \omega_n t \end{aligned} \quad (3.14)$$

于是,共振时系统的响应为

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \frac{\delta_{st} \omega_n t}{2} \sin \omega_n t \quad (3.15)$$

由式(3.15)可知,共振时 $x(t)$ 无限地增大。式(3.15)中的最后一项如图 3.6 所示,这表明响应的振幅随时间线性地增大。

图 3.6 $\omega/\omega_n = 1$ 时的响应

3.3.1 总响应

系统的总响应即式(3.7)或式(3.9)也可以表示为

$$x(t) = A \cos(\omega_n t - \phi) + \frac{\delta_{st}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \cos \omega t, \quad \frac{\omega}{\omega_n} < 1 \quad (3.16)$$

$$x(t) = A \cos(\omega_n t - \phi) - \frac{\delta_{st}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \cos \omega t, \quad \frac{\omega}{\omega_n} > 1 \quad (3.17)$$

其中, A 与 ϕ 能像在式(2.21)中那样确定。则总的运动可表示成不同频率的两余弦曲线之和。在式(3.16)中, 激振力频率 ω 小于系统的固有频率, 则总响应如图 3.7(a) 所示。在式(3.17)中, 激振力频率比固有频率大, 总响应如图 3.7(b) 所示。

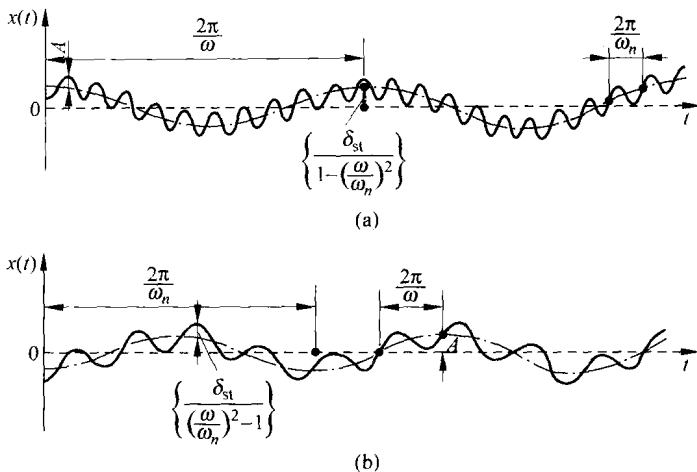


图 3.7 总响应

(a) $\frac{\omega}{\omega_n} < 1$; (b) $\frac{\omega}{\omega_n} > 1$

3.3.2 拍振现象

若激振力接近但不等于系统的固有频率, 则可能发生拍振。发生拍振时, 质量块的振幅按某种确定的规律时而变大, 时而变小(见 1.10.5 节)。拍振现象可通过式(3.9)的解来解释。若初始条件为 $X_0 = \dot{X}_0 = 0$, 则式(3.9)简化为

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_0/m}{\omega_n^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_n t) \\ &= \frac{F_0/m}{\omega_n^2 - \omega^2} \left[2 \sin \frac{\omega + \omega_n}{2} t \cdot \sin \frac{\omega_n - \omega}{2} t \right] \end{aligned} \quad (3.18)$$

令激振力频率略小于固有频率, 即

$$\omega_n - \omega = 2\epsilon \quad (3.19)$$

其中, ϵ 为一小的正数, 则 $\omega_n \approx \omega$, 以及

$$\omega + \omega_n \approx 2\omega \quad (3.20)$$

将式(3.19)与式(3.20)相乘, 得

$$\omega_n^2 - \omega^2 = 4\epsilon\omega \quad (3.21)$$

将式(3.19)~式(3.21)代入式(3.18)中, 有

$$x(t) = \left(\frac{F_0/m}{2\epsilon\omega} \sin \epsilon t \right) \sin \omega t \quad (3.22)$$

由于 ϵ 非常小, 函数 $\sin \epsilon t$ 变化缓慢, 其周期 $2\pi/\epsilon$ 的值较大。则式 (3.22) 可视为周期为 $2\pi/\omega$ 的振动, 其可变幅值为

$$\frac{F_0/m}{2\epsilon\omega} \sin \epsilon t$$

从图 3.8 也可观察到, 曲线 $\sin \omega t$ 经过几个循环时, $\sin \epsilon t$ 只经过一个循环, 其幅值呈连续地增大和减小。两零幅值点或两最大幅值点对应的的时间, 称为拍振周期 (τ_b), 其表达式为

$$\tau_b = \frac{2\pi}{2\epsilon} = \frac{2\pi}{\omega_n - \omega} \quad (3.23)$$

与之对应的拍振频率定义为

$$\omega_b = 2\epsilon = \omega_n - \omega$$

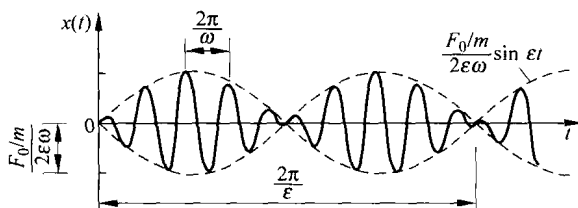


图 3.8 拍振现象

例 3.1 重为 150 lbf 的往复活塞泵安装在钢板的中部。该钢板厚为 0.5 in, 宽为 20 in, 长为 100 in, 两端固定, 如图 3.9 所示。泵工作时, 钢板受到一个大小为 $F(t) = 50 \cos 62.832t$ lbf 的简谐力作用。求钢板的振动幅值。

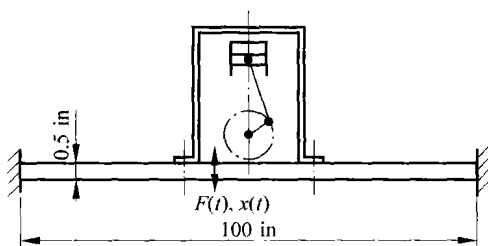


图 3.9 支承具有不平衡质量活塞泵的钢板

解: 钢板可以模型化为两端固定的梁, 弹性模量 $E = 30 \times 10^6$ lbf/in², 长 $l = 100$ in, 惯性矩 $I = \frac{1}{12} \times 20 \times 0.5^3 = 0.2083$ in⁴, 梁的弯曲刚度为

$$k = \frac{192EI}{l^3} = \frac{192 \times (30 \times 10^6) \times 0.2083}{100^3} = 1200 \text{ (lbf/in)} \quad (\text{E. 1})$$

简谐振动响应的幅值由式(3.6)确定,其中 $F_0 = 50 \text{ lbf}$, $m = 150/386.4 \text{ lbf} \cdot \text{s}^2/\text{in}$ (忽略钢板的重量), $k = 1200 \text{ lbf/in}$, $\omega = 62.832 \text{ rad/s}$ 。于是,由式(3.6)得

$$X = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{50}{1200 - (150/386.4) \times 62.832^2} = -0.1504 \text{ (in)} \quad (\text{E. 2})$$

负号表示钢板的响应 $x(t)$ 与激振力 $F(t)$ 反相。

3.4 简谐力作用下有阻尼系统的响应

如果激振力为 $F(t) = F_0 \cos \omega t$, 则运动方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \quad (3.24)$$

式(3.24)的特解也是简谐函数形式,假定为^①

$$x_p(t) = X \cos(\omega t - \phi) \quad (3.25)$$

其中, X 与 ϕ 为待定常量,分别表示响应的幅值与相角。将式(3.25)代入式(3.24)中,则得

$$X[(k - m\omega^2) \cos(\omega t - \phi) - c\omega \sin(\omega t - \phi)] = F_0 \cos \omega t \quad (3.26)$$

运用下列三角函数关系

$$\cos(\omega t - \phi) = \cos \omega t \cos \phi + \sin \omega t \sin \phi$$

$$\sin(\omega t - \phi) = \sin \omega t \cos \phi - \cos \omega t \sin \phi$$

于式(3.26)中再令方程两边 $\cos \omega t$ 和 $\sin \omega t$ 的系数分别相等,则可得

$$\left. \begin{aligned} X[(k - m\omega^2) \cos \phi + c\omega \sin \phi] &= F_0 \\ X[(k - m\omega^2) \sin \phi - c\omega \cos \phi] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

式(3.27)的解为

$$X = \frac{F_0}{[(k - m\omega^2)^2 + c^2 \omega^2]^{1/2}} \quad (3.28)$$

$$\phi = \arctan \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \quad (3.29)$$

将式(3.28)与式(3.29)代入式(3.25),则可得式(3.24)的特解。图 3.10(a)所示为力函数与稳态响应的典型形式,式(3.26)中各项的矢量表示如图 3.10(b)所示。式(3.28)中的分子与分母均除以 k 并作如下代换:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{无阻尼固有频率})$$

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2\sqrt{mk}}, \quad \frac{c}{m} = 2\zeta\omega_n$$

$$\delta_{st} = \frac{F_0}{k} \quad (\text{静态力 } F_0 \text{ 作用下的变形})$$

① 也可假定 $x_p(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$, 此式中也包含两个常数 C_1 与 C_2 , 但这两种表述方式的最终结果一致。

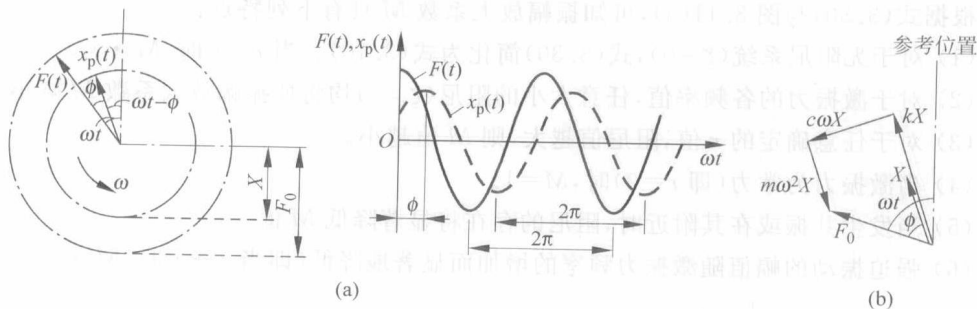


图 3.10 力函数和响应

(a) 图形表示; (b) 矢量表示

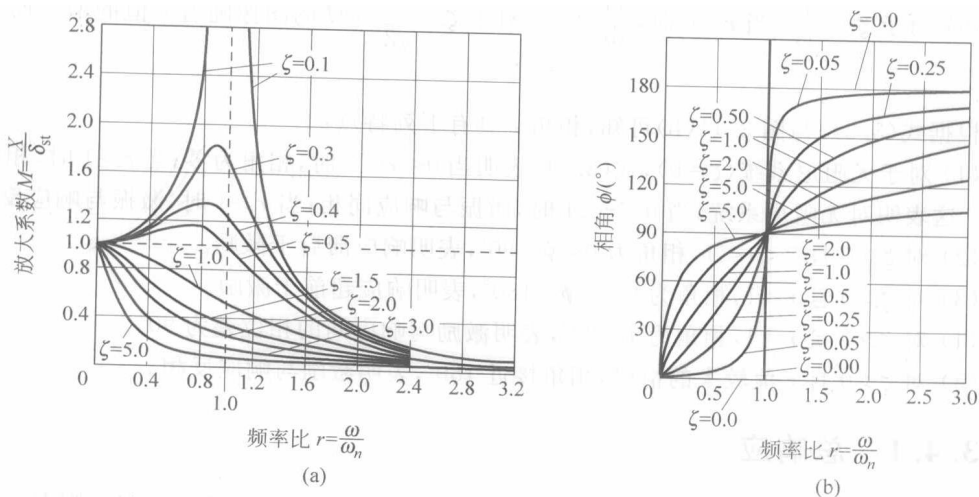
$$r = \frac{\omega}{\omega_n} \quad (\text{频率比})$$

则得

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{\left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right\}^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (3.30)$$

$$\phi = \arctan \left\{ \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right\} = \arctan \frac{2\zeta r}{1-r^2} \quad (3.31)$$

如 3.3 节所述, 量 $M = X/\delta_{st}$ 称为振幅放大系数或振幅比。 X/δ_{st} 与 ϕ 随频率比 r 与阻尼比 ζ 的变化如图 3.11 所示。

图 3.11 X 和 ϕ 随频率比 r 的变化

根据式(3.30)与图 3.11(a),可知振幅放大系数 M 具有下列特点:

- (1) 对于无阻尼系统($\zeta=0$),式(3.30)简化为式(3.10)。当 $r \rightarrow 1$ 时, $M \rightarrow \infty$ 。
- (2) 对于激振力的各频率值,任意大小的阻尼($\zeta>0$)均将使振幅放大系数 M 减小。
- (3) 对于任意确定的 r 值,阻尼值越大,则 M 值越小。
- (4) 当激振力为常力(即 $r=0$)时, $M=1$ 。
- (5) 当发生共振或在其附近时,阻尼的存在将显著降低 M 值。
- (6) 强迫振动的幅值随激振力频率的增加而显著地降低(即当 $r \rightarrow \infty$ 时, $M \rightarrow 0$)。
- (7) 对于 $0 < \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$, 当

$$r = \sqrt{1-2\zeta^2} \quad \text{或} \quad \omega = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2} \quad (3.32)$$

时, M 值达到最大。显然, ω 值小于无阻尼固有频率 ω_n 和有阻尼固有频率 $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ 。

- (8) 当 $r = \sqrt{1-2\zeta^2}$ 时, X 的最大值为

$$\left(\frac{X}{\delta_{st}}\right)_{\max} = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (3.33)$$

当 $\omega = \omega_n$ 时, X 的值由下式确定:

$$\left(\frac{X}{\delta_{st}}\right)_{\omega=\omega_n} = \frac{1}{2\zeta} \quad (3.34)$$

式(3.33)可用于通过实验测定系统的阻尼值。在振动测试中,若测量出了响应的最大幅值 X_{\max} ,则系统的阻尼比可应用式(3.33)来确定。反过来,若已知阻尼值,则可估算出振动系统的最大幅值。

- (9) 对于 $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 当 $r=0$ 时, $\frac{dM}{dr}=0$ 。对于 $\zeta > \frac{1}{\sqrt{2}}$, M 的图像随着 r 值的增大而单调下降。

根据式(3.31)与图 3.11(b)可知,相角 ϕ 具有下列特点:

- (1) 对于无阻尼系统($\zeta=0$),式(3.31)表明当 $0 < r < 1$ 时,相角为零;当 $r > 1$ 时,相角为 180° 。这表明对无阻尼系统,当 $0 < r < 1$ 时,激振与响应同相;当 $r > 1$ 时,激振与响应反相。
- (2) 对 $\zeta > 0$ 且 $0 < r < 1$,相角为 $0 < \phi < 90^\circ$,表明响应滞后于激励。
- (3) 对 $\zeta > 0$ 且 $r > 1$,相角为 $90^\circ < \phi < 180^\circ$,表明响应超前于激励。
- (4) 对 $\zeta > 0$ 且 $r=1$,相角为 $\phi=90^\circ$,表明激励与响应间的相位差为 90° 。
- (5) 对 $\zeta > 0$ 且 r 值较大的情况,相角接近 180° ,表明激励与响应反相。

3.4.1 总响应

方程(3.24)的全解为 $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$,其中, $x_h(t)$ 由式(2.70)确定。则对于小阻尼系统,有

$$x(t) = X_0 e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi_0) + X \cos(\omega t - \phi) \quad (3.35)$$

其中

$$\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n \quad (3.36)$$

X 与 ϕ 分别由式(3.30)与式(3.31)确定。 X_0 与 ϕ_0 根据初始条件确定。对初始条件 $x(t=0) = x_0$, $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$, 由式(3.35)得

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= X_0 \cos \phi_0 + X \cos \phi \\ \dot{x}_0 &= -\zeta \omega_n X_0 \sin \phi_0 + \omega_d X_0 \cos \phi_0 + \omega X \sin \phi \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

由式(3.37)即可求得 X_0 与 ϕ_0 。

例 3.2 单自由度系统的质量 $m=10 \text{ kg}$, $c=20 \text{ N} \cdot \text{s/m}$, $k=4000 \text{ N/m}$, $x_0=0.01 \text{ m}$ 和 $\dot{x}_0=0$, 根据下列条件求系统的总响应。

(a) 作用在系统的外激励为 $F(t)=F_0 \cos \omega t$, 其中 $F_0=100 \text{ N}$, $\omega=10 \text{ rad/s}$ 。

(b) $F(t)=0$ 时的自由振动。

解: (a) 根据已知数据, 得到

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4000}{10}} = 20 (\text{rad/s})$$

$$\delta_{st} = \frac{F_0}{k} = \frac{100}{4000} = 0.025 (\text{m})$$

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{20}{2\sqrt{4000 \times 10}} = 0.05$$

$$\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n = \sqrt{1 - 0.05^2} \times 20 = 19.974984 (\text{rad/s})$$

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{10}{20} = 0.5$$

$$\begin{aligned} X &= \frac{\delta_{st}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \\ &= \frac{0.025}{[(1-0.05^2)^2 + (2 \times 0.5 \times 0.5)^2]^{\frac{1}{2}}} = 0.03326 (\text{m}) \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right) = \arctan\left(\frac{2 \times 0.05 \times 0.5}{1-0.5^2}\right) = 3.814075^\circ \quad (\text{E.2})$$

利用初始条件 $x_0=0.01$ 与 $\dot{x}_0=0$, 由式(3.37)得

$$0.01 = X_0 \cos \phi_0 + 0.03326 \times 0.997785$$

或

$$X_0 \cos \phi_0 = -0.023186 \quad (\text{E.3})$$

和

$$\begin{aligned} 0 &= -0.05 \times 20 X_0 \sin \phi_0 + X_0 \times 19.974984 \sin \phi_0 \\ &\quad + 0.03326 \times 10 \sin 3.814075^\circ \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

将式(E.3)代入式(E.4),得

$$X_0 \sin \phi_0 = -0.002\,268 \quad (\text{E.5})$$

由式(E.3)和式(E.5)得

$$X_0 = [(X_0 \cos \phi_0)^2 + (X_0 \sin \phi_0)^2]^{1/2} = 0.023\,297 \quad (\text{E.6})$$

和

$$\tan \phi_0 = \frac{X_0 \sin \phi_0}{X_0 \cos \phi_0} = 0.097\,817\,6 \quad (\text{E.6})$$

或

$$\phi_0 = 5.586\,765^\circ \quad (\text{E.7})$$

(b) 对于自由振动,总响应为

$$x(t) = X_0 e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi_0) \quad (\text{E.8})$$

利用初始条件 $x(0) = x_0 = 0.01$ 与 $\dot{x}(0) = \dot{x}_0 = 0$, 式(E.8)中的 X_0 与 ϕ_0 可确定为(见式(2.73)与式(2.75))

$$\begin{aligned} X_0 &= \left[x_0^2 + \left(\frac{\zeta \omega_n x_0}{\omega_d} \right)^2 \right]^{1/2} = \left[0.01^2 + \left(\frac{0.05 \times 20 \times 0.01}{19.974\,984} \right)^2 \right]^{1/2} \\ &= 0.010\,012 \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

$$\phi_0 = \arctan \left(-\frac{\dot{x}_0 + \zeta \omega_n x_0}{\omega_d x_0} \right) = \arctan \left(-\frac{0.05 \times 20}{19.974\,984} \right) = -2.865\,984^\circ \quad (\text{E.10})$$

注意: 对应于情况(a)与(b), 常量 X_0 与 ϕ_0 显然是不同的。

3.4.2 品质因子与带宽

对于较小的阻尼值($\zeta < 0.05$), 由式(3.33)可得

$$\left(\frac{X}{\delta_{st}} \right)_{\max} \simeq \left(\frac{X}{\delta_{st}} \right)_{\omega=\omega_n} = \frac{1}{2\zeta} = Q \quad (3.38)$$

共振时的振幅比值也称为 Q 系数或系统的品质因数。在某些电子工程中也有类似的定义。例如, 对收音机中的调谐电路, 人们感兴趣的是使共振时声音信号的幅值尽可能地大。图 3.12 中, 点 R_1 与 R_2 处的振幅放大系数降为 $Q/\sqrt{2}$, 称为半功率点。这是因为在某一已知频率下, 阻尼器(或电路中的电阻)所吸收的能量 ΔW 与幅值的平方成正比(见式(2.94)), 即

$$\Delta W = \pi c \omega X^2 \quad (3.39)$$

半功率点 R_1 与 R_2 处对应的频率差称为系统的半功率带宽(见图 3.12)。为求 R_1 与 R_2 的值, 可令式(3.30)中 $X/\delta_{st} = Q/\sqrt{2}$, 则

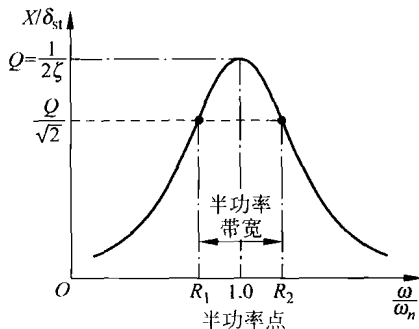


图 3.12 简谐响应曲线上的半功率点和对应的半功率带宽

$$\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} = \frac{Q}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\zeta}$$

或

$$r^4 - r^2(2 - 4\zeta^2) + (1 - 8\zeta^2) = 0 \quad (3.40)$$

式(3.40)的解为

$$r_1^2 = 1 - 2\zeta^2 - 2\zeta\sqrt{1 + \zeta^2}, \quad r_2^2 = 1 - 2\zeta^2 + 2\zeta\sqrt{1 + \zeta^2} \quad (3.41)$$

对于较小的 ζ 值, 式(3.41)可以近似表示成

$$\left. \begin{aligned} r_1^2 &= R_1^2 = \left(\frac{\omega_1}{\omega_n}\right)^2 \simeq 1 - 2\zeta \\ r_2^2 &= R_2^2 = \left(\frac{\omega_2}{\omega_n}\right)^2 \simeq 1 + 2\zeta \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

其中, $\omega_1 = \omega|_{R_1}$ 与 $\omega_2 = \omega|_{R_2}$, 由式(3.42)得

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = (\omega_2 + \omega_1)(\omega_2 - \omega_1) = (R_2^2 - R_1^2)\omega_n^2 \simeq 4\zeta\omega_n^2 \quad (3.43)$$

运用下面的关系

$$\omega_2 + \omega_1 = 2\omega_n \quad (3.44)$$

可通过式(3.43)求得带宽 $\Delta\omega$ 为

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \simeq 2\zeta\omega_n \quad (3.45)$$

由式(3.38)与式(3.45), 可得

$$Q \simeq \frac{1}{2\zeta} \simeq \frac{\omega_n}{\omega_2 - \omega_1} \quad (3.46)$$

可以看出, 品质因数可用来估计机械系统的等效黏性阻尼。^①

3.5 $F(t) = Fe^{i\omega t}$ 作用下阻尼系统的响应

令简谐力函数以复数形式表示为 $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$, 则运动微分方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 e^{i\omega t} \quad (3.47)$$

由于实际激励仅由 $F(t)$ 的实部决定, 因此响应也仅由 $x(t)$ 的实部确定, 其中 $x(t)$ 为满足微分方程(3.47)的复数。式(3.47)中的 F_0 一般来说也为复数。假定特解 $x_p(t)$ 为

$$x_p(t) = X e^{i\omega t} \quad (3.48)$$

将式(3.48)代入式(3.47), 则得^②

$$X = \frac{F_0}{(k - m\omega^2) + i c \omega} \quad (3.49)$$

将式(3.49)右边的分子与分母乘以 $[(k - m\omega^2) - i c \omega]$, 并分离实部与虚部, 得

① 基于半功率点确定系统参数(m 、 c 与 k)和其他响应特性将在 10.8 节中讨论。

② 式(3.49)也可以表示为 $Z(i\omega)X = F_0$, 其中 $Z(i\omega) = -m\omega^2 + i c \omega + k$ 称为系统的机械阻抗^[3.8]。

$$X = F_0 \left[\frac{k - m\omega^2}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2} - i \frac{c\omega}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2} \right] \quad (3.50)$$

运用关系式 $x + iy = Ae^{i\phi}$, 其中 $A = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\tan \phi = y/x$, 则式(3.50)可以表示为

$$X = \frac{F_0}{[(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{1/2}} e^{-i\phi} \quad (3.51)$$

其中

$$\phi = \arctan \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \quad (3.52)$$

则稳态解即式(3.48)为

$$x_p(t) = \frac{F_0}{[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{1/2}} e^{i(\omega t - \phi)} \quad (3.53)$$

1. 频率响应

式(3.49)也可以表示为以下形式:

$$\frac{kX}{F_0} = \frac{1}{1 - r^2 + i2\zeta r} \equiv H(i\omega) \quad (3.54)$$

其中, $H(i\omega)$ 称为系统的复频率响应, 其绝对值为

$$|H(i\omega)| = \left| \frac{kX}{F_0} \right| = \frac{1}{[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{1/2}} \quad (3.55)$$

它表示式(3.30)中所定义的振幅放大系数。利用欧拉公式 $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$, 可得式(3.54)与式(3.55)之间的如下关系:

$$H(i\omega) = |H(i\omega)| e^{-i\phi} \quad (3.56)$$

其中, ϕ 由式(3.52)确定, 也可以表示为

$$\phi = \arctan \frac{2\zeta r}{1 - r^2} \quad (3.57)$$

则式(3.53)可以表示为

$$x_p(t) = \frac{F_0}{k} |H(i\omega)| e^{i(\omega t - \phi)} \quad (3.58)$$

可以看出, 复频率响应函数 $H(i\omega)$ 包含稳态响应的大小与相位, 该函数在通过实验确定系统参数(m, c, k)中的应用将在 10.8 节中讨论。若 $F(t) = F_0 \cos \omega t$, 则相应的稳态解由式(3.53)的实部确定, 即

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{F_0}{[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{1/2}} \cos(\omega t - \phi) \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{F_0}{k} H(i\omega) e^{i\omega t} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{F_0}{k} |H(i\omega)| e^{i(\omega t - \phi)} \right] \end{aligned} \quad (3.59)$$

该式与式(3.25)相同。类似地, 若 $F(t) = F_0 \sin \omega t$, 则相应的稳态解由式(3.53)的虚部确定, 即

$$\begin{aligned}
 x_p(t) &= \frac{F_0}{[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{1/2}} \sin(\omega t - \phi) \\
 &= \text{Im} \left[\frac{F_0}{k} |H(i\omega)| e^{i(\omega t - \phi)} \right]
 \end{aligned} \quad (3.60)$$

2. 简谐振动的复矢量表示

简谐激励以及有阻尼系统对简谐激励的响应可以在复平面中用图形表示。将式(3.58)对时间取微分,则得

$$\left. \begin{aligned}
 \text{速度: } \dot{x}_p(t) &= i\omega \frac{F_0}{k} |H(i\omega)| e^{i(\omega t - \phi)} = i\omega x_p(t) \\
 \text{加速度: } \ddot{x}_p(t) &= (i\omega)^2 \frac{F_0}{k} |H(i\omega)| e^{i(\omega t - \phi)} = -\omega^2 x_p(t)
 \end{aligned} \right\} \quad (3.61)$$

由于 i 可以表示为

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad (3.62)$$

则速度等于位移乘以 ω , 且相角超前 $\pi/2$ 。类似地, -1 可以表示为

$$-1 = \cos \pi + i \sin \pi = e^{i\pi} \quad (3.63)$$

则加速度等于位移乘以 ω^2 , 且相角超前 π 。

因此运动微分方程(3.47)中的各项可以在复平面中表示, 如图 3.13 所示。该图表明, 复矢量 $m\ddot{x}(t)$, $c\dot{x}(t)$ 与 $kx(t)$ 的和等于 $F(t)$, 正好满足式(3.47)。此外, 还可以看出, 整个图形都在复平面内以角速度 ω 旋转。如果仅仅考虑响应的实部, 则整个图形应投影到实轴上。类似地, 如果仅仅考虑响应的虚部, 则应将图形投影到虚轴上。注意: 式(3.13)中的力 $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$ 表示为与实轴的夹角为 ωt 的矢量, 这表明 F_0 为实数。若

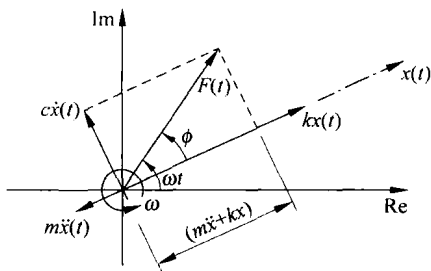


图 3.13 在复平面上表示式(3.47)

F_0 也是复数, 则该力矢量 $F(t)$ 与实轴的夹角将为 $(\omega t + \psi)$, 其中 ψ 是由 F_0 引起的相角。此时, 所有的矢量, 即 $m\ddot{x}(t)$, $c\dot{x}(t)$ 与 $kx(t)$ 都将有相同的角度变化 ψ , 这等效于式(3.47)的两边均乘以 $e^{i\psi}$ 。

3.6 基础作简谐运动时阻尼系统的响应

如图 3.14(a)所示, 有时基础或弹簧-质量-阻尼器系统的支承会发生简谐运动。令 $y(t)$ 表示基础的位移, $x(t)$ 表示在 t 时刻质量块距其静平衡位置的位移, 则弹簧的净伸长为 $(x - y)$, 阻尼器两端的相对速度为 $(\dot{x} - \dot{y})$ 。根据图 3.14(b)所示的受力图, 可得运动微分方程

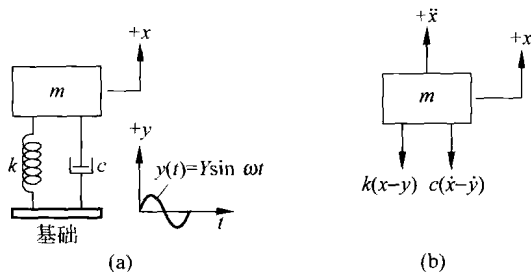


图 3.14 基础运动激励

$$m \ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0 \quad (3.64)$$

若 $y(t) = Y \sin \omega t$, 则式(3.64)变为

$$\begin{aligned} m \ddot{x} + c \dot{x} + kx &= ky + c \dot{y} = kY \sin \omega t + c\omega Y \cos \omega t \\ &= A \sin(\omega t - \alpha) \end{aligned} \quad (3.65)$$

其中, $A = Y \sqrt{k^2 + (c\omega)^2}$, $\alpha = \arctan\left(-\frac{c\omega}{k}\right)$ 。上式表明基础运动激励等效于质量块受到一个幅值为 A 的简谐力的作用。根据式(3.60), 质量块的稳态响应 $x_p(t)$ 可表示为

$$x_p(t) = \frac{Y \sqrt{k^2 + (c\omega)^2}}{[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{1/2}} \sin(\omega t - \phi_1 - \alpha) \quad (3.66)$$

式中

$$\phi_1 = \arctan \frac{c\omega}{k - m\omega^2}$$

运用三角恒等式, 式(3.66)也可以表示为

$$x_p(t) = X \sin(\omega t - \phi) \quad (3.67)$$

其中, X 与 ϕ 由下述公式求出:

$$\frac{X}{Y} = \left[\frac{k^2 + (c\omega)^2}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} \right]^{1/2} = \left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right]^{1/2} \quad (3.68)$$

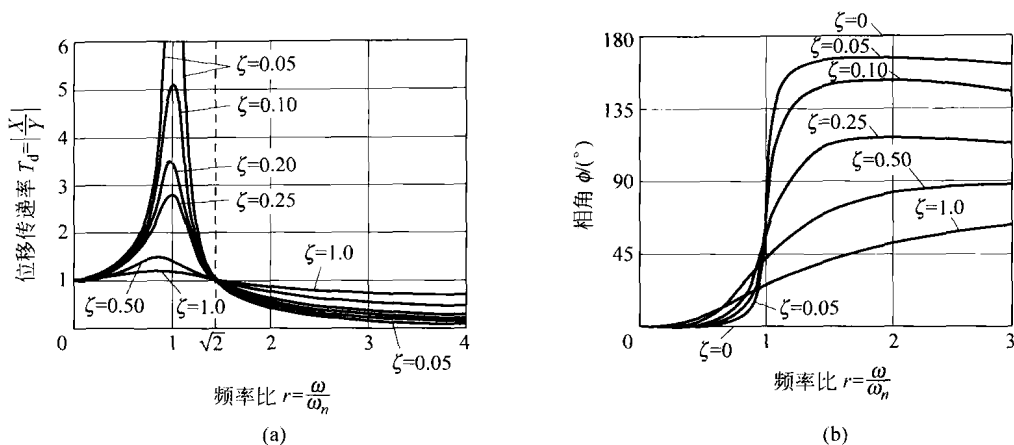
和

$$\phi = \arctan \left[\frac{m c \omega^3}{k(k - m\omega^2) + (c\omega)^2} \right] = \arctan \left[\frac{2\zeta r^3}{1 + (4\zeta^2 - 1)r^2} \right] \quad (3.69)$$

响应 $x_p(t)$ 的幅值与基础运动 $y(t)$ 的幅值之比即 X/Y , 称为位移传递率。对于不同的 r 与 ζ 值, 由式(3.68)与式(3.69)确定的 $\frac{X}{Y} = T_d$ 与 ϕ 随 ζ 与 r 的变化分别如图 3.15(a) 与 3.15(b) 所示。

注意: 如果基础的简谐激励以复数形式表示为 $y(t) = \text{Re}(Y e^{i\omega t})$, 应用 3.5 节中的分析方法, 则系统的响应可以表示为

$$x_p(t) = \text{Re} \left\{ \left(\frac{1 + i2\zeta r}{1 - r^2 + i2\zeta r} \right) Y e^{i\omega t} \right\} \quad (3.70)$$

图 3.15 T_d 和 ϕ 随频率比 r 的变化

而位移传递率为

$$\frac{X}{Y} = T_d = [1 + (2\zeta r)^2]^{1/2} |H(i\omega)| \quad (3.71)$$

其中, $|H(i\omega)|$ 由式(3.55)确定。

根据图 3.15(a), 可以看出位移传递率 $\frac{X}{Y} = T_d$ 具有下列特点:

- (1) 当 $r=0$ 时, $T_d=1$; 对于较小的 r 值, $T_d \rightarrow 1$ 。
- (2) 对无阻尼系统 ($\zeta=0$), 共振时 ($r=1$), $T_d \rightarrow \infty$ 。
- (3) 当 $r > \sqrt{2}$ 时, 对于任意大小的阻尼值 ζ , $T_d < 1$ 。
- (4) 当 $r = \sqrt{2}$ 时, 对于任意大小的阻尼值 ζ , $T_d = 1$ 。
- (5) 当 $r < \sqrt{2}$ 时, 阻尼比越小则 T_d 越大; 而当 $r > \sqrt{2}$ 时, 阻尼比越小则 T_d 值也越小。

(6) 对于 $0 < \zeta < 1$, 当频率比 $r = r_m < 1$ 时, 位移传递函数 T_d 有最大值。其中, r_m 的值为(见习题 3.49)

$$r_m = \frac{1}{2\zeta} (\sqrt{1 + 8\zeta^2} - 1)^{1/2}$$

3.6.1 所传递的力

在图 3.14 中, 由于弹簧与阻尼器的反作用, 会有一个力 F 传递给基础(支承), 该力为

$$F = k(x - y) + c(\dot{x} - \dot{y}) = -m\ddot{x} \quad (3.72)$$

根据式(3.67), 式(3.72)可表示为

$$F = m\omega^2 X \sin(\omega t - \phi) = F_T \sin(\omega t - \phi) \quad (3.73)$$

其中, F_T 是传递给基础的力的最大幅值, 由下式确定:

$$\frac{F_T}{kY} = r^2 \left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right]^{1/2} \quad (3.74)$$

比值 $\frac{F_T}{kY}$ 称为力传递率^①。注意: 所传递的力与质量块的运动 $x(t)$ 同相。对于不同的 ζ 值, 传递给基础的力随频率比 r 的变化规律如图 3.16 所示。

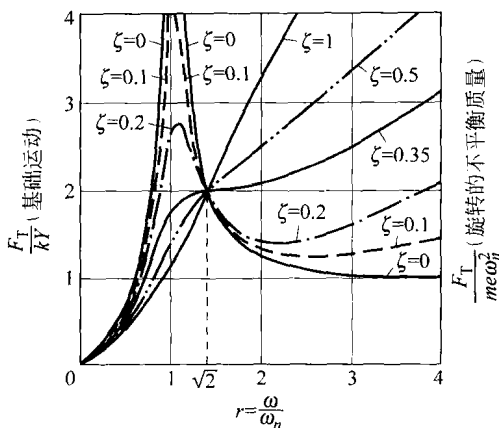
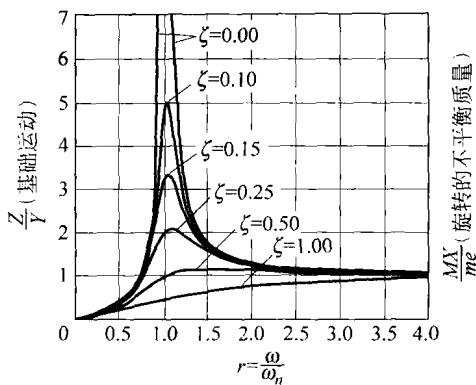


图 3.16 力的传递率

图 3.17 Z/Y 或 MX/me 随频率比 r 的变化

3.6.2 相对运动

若用 $z = x - y$ 表示质量块相对于基础的运动, 则运动微分方程式(3.64)也可以表示为

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y} = m\omega^2 Y \sin \omega t \quad (3.75)$$

式(3.75)的稳态解为

$$z(t) = \frac{m\omega^2 Y \sin(\omega t - \phi_1)}{[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{1/2}} = Z \sin(\omega t - \phi_1) \quad (3.76)$$

其中, Z 为 $z(t)$ 的幅值, 可以表示为

$$Z = \frac{m\omega^2 Y}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} = Y \frac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (3.77)$$

同时 ϕ_1 为

$$\phi_1 = \arctan \frac{c\omega}{k - m\omega^2} = \arctan \frac{2\zeta r}{1 - r^2}$$

对于不同的 ζ 值, 比值 Z/X 随频率比 r 的变化如图 3.17 所示。 ϕ_1 的变化规律与图 3.11(b)所示的 ϕ 的变化规律一致。

例 3.3 图 3.18 所示为汽车通过粗糙路面而引起竖向振动的一个简单模型。设汽车

^① 在设计隔振系统时用到的传递率的概念将在第 9 章讨论。

的质量为 1200 kg, 悬架系统的弹簧常数为 400 kN/m, 阻尼比为 $\zeta=0.5$ 。若汽车的行驶速度为 20 km/h, 求汽车的位移幅值。已知路面的起伏按正弦规律变化, 幅值为 $Y=0.05$ m, 波长为 6 m。

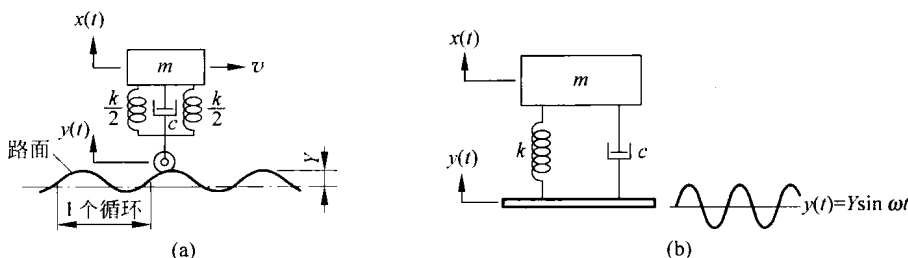


图 3.18 在粗糙路面上行驶的汽车

解：基础运动激励的频率可以通过汽车速度 v (km/hr) 除以路面起伏的一个循环的长度求得：

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \left(\frac{v \times 1000}{3600} \right) \frac{1}{\lambda} = 0.290889v \text{ (rad/s)}$$

$v=20$ km/h 时, $\omega=5.81778$ rad/s。汽车的固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \left(\frac{400 \times 10^3}{1200} \right)^{1/2} = 18.2574 \text{ (rad/s)}$$

因此频率比 r 为

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{5.81778}{18.2574} = 0.318653$$

于是, 由式(3.68)得振幅比为

$$\begin{aligned} \frac{X}{Y} &= \left\{ \frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{1 + (2 \times 0.5 \times 0.318653)^2}{(1 - 0.318653)^2 + (2 \times 0.5 \times 0.318653)^2} \right\}^{1/2} \\ &= 1.469237 \end{aligned}$$

因此汽车竖向振动的振幅为

$$X = 1.469237Y = 1.469237 \times 0.05 = 0.073462 \text{ (m)}$$

这表明: 幅值为 5 cm 的路面起伏引起汽车底盘与乘客的竖向振动的振幅是 7.3 cm。因此在当前状态下, 乘客感觉到的上下颠簸比路面的实际起伏要大。

例 3.4 重为 3000 N 的重型机器, 支承在弹性基础上。由于机器的重量引起的基础的静变形为 7.5 cm。当基础简谐振动的频率等于隔振系统的无阻尼固有频率, 幅值为 0.25 cm 时, 观察到机器的振动幅值为 1 cm。求: (a) 基础的阻尼常数; (b) 基础所受动态力的幅值; (c) 机器相对于基础的振动位移的幅值。

解：(a) 基础的刚度可根据其静变形求得: $k = \text{机器重量} / \delta_{st} = 3000 / 0.075 = 40000 \text{ (N/m)}$ 。

根据式(3.68), 共振时 ($\omega = \omega_n$ 或 $r=1$) 的振幅比为

$$\frac{X}{Y} = \frac{0.010}{0.0025} = 4 = \left[\frac{1 + (2\zeta)^2}{(2\zeta)^2} \right]^{1/2} \quad (\text{E. 1})$$

式(E. 1)的解为 $\zeta = 0.1291$, 所以阻尼常数为

$$\begin{aligned} c &= \zeta c_c = \zeta \times 2\sqrt{km} = 0.1291 \times 2 \times \sqrt{40\,000 \times (3000/9.81)} \\ &= 903.0512 (\text{N} \cdot \text{s/m}) \end{aligned} \quad (\text{E. 2})$$

(b) 当 $r=1$ 时, 根据式(3.74)求得基础所受动态力的幅值为

$$F_T = Yk \left(\frac{1 + 4\zeta^2}{4\zeta^2} \right)^{1/2} = kX = 40\,000 \times 0.01 = 400 (\text{N}) \quad (\text{E. 3})$$

(c) 当 $r=1$ 时, 根据式(3.77)求得机器的相对位移的幅值为

$$Z = \frac{Y}{2\zeta} = \frac{0.0025}{2 \times 0.1291} = 0.009\,68 (\text{m}) \quad (\text{E. 4})$$

注意到 $X=0.01\text{ m}$, $Y=0.0025\text{ m}$, $Z=0.009\,68\text{ m}$, 因此 $Z \neq X - Y$, 这是由于 x, y 与 z 之间存在相位差。

3.7 具有旋转不平衡质量的阻尼系统的响应

旋转机器中的不平衡质量是导致振动的主要原因之一, 这类机器的简化模型如图 3.19 所示。设机器的总质量为 M , 质量为 $m/2$ 的两偏心质量以不变角速度 ω 沿相反的方向旋

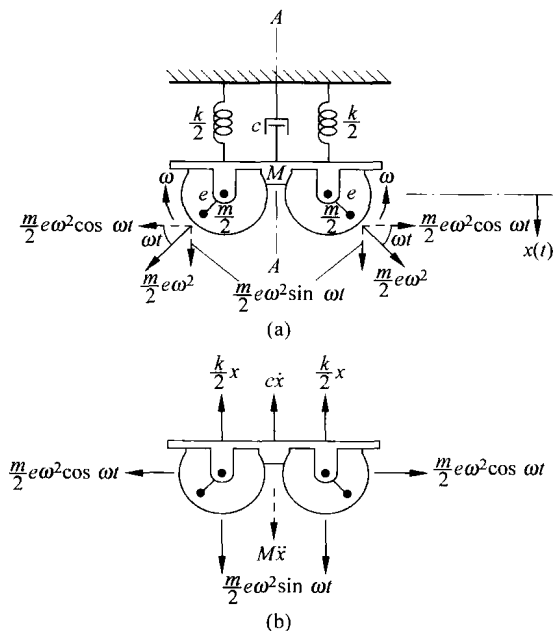


图 3.19 旋转的不平衡质量

转。每个质量所导致的离心力可视为机器 M 的激励, 旋转方向相反的两相等质量 $m/2$ 引起的激励在水平方向的分量互相抵消, 但两垂直分量方向相同, 相加后作用在对称轴 $A-A$ 上, 如图 3.19 所示。若质量块的角位置坐标从水平位置量起, 则激励的总垂直分量可以表示为 $F(t) = me\omega^2 \sin \omega t$, 运动方程可以通过通常的步骤推导:

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = me\omega^2 \sin \omega t \quad (3.78)$$

若用 M 与 $me\omega^2$ 分别代替 m 与 F_0 , 则方程(3.78)的解与式(3.60)一致。该解也可以表示为

$$x_p(t) = X \sin(\omega t - \phi) = \operatorname{Im} \left[\frac{me}{M} \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 |H(i\omega)| e^{i(\omega t - \phi)} \right] \quad (3.79)$$

其中, $\omega_n = \sqrt{k/M}$; X 与 ϕ 分别表示振动的幅值与相角, 分别按下式计算:

$$X = \frac{me\omega^2}{[(k - M\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{1/2}} = \frac{me}{M} \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 |H(i\omega)| \quad (3.80)$$

$$\phi = \arctan \frac{c\omega}{k - M\omega^2} \quad (3.81)$$

定义 $\zeta = c/c_c$ 与 $c_c = 2M\omega_n$, 则式(3.80)与式(3.81)也可以表示为

$$\frac{MX}{me} = \frac{r^2}{[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{1/2}} = r^2 |H(i\omega)| \quad (3.82)$$

$$\phi = \arctan \frac{2\zeta r}{1 - r^2} \quad (3.83)$$

对于不同的 ζ 值, MX/me 随 r 的变化规律如图 3.17 所示; ϕ 随 r 的变化规律如图 3.11(b) 所示。根据式(3.82)与图 3.17 可得以下结论:

(1) 所有的曲线开始时均为零幅值, 共振($\omega = \omega_n$)点附近的幅值受阻尼影响显著。于是, 若机器在共振点附近工作, 则应该有意识地引入阻尼以避免过大的幅值。

(2) 当角速度 ω 非常大时, MX/me 近似为 1, 阻尼的影响可以忽略。

(3) 对于 $0 < \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$, 当

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{MX}{me} \right) = 0 \quad (3.84)$$

时, MX/me 出现最大值。由式(3.84)可得

$$r = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\zeta^2}} > 1$$

相应地, MX/me 的最大值为

$$\left(\frac{MX}{me} \right)_{\max} = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

于是峰值出现在共振点 $r=1$ 的右侧。

4) 对于 $\zeta > \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{MX}{me}$ 没有最大值, 其值由零($r=0$)缓慢地趋于 1($r \rightarrow \infty$)。

当 $\omega = 200\pi \text{ rad/s}$ 时, 式由 (E. 1) 得

$$0.005 = \frac{(5.0 \times 10^{-3}) \times (200\pi)^2}{k \left[1 - \frac{(200\pi)^2}{0.004k} \right]} = \frac{200\pi^2}{k - 10^7\pi^2}$$

则

$$k = 10.04 \times 10^6 \pi^2 \text{ N/m} \quad (\text{E. 4})$$

从图 3.17 可知, 当 $r = \omega/\omega_n$ 的值非常大时, 旋转轴的振动幅值可能达到最小值, 这意味着 ω_n 应小于 ω , 即 k 必须非常小, 因此, 应该选择 $k = 10.04 \times 10^4 \pi^2 \text{ N/m}$ 。由于悬臂梁(轴)的末端装有载荷(转子)时, 其刚度为

$$k = \frac{3EI}{l^3} = \frac{3E}{l^3} \left(\frac{\pi d^4}{64} \right) \quad (\text{E. 5})$$

故悬臂梁(轴)的直径为

$$d^4 = \frac{64kl^3}{3\pi E} = \frac{64 \times 10.04 \times 10^4 \pi^2 \times 2^3}{3\pi \times 2.07 \times 10^{11}} = 2.6005 \times 10^{-4} (\text{m}^4)$$

即

$$d = 0.1270 \text{ m} = 127 \text{ mm} \quad (\text{E. 6})$$

3.8 库仑阻尼系统的强迫振动

有库仑阻尼或干摩擦阻尼的单自由度系统, 受简谐激励力 $F(t) = F_0 \sin \omega t$ 作用的情况, 如图 3.21 所示, 其运动微分方程为

$$m\ddot{x} + kx \pm \mu N = F(t) = F_0 \sin \omega t \quad (3.85)$$

当质量块从左向右运动(从右向左运动)时, 摩擦力($\mu N = \mu mg$)的符号为正(负)。

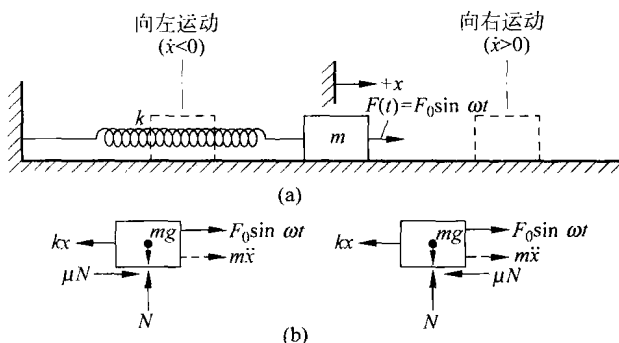


图 3.21 具有库仑阻尼的单自由度系统

式(3.85)的精确解的形式是相当复杂的。若干摩擦阻尼力较大, 则质量块的运动是不连续的。另一方面, 若干摩擦力小于作用力的幅值 F_0 , 则可以认为稳态解近似为简谐的。

此时,利用等效黏性阻尼比可以求得式(3.85)的近似解。为求该比值,可令在运动的一个完整循环中因干摩擦导致的能量耗散等于因等效阻尼比导致的能量损耗。若运动的幅值用 X 表示,则干摩擦力 μN 在 $1/4$ 个循环中的能量耗散为 μNX 。因此在一个完整循环中,因干摩擦导致的能量损耗为

$$\Delta W = 4\mu NX \quad (3.86)$$

若等效黏性阻尼常数用 c_{eq} 表示,则在一个完整循环内的能量损耗(见式(2.94))为

$$\Delta W = \pi c_{eq} \omega X^2 \quad (3.87)$$

令式(3.86)等于式(3.87),得

$$c_{eq} = \frac{4\mu N}{\pi \omega X} \quad (3.88)$$

于是稳态响应为

$$x_p(t) = X \sin(\omega t - \phi) \quad (3.89)$$

其中,幅值 X 可根据式(3.60)确定:

$$X = \frac{F_0}{[(k - m\omega^2)^2 + (c_{eq}\omega)^2]^{1/2}} = \frac{F_0/k}{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta_{eq} \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right]^{1/2}} \quad (3.90)$$

令

$$\zeta_{eq} = \frac{c_{eq}}{c_c} = \frac{c_{eq}}{2m\omega_n} = \frac{4\mu N}{2m\omega_n \pi \omega X} = \frac{2\mu N}{\pi m \omega \omega_n X} \quad (3.91)$$

将式(3.91)代入式(3.90),得

$$X = \frac{F_0/k}{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{4\mu N}{\pi k X}\right)^2 \right]^{1/2}} \quad (3.92)$$

该方程的解给出了幅值 X 的大小为

$$X = \frac{F_0}{k} \left[\frac{1 - \left(\frac{4\mu N}{\pi F_0}\right)^2}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2} \right]^{1/2} \quad (3.93)$$

如前所述,只有当摩擦力小于 F_0 的情况下,式(3.93)才适用。事实上,摩擦力 μN 的极限值可以根据式(3.93)求得。为避免 X 出现虚值,必须满足

$$1 - \left(\frac{4\mu N}{\pi F_0}\right)^2 > 0 \quad \text{或} \quad \frac{F_0}{\mu N} > \frac{4}{\pi}$$

如果不满足此条件,就要作更详细的理论分析,这方面的工作见参考文献[3.3]。在式(3.89)中出现的相角 ϕ 可利用式(3.52)求得:

$$\phi = \arctan \frac{c_{eq}\omega}{k - m\omega^2} = \arctan \frac{2\zeta_{eq} \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} = \arctan \frac{\frac{4\mu N}{\pi k X}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \quad (3.94)$$

将式(3.93)代入式(3.94),则得

$$\phi = \arctan \frac{\frac{4\mu N}{\pi F_0}}{\left\{1 - \left(\frac{4\mu N}{\pi F_0}\right)^2\right\}^{1/2}} \quad (3.95)$$

式(3.94)表明,对于给定的 $F_0/\mu N$ 的值, $\tan \phi$ 为常值。因为当 $\omega/\omega_n < 1$ 时, ϕ 取正值;当 $\omega/\omega_n > 1$ 时, ϕ 取负值;故在 $\omega/\omega_n = 1$ (共振)处, ϕ 是不连续的。于是式(3.95)也可以表示为

$$\phi = \arctan \frac{\pm \frac{4\mu N}{\pi F_0}}{\left\{1 - \left(\frac{4\mu N}{\pi F_0}\right)^2\right\}^{1/2}} \quad (3.96)$$

式(3.93)表明,对于 $\omega/\omega_n \neq 1$ 的情况,摩擦起到限制强迫振动幅值的作用。但是共振时($\omega/\omega_n = 1$),该幅值为一无限值,这可以解释如下。当系统受简谐激励时,在一个循环内供给的能量为

$$\begin{aligned} \Delta W' &= \int_{\text{cycle}} F dx = \int_0^{\tau} F \frac{dx}{dt} dt \\ &= \int_0^{\tau=2\pi/\omega} F_0 \sin \omega t [\omega X \cos(\omega t - \phi)] dt \end{aligned} \quad (3.97)$$

共振时,由式(3.94)得 $\phi = 90^\circ$,则式(3.97)变为

$$\Delta W' = F_0 X \omega \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2 \omega t dt = \pi F_0 X \quad (3.98)$$

系统的能量损耗表达式为式(3.86)。由于 X 为实数时, $\pi F_0 X > 4\mu NX$,则共振时 $\Delta W' > \Delta W$ (见图 3.22)。于是,每个循环内供给系统的能量比系统的能量损耗大。这些多余的能量使得振动的幅值不断变大。对于非共振($\omega/\omega_n \neq 1$)的情况,输入的能量可根据式(3.97)求得,即

$$\begin{aligned} \Delta W' &= \omega F_0 X \int_0^{2\pi/\omega} \sin \omega t \cos(\omega t - \phi) dt \\ &= \pi F_0 X \sin \phi \end{aligned} \quad (3.99)$$

由于式(3.99)中 $\sin \phi$ 的存在,图 3.22 中的输入能量曲线与能量损耗曲线重合,则幅值降低,运动的相角 ϕ 可用来限制运动的幅值。

例 3.6 在水平面上振动的弹簧-质量系统,质量块的质量为 10 kg,弹簧刚度为 4000 N/m,摩擦系数为 0.12。当系统受到频率为 2 Hz 的简谐力作用时,求得质量块的振动幅值为 40 mm。试确定作用于质量块上的简谐力幅值的大小。

解: 质量块的重量 $N = mg = 10 \times 9.81 = 98.1 \text{ (N)}$ 。系统的固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4000}{10}} = 20 \text{ (rad/s)}$$

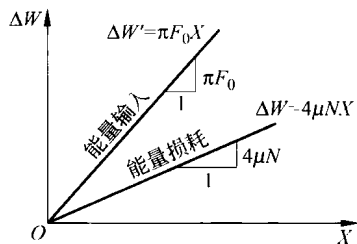


图 3.22 库仑阻尼系统的能量输入与能量损耗

频率比为

$$\frac{\omega}{\omega_n} = \frac{2 \times 2\pi}{20} = 0.6283$$

振动幅值 X 由式(3.93)确定:

$$X = \frac{F_0}{k} \left[\frac{1 - \left(\frac{4\mu N}{\pi F_0} \right)^2}{\left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right\}^2} \right]^{1/2}, \quad 0.04 = \frac{F_0}{4000} \left[\frac{1 - \left(\frac{4 \times 0.12 \times 98.1}{\pi F_0} \right)^2}{(1 - 0.6283^2)^2} \right]^{1/2}$$

该式的解为 $F_0 = 97.9874 \text{ N}$ 。

3.9 滞后阻尼系统的强迫振动

有滞后阻尼的单自由度系统,受简谐力 $F(t) = F_0 \sin \omega t$ 作用的情况如图 3.23 所示。根据式(2.138),质量块的运动微分方程为

$$m \ddot{x} + \frac{\beta k}{\omega} \dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t \quad (3.100)$$

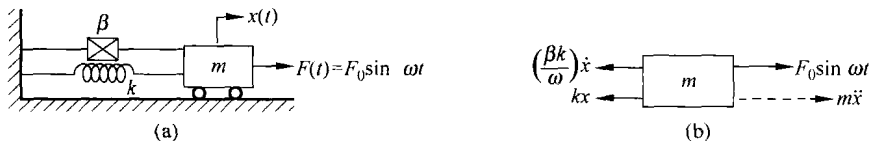


图 3.23 具有滞后阻尼的振动系统

其中, $(\beta k / \omega) \dot{x} = (h / \omega) \dot{x}$ 表示阻尼力^①。虽然式(3.100)的解对一般的力函数 $F(t)$ 来说是非常复杂的,但我们的兴趣在于确定简谐力作用下的响应。

式(3.100)的稳态解可以假定为

$$x_p(t) = X \sin(\omega t - \phi) \quad (3.101)$$

将式(3.101)代入式(3.100),得

$$X = \frac{F_0}{k \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \beta^2 \right]^{1/2}} \quad (3.102)$$

和

$$\phi = \arctan \frac{\beta}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \quad (3.103)$$

图 3.24 中给出了对应于不同的 β 值,式(3.102)和式(3.103)中的 X 和 ϕ 随 $\frac{\omega}{\omega_n}$ 的变化规

^① 与黏性阻尼相比,这里的阻尼力为激振力频率 ω 的函数(见 2.8 节)。

律。比较图 3.24 和图 3.11(对应于黏性阻尼系统)可得如下结论:

(1) 对于滞后阻尼系统,幅值比 $\frac{X}{F_0/k}$ 在共振时达到最大值 $F_0/k\beta$;而对于黏性阻尼系统,最大值出现在小于共振频率处($\omega < \omega_n$)。

(2) 对于滞后阻尼系统,在 $\omega = 0$ 时,相角 $\phi = \arctan(\beta)$;而对于黏性阻尼系统,在 $\omega = 0$ 时,相角 $\phi = 0$ 。这表明对于滞后阻尼系统,响应与力函数不可能同相。

若图 3.23 中的简谐力为 $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$,则运动微分方程为

$$m \ddot{x} + \frac{\beta k}{\omega} \dot{x} + kx = F_0 e^{i\omega t} \quad (3.104)$$

此时,响应 $x(t)$ 是包括因子 $e^{i\omega t}$ 的简谐函数。因此 $\dot{x}(t) = i\omega x(t)$,式(3.104)变为

$$m \ddot{x} + k(1 + i\beta)x = F_0 e^{i\omega t} \quad (3.105)$$

其中, $k(1 + i\beta)$ 称为复数刚度或复数阻尼。式(3.105)的稳态解为下式的实部:

$$x(t) = \frac{F_0 e^{i\omega t}}{k \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 + i\beta \right]} \quad (3.106)$$

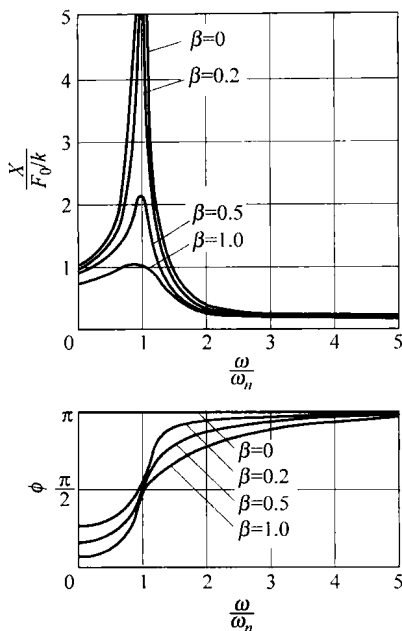


图 3.24 稳态响应

3.10 其他类型阻尼系统的强迫振动

由于黏性阻尼对应的系统的运动微分方程是线性,因而它是实际应用中的一种最简单的阻尼形式。在库仑阻尼与滞后阻尼情况下,为简化分析,定义等效黏性阻尼系数。即使对于更复杂形式的阻尼,也可定义类似的等效黏性阻尼系数,如下面例 3.7 所示。文献[3.12]讨论了等效阻尼的实际应用。

例 3.7 当物体在湍流中运动时,所受阻力与速度的平方成正比,求这类平方阻尼的等效黏性阻尼系数。

解: 假定阻尼力为

$$F_d = \pm a(\dot{x})^2 \quad (E.1)$$

其中, a 是常数; \dot{x} 是阻尼器中的相对速度。当 \dot{x} 为正(负)值时,式(E.1)中采用负(正)号。在简谐运动 $x(t) = X \sin \omega t$ 的一个周期中能量的损耗为

$$\Delta W = 2 \int_{-x}^x a \dot{x}^2 dx = 2X^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a \omega^2 \cos^3 \omega t d(\omega t) = \frac{8}{3} \omega^2 a X^3 \quad (E.2)$$

令此能量等于等效黏性阻尼在一个周期中损耗的能量(见式(2.94)):

$$\Delta W = \pi c_{eq} \omega X^2 \quad (\text{E. 3})$$

则得等效黏性阻尼系数 c_{eq} 为

$$c_{eq} = \frac{8}{3\pi} a \omega X \quad (\text{E. 4})$$

注意: c_{eq} 不是常量, 而是随 ω 与 X 发生变化。

稳态响应的幅值可以根据式(3.30)求得:

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta_{eq}r)^2}} \quad (\text{E. 5})$$

其中, $r = \omega/\omega_n$; ζ_{eq} 为

$$\zeta_{eq} = \frac{c_{eq}}{c_c} = \frac{c_{eq}}{2m\omega_n} \quad (\text{E. 6})$$

利用式(E.4)与式(E.6), 由式(E.5)得

$$X = \frac{3\pi m}{8ar^2} \left[-\frac{(1-r^2)^2}{2} + \sqrt{\frac{(1-r^2)^4}{4} + \left(\frac{8ar^2\delta_{st}}{3\pi m}\right)^2} \right]^{1/2} \quad (\text{E. 7})$$

3.11 自激振动与稳定性分析

一般地说, 外加于系统的激振力与系统的运动无关, 但也有一些系统的激振力是系统运动参数(位移、速度或加速度)的函数。由于系统本身的运动会引起激振力(见习题 3.74), 所以这类系统称为**自激振动系统**。旋转轴的不稳定运动、涡轮叶片的颤振、液流所导致的管道的振动、汽车转向轮的摆振和空气动力所致的桥的振动均是典型的自激振动的例子。

3.11.1 动力稳定性分析

若运动(或位移)随时间收敛或保持恒定状态, 则称系统是动力稳定的。另一方面, 若位移的幅值随时间连续地增加(发散), 则称系统是动力不稳定的。如果由于自激使得能量不断输入系统, 则运动将是发散的, 从而系统是不稳定的。为研究导致系统不稳定的情况, 考虑如下的单自由度系统的运动微分方程

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (3.107)$$

若假设解的形式为 $x(t) = Ce^{st}$, 其中 C 是常数, 则由式(3.107)可得特征方程为

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} = 0 \quad (3.108)$$

该方程的根为

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2} \left[\left(\frac{c}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m} \right]^{1/2} \quad (3.109)$$

由于假设解的形式为 $x(t) = Ce^{st}$, 故若 s_1 与 s_2 是正实根, 则运动将是发散的并呈非周

期性。如果 c/m 与 k/m 均为正值,则可避免这种情况。若根 s_1 与 s_2 是共轭复根并具有正实部,则运动也将是发散的。为研究这种情况,将式(3.108)的根 s_1 与 s_2 表示为

$$s_1 = p + iq, \quad s_2 = p - iq \quad (3.110)$$

其中, p 与 q 均为实数,则

$$(s - s_1)(s - s_2) = s^2 - (s_1 + s_2)s + s_1 s_2 = s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} = 0 \quad (3.111)$$

由式(3.111)与式(3.110)可得

$$\frac{c}{m} = -(s_1 + s_2) = -2p, \quad \frac{k}{m} = s_1 s_2 = p^2 + q^2 \quad (3.112)$$

式(3.112)表明,若 p 为负数,则值 c/m 为正;若 $p^2 + q^2$ 为正数,则 k/m 必为正。于是若 c 与 k 为正值(假定 m 为正),则系统将是动力稳定的。

例 3.8 考虑如图 3.25(a)所示放置在运动的皮带上的弹簧-质量系统。质量块与皮带之间的动摩擦系数随相对(滑动)速度发生变化,如图 3.25(b)所示。当相对滑动速度增加时,摩擦系数首先自其静态值线性地下降,然后再开始增加。假定相对滑动速度 v 小于临界值 v_Q ,则摩擦系数可以表示为

$$\mu = \mu_0 - \frac{a}{W}v$$

其中, a 为常数; $W = mg$ 是质量块的重量。试讨论质量块在其静平衡位置附近所作的自由振动特点。

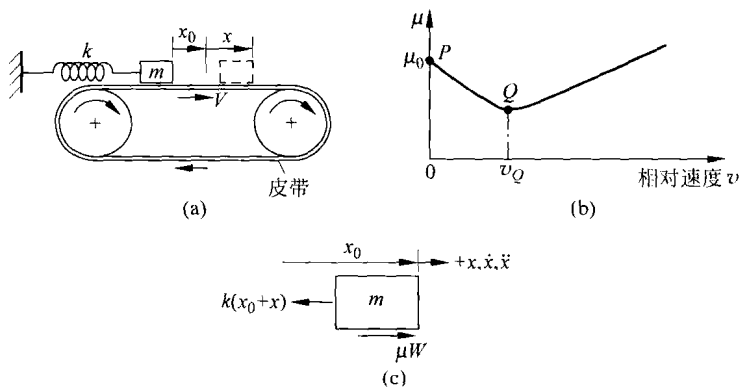


图 3.25 受弹簧约束的质量块在皮带摩擦力作用下的运动

解: 令质量块 m 的平衡位置对应于弹簧的伸长 x_0 , 则

$$\mu W = kx_0$$

即

$$x_0 = \frac{\mu W}{k} = \frac{\mu_0 W}{k} - \frac{aV}{k}$$

其中, V 是皮带的速度。若质量块相对于静平衡位置 x_0 的距离为 x , 则相对滑动速度 v 为

$$v = V - \dot{x}$$

应用牛顿第二定律,质量块自由振动的运动微分方程可以表示为(见图 3.25(c))

$$m\ddot{x} = -k(x_0 + x) + \mu W = -k(x_0 + x) + W\left(\mu_0 - \frac{a}{W}(V - \dot{x})\right)$$

即

$$m\ddot{x} - a\dot{x} + kx = 0 \quad (\text{E. 1})$$

由于 \dot{x} 的系数为负,所以由式(E. 1)所确定的运动是不稳定的。式(E. 1)的解为

$$x(t) = e^{(a/2m)t} \{C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}\} \quad (\text{E. 2})$$

其中, C_1 与 C_2 为常数,而

$$r_1 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{a}{m} \right)^2 - 4 \frac{k}{m} \right]^{1/2}$$

$$r_2 = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{a}{m} \right)^2 - 4 \frac{k}{m} \right]^{1/2}$$

从式(E. 2)可以看出, x 值随时间不断增大,一直增大到满足 $V - \dot{x} = 0$ 或 $V + \dot{x} = \mu_0$ 。此后,动滑动摩擦系数 μ 将具有一个负斜率。因而运动的特点将是完全不同的[3.13]。

注意:类似的运动还可以在皮带-带轮式刹车装置和机床的滑座中观察到。例如在机床中,工作台安装在导轨上,进给丝杠用来将运动传递给工作台,如图 3.26 所示。在某些情况下,工作台可能以不均匀运动的方式滑动,甚至当进给丝杠工作平稳时也是如此。这种运动俗称爬行运动(滑动-粘附现象)。对这种运动的简化分析可通过将工作台视为一质量为 m 的质量块,工作台与进给丝杠间的连接视为弹簧(k)与黏性阻尼器(c)来进行。质量块与滑动表面间的摩擦系数随滑动速度发生变化,如图 3.25(b)所示。质量块(工作台)的运动微分方程可根据例 3.8 中的方程(E. 1)得到

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \mu W = W \left[\mu_0 - \frac{a}{W}(V - \dot{x}) \right]$$

即

$$m\ddot{x} + (c - a)\dot{x} + kx = 0$$

显然若 $c < a$,则系统是动力不稳定的。

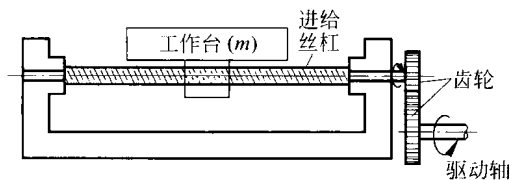


图 3.26 机床丝杠驱动工作台运动

3.11.2 流体导致的动力不稳定

因流体在物体周围流动所导致的振动称为流(动)致振动(flow-induced vibration)。例如,

当流体在高的烟囱、潜艇潜望镜、输电线以及核燃料棒的周围流动时,都会引起它们产生剧烈的振动。与此类似,当流体通过水管、油管、气体压缩机管子时,同样会引起它们产生剧烈的振动。在所有这些例子中,系统的振动都连续地从振源处吸收能量,导致越来越大的振动幅值。

流致振动可能是因多种现象导致的。例如,在覆冰输电线中,称为舞动(galloping)的低频($1\sim 2\text{ Hz}$)振动的发生是因空气在覆冰输电线周围流动所形成的升力与阻力作用的结果。机翼的颤振也是因空气流经其周围时所形成的升力与阻力作用的结果。此外,称为输电线蜂鸣(singing of transmission lines)的高频振动是因涡流脱落导致的。

为了研究输电线的舞动现象,考虑图 3.27(a)所示受风载荷(风速为 U)作用的圆形截面的情况。由于截面的对称性,风引起的作用力方向与风的方向相同。若圆柱体有一方向向下的速度 u ,则风将产生一向上的速度分量 u (相对于圆柱体),除水平分量 U 外。于是由风作用于圆柱体的合力方向是斜向上的,如图 3.27(b)所示。由于该力(向上方向)与圆柱体的运动方向(向下)相反,所以圆柱体的运动将被消弱。与此相反,若考虑一非圆形截面如覆冰的圆柱形导线,风的合力并不总是与导线的运动方向相反,如图 3.27(c)所示。在这种情况下,是由于风力而引起导线的运动,因而表明系统具有负阻尼。

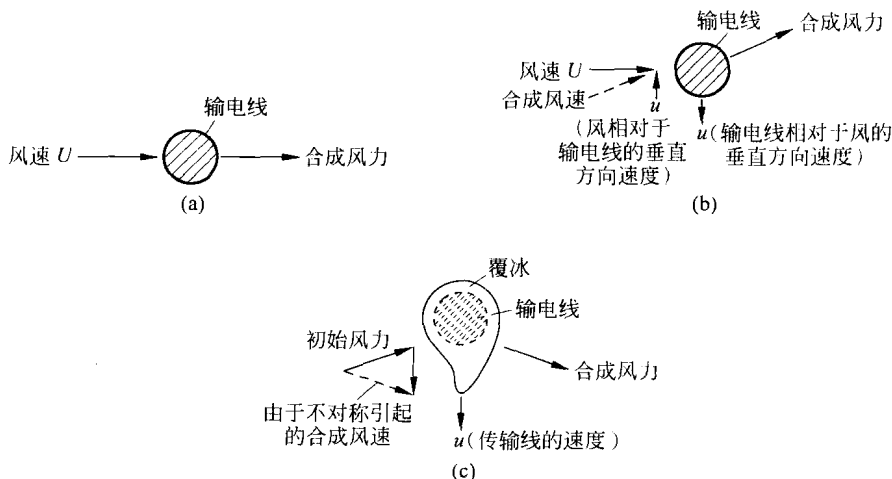


图 3.27 输电线的舞动

为了更形象地解释引起输电线蜂鸣的原因,考虑一流经光滑圆柱体的流体。在某些条件下,在下游会形成规则形式的交变旋涡,如图 3.28 所示。为纪念杰出的流体机械师 Theodor von Karman,将这些旋涡称为卡门旋涡(Karman vortices),他于 1911 年首次从理论上预言了旋涡的稳态空间。卡门旋涡沿顺时针与逆时针方向交替地变化,从而在圆柱体上形成简谐变化的升力,该力垂

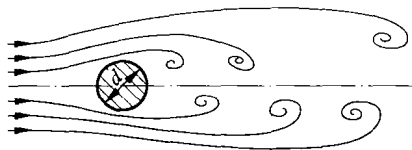


图 3.28 经过圆柱体的液流

直于流体的速度方向。实验数据表明,当雷诺数 Re 在 $60 \sim 5000$ 的范围内时,会强烈地发生规则的旋涡脱落。此时

$$Re = \frac{\rho V d}{\mu} \quad (3.113)$$

其中, d 是圆柱体的直径; ρ 为流体的密度; V 是风速; μ 是流体的绝对黏度。当 $Re > 1000$ 时, 涡流脱落的无量纲频率可以表示为斯特罗哈(Strouhal)数 St , 其值近似等于 0.21:

$$St = \frac{fd}{V} = 0.21 \quad (3.114)$$

其中, f 是旋涡脱落的频率。简谐变化的升力 F 为

$$F(t) = \frac{1}{2} c \rho V^2 A \sin \omega t \quad (3.115)$$

其中, c 是常数(对于圆柱体, $c \approx 1$); A 是圆柱体在与速度 V 垂向方向上的投影面积; ω 是圆频率($\omega = 2\pi f$); t 是时间。由于流体流速 V 没有交变分量, 所以旋涡脱落的机理也可称为是自激的。从设计的观点看, 必须保证下面的条件:

- (1) 由式(3.115)给定的施加在圆柱体上的力的大小应小于静态失效载荷。
- (2) 即使力 F 非常小, 在结构(圆柱体)的预期寿命内, 振动的频率 f 也不应导致疲劳失效。
- (3) 为避免共振, 旋涡脱落的频率 f 不应与结构或圆柱体的固有频率相等。

有几种方法可用来降低因流致振动所引起的失效:

(1) 为减小因旋涡脱落引起的输电线的蜂鸣振动, 可以采用 Stock 桥式阻尼器(有阻尼的吸振器)。典型的桥式阻尼器由两端附着有质量块的短钢索构成, 该阻尼器固定在传输线上, 如图 3.29(a)所示。于是该装置可视为一弹簧-质量系统, 同时可通过调整钢索的长度或质量块的质量以使其固有频率与流致振动的频率一致。一般是将桥式阻尼器固定在输电线振动幅值较大的位置。

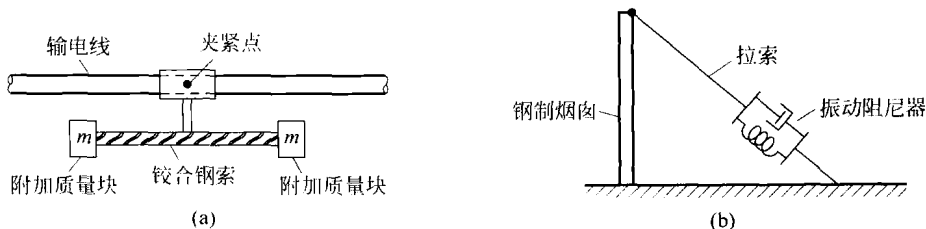


图 3.29 Stock 桥式阻尼器

(2) 对于高度尺寸较大的钢制烟囱, 如图 3.29(b)所示, 可以通过在烟囱上端与地面间的拉索上附加振动阻尼器来降低流致振动的效应。

(3) 对于高度尺寸较大的烟囱, 常在烟囱的周围缠绕螺旋形扰流器或铁箍, 如图 3.30 所示。螺旋形扰流器可以破坏旋涡脱落的方式, 从而使在烟囱上不会产生规则的激振力。

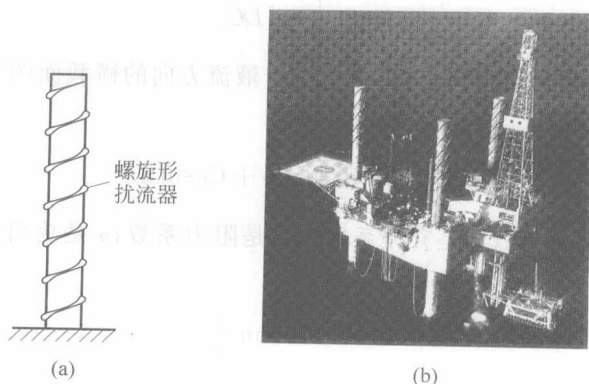


图 3.30 螺旋形扰流器

(4) 对于高速行驶的汽车,风致升力可导致轮胎空载,从而会出现转向控制与汽车稳定性方面的问题。虽然利用扰流器可以抵消部分升力,但同时又会使阻力增大。近年来,出现了可拆卸式反向翼型用来形成向下的动态力,以提高系统的稳定性(见图 3.31)。

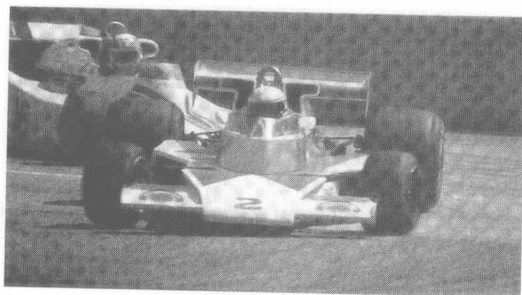


图 3.31 满足空气动力学特性的赛车具有很小的空气阻力和很高的稳定性

例 3.9 试求导致图 3.32 所示机翼(单自由度系统模型)失去稳定性的自由流速 u 。

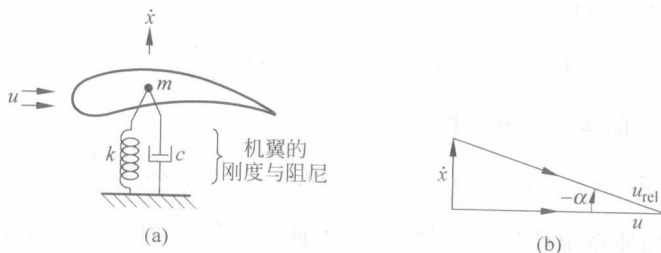


图 3.32 机翼简化为一单自由度系统模型

解: 解题的方法是求作用在机翼(或质量块 m)上的垂向力,以求得导致零阻尼的条件。由于流体的流动,作用在机翼(或质量块 m)上的垂向力可以表示为

$$F = \frac{1}{2} \rho u^2 D C_x \quad (\text{E. 1})$$

其中, ρ 是流体的密度; u 是自由流速; D 是垂直于液流方向的横截面的宽度; C_x 是垂向力系数, 它可表示为

$$C_x = \frac{u_{\text{rel}}^2}{u^2} (C_L \cos \alpha + C_D \sin \alpha) \quad (\text{E. 2})$$

其中, u_{rel} 是流体的相对速度; C_L 是升力系数; C_D 是阻力系数; α 是攻角 (见图 3.32), 按下式计算:

$$\alpha = -\arctan \frac{\dot{x}}{u} \quad (\text{E. 3})$$

若攻角较小, 则

$$\alpha = -\frac{\dot{x}}{u} \quad (\text{E. 4})$$

C_x 可近似地用在 $\alpha=0$ 处的泰勒级数展开表示, 即

$$C_x \approx C_x|_{\alpha=0} + \left. \frac{\partial C_x}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \alpha \quad (\text{E. 5})$$

其中, 当 α 值较小时, $u_{\text{rel}} \approx u$, 因此式 (E. 2) 变为

$$C_x = C_L \cos \alpha + C_D \sin \alpha \quad (\text{E. 6})$$

利用式 (E. 6) 与式 (E. 4), 式 (E. 5) 可以表示为

$$\begin{aligned} C_x &= (C_L \cos \alpha + C_D \sin \alpha)|_{\alpha=0} \\ &+ \alpha \left[\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \cos \alpha - C_L \sin \alpha + \frac{\partial C_D}{\partial \alpha} \sin \alpha + C_D \cos \alpha \right] \bigg|_{\alpha=0} \\ &= C_L|_{\alpha=0} + \alpha \left. \frac{\partial C_x}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \\ &= C_L|_{\alpha=0} - \frac{\dot{x}}{u} \left\{ \left. \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} + C_D|_{\alpha=0} \right\} \end{aligned} \quad (\text{E. 7})$$

将式 (E. 7) 代入式 (E. 1), 得

$$F = \frac{1}{2} \rho u^2 D C_L \bigg|_{\alpha=0} - \frac{1}{2} \rho u D \left. \frac{\partial C_x}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \dot{x} \quad (\text{E. 8})$$

故机翼 (或质量块 m) 的运动微分方程为

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = F = \frac{1}{2} \rho u^2 D C_L \bigg|_{\alpha=0} - \frac{1}{2} \rho u D \left. \frac{\partial C_x}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \dot{x} \quad (\text{E. 9})$$

式 (E. 9) 右边第 1 项使系统产生一个静位移, 因此只有第 2 项可以导致系统不稳定。若仅考虑右端第 2 项, 则运动微分方程为

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx \equiv m \ddot{x} + \left[c + \frac{1}{2} \rho u D \left. \frac{\partial C_x}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \right] \dot{x} + kx = 0 \quad (\text{E. 10})$$

注意: m 包含夹带流体的质量。由式 (E. 10) 可知, 若 c 为负数, 则机翼 (或质量块

m) 的位移将不断增大而不会有一个界限(即系统出现不稳定性现象)。因此,由 $c=0$ 可以确定导致机翼产生不稳定振动的最小气流速度 u 为

$$u = - \left\{ \frac{2c}{\rho D \frac{\partial C_x}{\partial \alpha} \bigg|_{\alpha=0}} \right\} \quad (\text{E. 11})$$

对于矩形横截面,可取 $\frac{\partial C_x}{\partial \alpha} \bigg|_{\alpha=0} = -2.7^{[3.4]}$ 。

注意:与例 3.9 中类似的分析也可用于其他结构,如水箱(图 3.33(a))和覆冰输电线在风载荷作用下的振动问题。

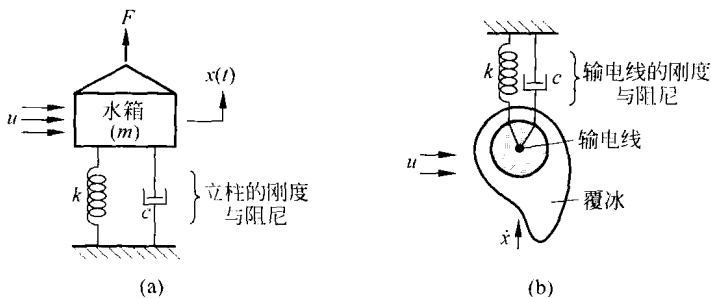


图 3.33 典型振动结构的不稳定性

例 3.10 钢制烟囱高 20 m, 内径 0.75 m, 外径 0.80 m。流经烟囱周围的风, 导致沿气流方向的横向振动。试求临界风速。

解: 解题的方法是将烟囱视为悬臂梁模型, 再令其横向振动的频率等于旋涡脱落的频率。

为求烟囱横向振动的固有频率, 可假定适当的横向变形形式(见 8.7 节), 应用瑞利能量法求解。也可采用表 8.4 所给悬臂梁的固有频率。根据表 8.4, 悬臂梁横向振动的第一阶固有频率为 ω_1

$$\omega_1 = (\beta_1 l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \quad (\text{E. 1})$$

其中

$$\beta_1 l = 1.875\,104 \quad (\text{E. 2})$$

烟囱的相关参数为: $E = 207 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, 单位重量为 $\rho g = 76.5 \times 10^3 \text{ N/m}^3$, $l = 20 \text{ m}$, $d = 0.75 \text{ m}$, $D = 0.80 \text{ m}$, 所以

$$A = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4} (0.80^2 - 0.75^2) = 0.060\,868\,5 (\text{m}^2)$$

与

$$I = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) = \frac{\pi}{64} (0.80^4 - 0.75^4) = 0.004\,574\,648 \text{ (m}^4\text{)}$$

于是

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 1.875\,104^2 \left\{ \frac{207 \times 10^9 \times 0.004\,574\,648}{\frac{76.5 \times 10^3}{9.81} \times 0.060\,868\,5 \times 20^4} \right\}^{1/2} \\ &= 12.415\,417 \text{ (rad/s)} = 1.975\,970 \text{ Hz}\end{aligned}$$

旋涡脱落的频率 f 由斯特哈罗数确定:

$$St = \frac{fd}{V} = 0.21$$

利用 $d=0.80 \text{ m}$ 与 $f=f_1=1.975\,970 \text{ Hz}$, 引起共振的风速 V 为

$$V = \frac{f_1 d}{0.21} = \frac{1.975\,970 \times 0.80}{0.21} = 7.527\,505 \text{ (m/s)}$$

3.12 利用 MATLAB 求解的例子

例 3.11 利用 MATLAB, 绘制弹簧-质量系统在简谐力作用下的响应曲线。已知数据如下: $m=5 \text{ kg}$, $k=2000 \text{ N/m}$, $F(t)=100\cos 30t \text{ N}$, $x_0=0.1 \text{ m}$, $\dot{x}_0=0.1 \text{ m/s}$ 。

解: 根据式(3.9), 系统的全解形式如下:

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \left(x_0 - \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2} \right) \cos \omega_n t + \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2} \cos \omega t \quad (\text{E. } 1)$$

式中, $f_0 = \frac{F_0}{m} = \frac{100}{5} = 20$, $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 20 \text{ rad/s}$, $\omega = 30 \text{ rad/s}$ 。

利用 MATLAB 绘制解曲线式(E. 1)的程序如下:

```
%Ex3_11.m
F0=100;
wn=20;
m=5;
w=30;
x0=0.1;
x0_dot=0.1;
f_0=F0/m;
for i=1:101
    t(i)=2*(i-1)/100;
    x(i)=x0_dot*sin(wn*t(i))/wn+(x0-f_0/(wn^2-w^2))*cos(wn*t(i))+f_0/(wn^2-w^2)*cos(w*t(i));
end
```

```

plot(t,x);
xlabel('t');
ylabel('x(t)');
title('Ex3.11')

```

所绘曲线如图 3.34 所示。

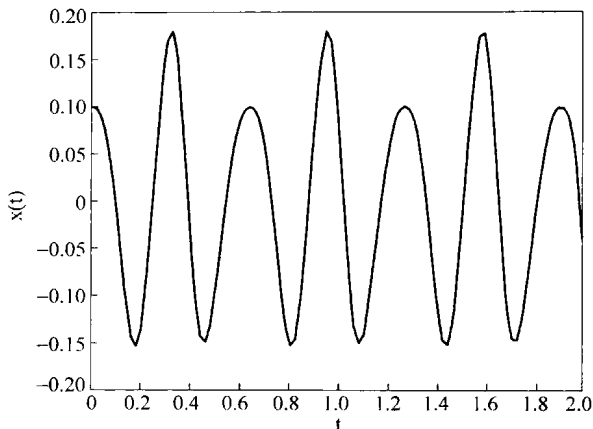


图 3.34 例 3.11 图

例 3.12 利用 MATLAB, 绘制具有库仑阻尼的弹簧-质量系统在简谐力作用下的响应曲线。已知数据如下:

$$m=5 \text{ kg}, \quad k=2000 \text{ N/m}, \quad \mu=0.5, \quad F(t)=100\sin 30t \text{ N},$$

$$x_0=0.1 \text{ m}, \quad \dot{x}_0=0.1 \text{ m/s}.$$

解: 系统的运动微分方程为

$$m\ddot{x} + kx + \mu mg \operatorname{sgn} \dot{x} = F_0 \sin \omega t \quad (\text{E. 1})$$

令 $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$, 式(E. 1)可以写成如下一阶微分方程组的形式:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{F_0}{m} \sin \omega t - \frac{k}{m} x_1 - \mu g \operatorname{sgn} x_2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{E. 2})$$

初始条件为 $x_1(0)=0.1, x_2(0)=0.1$ 。利用 MATLAB 的 ode23 指令求解式(E. 2)的程序如下:

```

%Ex3_12.m
%This program will use the function dfunc3_12.m, they should be in the same folder
tspan=[0:0.01:4];
x0=[0.1;0.1];
[t,x]=ode23 ('dfunc3_12',tspan,x0);
disp('    t    x(t)    xd(t)');
disp([t,x]);

```

```

plot(t,x(:,1));
xlabel('t');
gtext('x(t)');
title('Ex3.12');

% dfunc3_12.m
function f=dfunc3_12(t,x)
f=zeros(2,1);
f(1)=x(2);
f(2)=100*sin(30*t)/5-9.81*0.5*sign(x(2))-(2000/5)*x(1);
>> Ex3-12

```

t	x(t)	xd(t)
0	0.1000	0.1000
0.0100	0.0991	-0.2427
0.0200	0.0954	-0.4968
0.0300	0.0894	-0.6818
0.0400	0.0819	-0.8028
0.0500	0.0735	-0.8704
:		
3.9500	0.0196	-0.9302
3.9600	0.0095	-1.0726
3.9700	-0.0016	-1.1226
3.9800	-0.0126	-1.0709
3.9900	-0.0226	-0.9171
4.0000	-0.0307	-0.6704

所绘图形如图 3.35 所示。

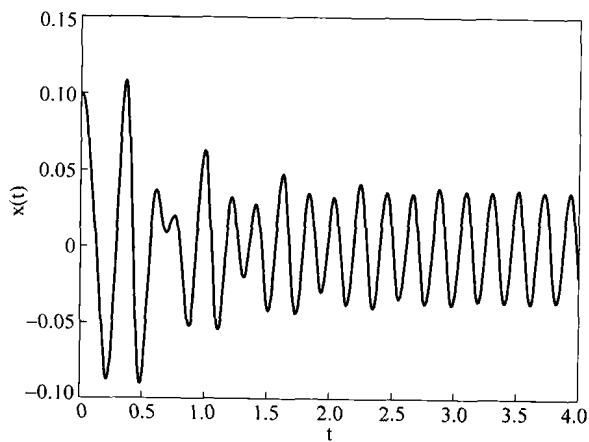


图 3.35 例 3.12 图

例 3.13 利用 MATLAB, 求具有黏性阻尼的弹簧-质量系统在基础激励 $y(t) = Y \sin \omega t$ 作用下的响应并绘制曲线。已知数据如下:

$$m = 1200 \text{ kg}, \quad k = 4 \times 10^5 \text{ N/m}, \quad \zeta = 0.5, \quad Y = 0.05 \text{ m},$$

$$\omega = 29.0887 \text{ rad/s}, \quad x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = 0.1 \text{ m/s}.$$

解: 根据式(3.64), 系统的运动微分方程为

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = ky + c \dot{y} \quad (\text{E. 1})$$

令 $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$, 式(E.1)可以写成如下—阶微分方程组的形式:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{c}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 + \frac{k}{m}y + \frac{c}{m}\dot{y} \end{aligned} \right\} \quad (\text{E. 2})$$

其中, $c = \zeta c_c = 2\zeta \sqrt{km} = 2 \times 0.5 \sqrt{4 \times 10^5 \times 1200}$, $y = 0.05 \sin 29.0887t$, $\dot{y} = 29.0887 \times 0.05 \cos 29.0887t$ 。利用 MATLAB 的 ode23 指令求解式(E.2)的程序如下:

```
%Ex3_13.m
%This program will use the function dfunc3_13.m, they should be in the same
%folder
tspan=[0: 0.01: 2];
x0=[0; 0.1];
[t, x]=ode23 ('dfunc3_13', tspan, x0);
disp(' t x(t) xd(t) ');
disp([t x]);
plot(t, x(:, 1));
xlabel('t');
gtext('x(t)');
title('Ex3.13');

% dfunc3_13.m
function f=dfunc3_13(t, x)
f=zeros(2, 1);
f(1)=x(2);
f(2)= 400000 * 0.05 * sin (29.0887 * t)/1200+... sqrt (400000 * 1200) * 29.0887 * 0.05 *
cos (29.0887 * t)/1200...- sqrt (400000 * 1200) * x(2)/1200- (400000/1200) * x(1);

>>Ex3_13

t          x(t)          xd(t)
0           0          0.1000
0.0100     0.0022       0.3422
```


0.0200	0.0067	0.5553
0.0300	0.0131	0.7138
0.0400	0.0208	0.7984
0.0500	0.0288	0.7976
⋮		
1.9500	-0.0388	0.4997
1.9600	-0.0322	0.8026
1.9700	-0.0230	1.0380
1.9800	-0.0118	1.1862
1.9900	0.0004	1.2348
2.0000	0.0126	1.1796

所绘曲线如图 3.36 所示。

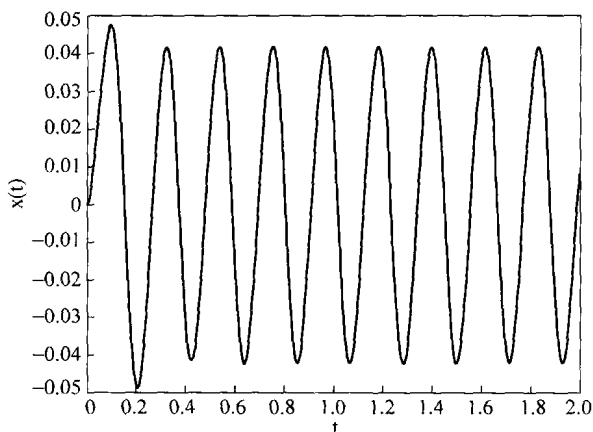


图 3.36 例 3.13 图

例 3.14 编写一个命名为 Program3.m 的通用 MATLAB 程序, 求具有黏性阻尼的单自由度弹簧-质量系统在简谐激励 $F_0 = \cos \omega t$ 或 $F_0 = \sin \omega t$ 作用下的稳态响应, 并根据以下数据求解并绘制曲线:

$$m = 5 \text{ kg}, \quad c = 20 \text{ N} \cdot \text{s/m}, \quad k = 500 \text{ N/m}, \quad F_0 = 250 \text{ N},$$

$$\omega = 40 \text{ rad/s}, \quad n = 40, \quad ic = 0.$$

解: 程序 Program3.m 中的如下数据需要在运行后由键盘输入:

xm——质量块的质量

xc——阻尼常数

xk——弹簧常数

f0——激励力的幅值

om——激励力的频率

n——一个周期内所取步长数以确定在一个周期内计算响应的离散点数

ic——取 1, 对余弦形激励; 取 0, 对正弦形激励

程序的输出为:

步长的序号 i , $x(i)$, $\dot{x}(i)$, $\ddot{x}(i)$

程序还绘制 \dot{x} 和 \ddot{x} 随时间的变化曲线。程序的运行结果如下:

```
>>program3
```

```
steady state response of an undamped single degree of freedom system under harmonic force
```

```
Given data
```

```
xm=5.00000000e+000
```

```
xc=2.00000000e+001
```

```
xk=5.00000000e+002
```

```
f0=2.50000000e+002
```

```
om=4.00000000e+001
```

```
ic=0
```

```
n=20
```

```
Response:
```

i	x(i)	xd(i)	xdd(i)
1	1.35282024e-002	1.21035472e+000	-2.16451238e+001
2	2.22166075e-002	9.83897315e-001	-3.55465721e+001
3	2.87302863e-002	6.61128738e-001	-4.59684581e+001
4	3.24316314e-002	2.73643972e-001	-5.18906102e+001
5	3.29583277e-002	-1.40627096e-001	-5.27333244e+001
6	3.02588184e-002	-5.41132540e-001	-4.84141094e+001
7	2.45973513e-002	-8.88667916e-001	-3.93557620e+001
8	1.65281129e-002	-1.14921388e+000	-2.64449806e+001
9	6.84098018e-003	-1.29726626e+000	-1.09455683e+001
10	-3.51579846e-003	-1.31833259e+000	5.62527754e+000
11	-1.35284247e-002	-1.21035075e+000	2.16454794e+001
12	-2.22167882e-002	-9.83890787e-001	3.55468612e+001
13	-2.87304077e-002	-6.61120295e-001	4.59686523e+001
14	-3.24316817e-002	-2.73634442e-001	5.18906907e+001
15	-3.29583019e-002	1.40636781e-001	5.27332831e+001
16	-3.02587190e-002	5.41141432e-001	4.84139504e+001
17	-2.45971881e-002	8.88675144e-001	3.93555009e+001
18	-1.65279018e-002	1.14921874e+000	2.64446429e+001
19	-6.84074192e-003	1.29726827e+000	1.09451871e+001
20	3.51604059e-003	1.31833156e+000	-5.62566494e+000

所绘曲线如图 3.37 所示。

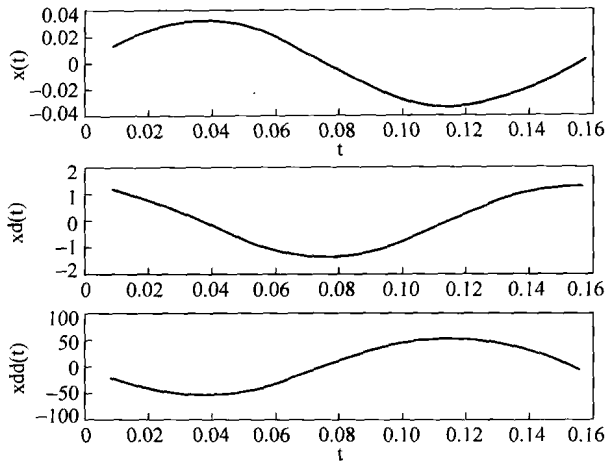


图 3.37 例 3.14 图

3.13 C++ 程序

除了利用 MATLAB,也可用一个交互式的 C++ 程序(Program3.cpp)来求解黏性阻尼单自由度系统的稳态响应。程序的输入和输出参数与例 3.14 中的 MATLAB 程序 Program3.m 的输入和输出参数类似。

例 3.15 利用 C++ 程序求例 3.14 中黏性阻尼系统的稳态响应。

解: 输入的数据通过交互的方式键入。程序的输入和输出如下:

```
Please input n and ic:
20 0
Please input xm,xc,xk,f0,om:
5.0 20.0 500.0 250.0 40.0
STEADY STATE RESPONSE OF AN UNDERDAMPED
SINGLE DEGREE OF FREEDOM SYSTEM UNDER HARMONIC FORCE

GIVEN DATA:
XM= 5
XC= 20
F0= 250
OM= 40
IC= 0
N= 20
```

RESPONSE:

I	X(I)	XD(I)	XDD(I)
0	0.01352820	1.21035472	-21.64512378
1	0.02221661	0.98389732	-35.54657206
2	0.02873029	0.66112874	-45.96845807
3	0.03243163	0.27364397	-51.89061025
4	0.03295833	-0.14062710	-52.73332439
5	0.03025882	-0.54113254	-48.41410938
6	0.02459735	-0.88866792	-39.35576205
7	0.01652811	-1.14921388	-26.44498065
8	0.00684098	-1.29726626	-10.94556828
9	-0.00351580	-1.31833259	5.62527754
10	-0.01352842	-1.21035075	21.64547945
11	-0.02221679	-0.98389079	35.54686119
12	-0.02873041	-0.66112029	45.96865235
13	-0.03243168	-0.27363444	51.89069066
14	-0.03295830	0.14063678	52.73328306
15	-0.03025872	0.54114143	48.41395037
16	-0.02459719	0.88867514	39.35550091
17	-0.01652790	1.14921874	26.44464294
18	-0.00684074	1.29726827	10.94518707
19	0.00351604	1.31833156	-5.62566494

3.14 Fortran 程序

本节给出一个命名为 HARESP. F 的 Fortran 计算机子程序来求单自由度黏性阻尼系统的稳态响应。程序中的可变输入量与例 3.14 中所给 MATLAB 程序 Program3. m 中的可变输入量是类似的。

例 3.16 利用 Fortran 子程序 HARESP. F 求例 3.14 中黏性阻尼系统的稳态响应。

解：子程序 HARESP. F 以及调用它的主程序均在程序 PROGRAM3. F 中给出。程序的执行结果如下：

```
STEADY STATE RESPONSE OF AN UNDERDAMPED
SINGLE DEGREE OF FREEDOM SYSTEM UNDER HARMONIC FORCE
GIVEN DATA:
XM=0.50000000E+01
XC=0.20000000E+02
XK=0.50000000E+03
F0=0.25000000E+03
OM=0.40000000E+02
IC=0
```

N=20

RESPONSE:

I	X(I)	XD(I)	XDD(I)
1	0.13528203E-01	0.12103548E+01	-0.21645124E+02
2	0.22216609E-01	0.98389733E+00	-0.35546574E+02
3	0.28730286E-01	0.66112888E+00	-0.45968460E+02
4	0.32431632E-01	0.27364409E+00	-0.51890614E+02
5	0.32958329E-01	-0.14062698E+00	-0.52733330E+02
6	0.30258821E-01	-0.54113245E+00	-0.48414116E+02
7	0.24597352E-01	-0.88866800E+00	-0.39355762E+02
8	0.16528117E-01	-0.11492138E+01	-0.26444986E+02
9	0.68409811E-02	-0.12972662E+01	-0.10945570E+02
10	-0.35157942E-02	-0.13183327E+01	0.56252708E+01
11	-0.13528424E-01	-0.12103508E+01	0.21645479E+02
12	-0.22216786E-01	-0.98389095E+00	0.35546856E+02
13	-0.28730409E-01	-0.66112041E+00	0.45968655E+02
14	-0.32431684E-01	-0.27363408E+00	0.51890697E+02
15	-0.32958303E-01	0.14063700E+00	0.52733284E+02
16	-0.30258721E-01	0.54114151E+00	0.48413952E+02
17	-0.24597190E-01	0.88867509E+00	0.39355507E+02
18	-0.16527895E-01	0.11492189E+01	0.26444633E+02
19	-0.68407385E-02	0.12972684E+01	0.10945182E+02
20	0.35160405E-02	0.13183316E+01	-0.56256652E+01

参 考 文 献

- 3.1 G. B. Thomas and R. L. Finney, *Calculus and Analytic Geometry* (6th ed.), Addison-Wesley, Reading, Mass., 1984.
- 3.2 J. W. Nilsson, *Electric Circuits*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1983.
- 3.3 J. P. Den Hartog, "Forced vibrations with combined Coulomb and viscous friction," *Journal of Applied Mechanics* (Transactions of ASME), Vol. 53, 1931, pp. APM 107-115.
- 3.4 R. D. Blevins, *Flow-Induced Vibration* (2nd ed.), Van Nostrand Reinhold, New York, 1990.
- 3.5 J. C. R. Hunt and D. J. W. Richards, "Overhead line oscillations and the effect of aerodynamic dampers," *Proceedings of the Institute of Electrical Engineers*, London, Vol. 116, 1969, pp. 1869-1874.
- 3.6 K. P. Singh and A. I. Soler, *Mechanical Design of Heat Exchangers and Pressure Vessel Components*, Arcturus Publishers, Cherry Hill, N. J., 1984.
- 3.7 N. O. Myklestad, "The concept of complex damping," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 19, 1952, pp. 284-286.
- 3.8 R. Plunkett (ed.), *Mechanical Impedance Methods for Mechanical Vibrations*, American Society of Mechanical Engineers, New York, 1958.

- 3.9 A. D. Dimarogonas, *Vibration Engineering*, West Publishing, St. Paul, 1976.
- 3.10 B. Westermo and F. Udvardi, "Periodic response of a sliding oscillator system to harmonic excitation," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 11, No. 1, 1983, pp. 135-146.
- 3.11 M. S. Hundal, "Response of a base excited system with Coulomb viscous friction," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 64, 1979, pp. 371-378.
- 3.12 J. P. Bandstra, "Comparison of equivalent viscous damping and nonlinear damping in discrete and continuous vibrating systems," *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, Vol. 105, 1983, pp. 382-392.
- 3.13 W. G. Green, *Theory of Machines* (2nd ed.), Blackie & Son, London, 1962.
- 3.14 S. A. Tobias, *Machine-Tool Vibration*, Wiley, New York, 1965.
- 3.15 R. W. Fox and A. T. McDonald, *Introduction to Fluid Mechanics* (4th ed.), Wiley, New York, 1992.

思考题

3.1 简答题

1. 无阻尼系统在简谐激励作用下稳态振动的振幅、频率和相角与简谐激励的振幅、频率和相角有怎样的关系?
2. 为什么作用在一个振动质量上的常力对稳态振动没有影响?
3. 振幅放大系数是如何定义的? 它与频率比有怎样的关系?
4. 如果振幅放大系数小于1, 激励频率与系统的固有频率有怎样的关系?
5. 在共振点附近, 黏性阻尼系统响应的振幅和相角分别是多少?
6. 对黏性阻尼系统而言, 与振幅的峰值对应的相角能大于 90° 吗?
7. 为什么在大多数情况下, 只是在共振点附近才需要考虑阻尼?
8. 用矢量图表示黏性阻尼受迫振动系统运动微分方程中的各量。
9. 对无阻尼系统而言, 共振时的响应会发生什么现象?
10. 定义下列术语: 拍振, 品质因子, 传递率, 复数刚度, 平方阻尼。
11. 从物理上解释为什么对于小的频率比, 振幅放大系数接近于1; 而对于大的频率比, 振幅放大系数却比较小?
12. 在主动隔振中, 增大阻尼会减小传递到基础上的力吗?
13. 在主动隔振中, 当机器的旋转速度增大时, 传递到基础上的力发生怎样的变化?
14. 当车辆行驶在不平的路面上而产生剧烈的振动时, 改变车速会使振动情况有所改变吗?
15. 在确定有阻尼系统受迫振动振幅的最大值时, 对于任意频率比 r 的值, 都可以假设阻尼消耗的能量与外力所做的功相等吗?

16. 在求非黏性阻尼系统受迫振动的振幅时,对其受迫振动做了怎样的假设?
17. 确定有阻尼受迫振动振幅的近似值时,可以完全不考虑阻尼吗? 如果是,在什么样的情况下才可以。
18. 干摩擦对限制共振振幅有作用吗?
19. 如何求黏性阻尼系统由于一个旋转的不平衡质量引起的响应?
20. 黏性阻尼系统受到外激励 $F_0 \sin \omega t$ 作用时,响应的频率是什么? 此响应是简谐的吗?
21. 振幅的峰值和共振振幅有什么区别?
22. 为什么在大多数情况下都使用黏性阻尼模型而不是其他阻尼形式?
23. 什么是自激振动?

3.2 判断题

1. 振幅放大系数是振幅和静变形的比。 ()
2. 如果激励是简谐的,那么响应也是简谐的。 ()
3. 响应的相角依赖于系统参数 m, c, k, ω 。 ()
4. 响应的相角依赖于激励函数的幅值。 ()
5. 拍振时,响应的振幅按一定的方式时而增大时而减小。 ()
6. 品质因子可以用来估计系统的阻尼。 ()
7. 半功率点是指振幅放大系数减小为 $Q/\sqrt{2}$ 时,那两个频率比所对应的点。 ()
8. 在黏性阻尼的情况下,振幅放大系数在共振点处取得最大值。 ()
9. 在滞后阻尼的情况下,响应总是与激励函数同相。 ()
10. 对于任意的激励频率值,阻尼总是使振幅放大系数减小。 ()
11. 旋转机械中的不平衡质量会引起系统产生振动。 ()
12. 对于小的干摩擦力,可以假设系统的稳态解是简谐的。 ()
13. 在一个具有旋转不平衡质量的系统中,当旋转速度较高时,阻尼的影响可以忽略不计。 ()

3.3 填空题

1. 就性质上来说,激励可以是____、非简谐但周期的、非周期的或随机的。
2. 系统对简谐激励的响应称为____响应。
3. 系统对突加非周期激励的响应称为____响应。
4. 当激励的频率与系统的固有频率相等时,此条件称为_____。
5. 振幅放大系数也称为_____系数。
6. 当激励的频率与系统的固有频率接近时,会产生_____现象。
7. 在基础运动(振幅为 Y)激励下,系统响应的振幅为 X ,比值 X/Y 称为位移的_____。
8. $Z(i\omega) = -m\omega^2 + i\omega c + k$ 称为系统的机械_____。

9. 与两个半功率点对应的频率差称为系统的_____。
10. 共振时振幅比的值称为_____因子。
11. 干摩擦阻尼也称为_____阻尼。
12. 对于_____的干摩擦阻尼值,质量块的运动将是不连续的。
13. 在滞后阻尼中, $k(1+i\beta)$ 称为_____刚度。
14. 当物体在_____流体中运动时,存在平方或速度平方阻尼。
15. 在自激振动系统中,_____本身可以产生激励力。
16. 汽轮机叶片的颤振是_____振动的一个例子。
17. 在自激情况下,系统的运动是_____,因而系统是不稳定的。

3.4 选择题

1. 共振时无阻尼系统的响应为_____。
(a) 很大 (b) 无限大 (c) 零
2. 阻尼系统振幅放大系数的减小是非常显著的,在_____时。
(a) 在 $\omega = \omega_n$ 附近 (b) 在 $\omega = 0$ 附近 (c) 在 $\omega = \infty$ 附近
3. 拍振的频率是_____。
(a) $\omega_n - \omega$ (b) ω_n (c) ω
4. 干摩擦阻尼在一个周期中所消耗的阻尼为_____。
(a) $4\mu NX$ (b) $4\mu N$ (c) $4\mu NX^2$
5. 复频率响应 $H(i\omega)$ 的定义是_____。
(a) $\frac{kX}{F_0}$ (b) $\frac{X}{F_0}$ (c) $\left| \frac{kX}{F_0} \right|$
6. 求库仑阻尼系统的等效黏性阻尼系数时,是基于考虑在_____内所消耗的能量。
(a) 半个周期 (b) 一个整周期 (c) 1 s
7. 在_____情况下,阻尼力依赖于激励力的频率。
(a) 黏性阻尼 (b) 库仑阻尼 (c) 滞后阻尼
8. 控制微分方程为 $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ 的系统是动力稳定的,如果_____。
(a) k 是正的 (b) k 和 c 都是正的 (c) c 是正的
9. 在_____情况下,可以定义复数刚度或复数阻尼。
(a) 滞后阻尼 (b) 库仑阻尼 (c) 黏性阻尼
10. 具有大小为 m 、偏心距为 e 的不平衡质量的旋转机械,转速为 ω ,质量为 M ,则其运动微分方程为_____。
(a) $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m\omega^2 \sin \omega t$
(b) $M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = me\omega^2 \sin \omega t$
(c) $M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = Me\omega^2 \sin \omega t$

11. 承受基础运动(幅值为 Y) 激励的系统, 传递给基础的力为 F_T , 则力的传递率定义为_____。

(a) $\frac{F_T}{kY}$

(b) $\frac{X}{kY}$

(c) $\frac{F_T}{k}$

3.5 连线题(其中, $r = \omega/\omega_n$ 代表频率比, ω 是激励频率, ω_n 是系统的固有频率; ζ 是阻尼比; ω_1 和 ω_2 分别是半功率点对应的频率)

1. 无阻尼系统的振幅放大系数

(a) $\frac{2\pi}{\omega_n - \omega}$

2. 拍的周期

(b) $\left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right]^{1/2}$

3. 阻尼系统的振幅放大系数

(c) $\frac{\omega_n}{\omega_2 - \omega_1}$

4. 阻尼系统的固有频率

(d) $\frac{1}{1 - r^2}$

5. 品质因子

(e) $\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$

6. 位移传递率

(f) $\left[\frac{1}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right]^{1/2}$

3.6 连线题

1. $m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y}$

(a) 具有库仑阻尼的系统

2. $M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = me\omega^2 \sin \omega t$

(b) 具有黏性阻尼的系统

3. $m\ddot{x} + kx \pm \mu N = F(t)$

(c) 承受基础运动激励的系统

4. $m\ddot{x} + k(1 + i\beta)x = F_0 \sin \omega t$

(d) 具有滞后阻尼的系统

5. $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$

(e) 具有旋转不平衡质量的系统

习 题

3.1 重为 50 N 的质量块悬挂在刚度为 4000 N/m 的弹簧上, 受幅值为 60 N、频率为 6 Hz 的简谐激励力作用。求: (a) 悬挂的重物引起的弹簧伸长; (b) 最大作用力引起的弹簧静位移; (c) 质量块强迫振动的幅值。

3.2 弹簧-质量系统所受简谐力的频率与系统的固有频率接近, 若简谐力的频率为 39.8 Hz, 系统的固有频率为 40 Hz, 求拍的周期。

3.3 弹簧-质量系统的刚度和质量分别为 $k = 4000$ N/m, $m = 10$ kg, 所受的简谐力为 $F(t) = 400 \cos 10t$ N。求系统对下列初始条件的全响应, 并画图表示。

(a) $x_0 = 0.1$ m, $\dot{x}_0 = 0$;

(b) $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 10$ m/s;

- (c) $x_0 = 0.1 \text{ m}$, $\dot{x}_0 = 10 \text{ m/s}$ 。
- 3.4 弹簧-质量系统的刚度和质量分别为 $k = 4000 \text{ N/m}$, $m = 10 \text{ kg}$, 所受的简谐力为 $F(t) = 400 \cos 20t \text{ N}$ 。求系统对下列初始条件的总响应, 并画图表示。
- (a) $x_0 = 0.1 \text{ m}$, $\dot{x}_0 = 0$;
- (b) $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 10 \text{ m/s}$;
- (c) $x_0 = 0.1 \text{ m}$, $\dot{x}_0 = 10 \text{ m/s}$ 。
- 3.5 弹簧-质量系统的刚度和质量分别为 $k = 4000 \text{ N/m}$, $m = 10 \text{ kg}$, 所受的简谐力为 $F(t) = 400 \cos 20.1t \text{ N}$ 。求系统对下列初始条件的总响应, 并画图表示。
- (a) $x_0 = 0.1 \text{ m}$, $\dot{x}_0 = 0$;
- (b) $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 10 \text{ m/s}$;
- (c) $x_0 = 0.1 \text{ m}$, $\dot{x}_0 = 10 \text{ m/s}$ 。
- 3.6 弹簧-质量系统的刚度和质量分别为 $k = 4000 \text{ N/m}$, $m = 10 \text{ kg}$, 所受的简谐力为 $F(t) = 400 \cos 30t \text{ N}$ 。求系统对下列初始条件的总响应, 并画图表示。
- (a) $x_0 = 0.1 \text{ m}$, $\dot{x}_0 = 0$;
- (b) $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 10 \text{ m/s}$;
- (c) $x_0 = 0.1 \text{ m}$, $\dot{x}_0 = 10 \text{ m/s}$ 。
- 3.7 弹簧-质量系统中, 弹簧的刚度为 $k = 2000 \text{ N/m}$, 质量块的重量为 100 N , 在简谐力 $F(t) = 25 \cos \omega t \text{ N}$ 作用下产生共振。求在 $\frac{1}{4}$ 周期末、 $2\frac{1}{2}$ 周期末和 $5\frac{3}{4}$ 周期末受迫振动的幅值。
- 3.8 一质量块悬挂在刚度为 4000 N/m 的弹簧上, 所受简谐力的幅值和频率分别为 100 N 和 5 Hz , 若质量块的振幅为 20 mm , 求质量块的质量 m 。
- 3.9 弹簧-质量系统的刚度和质量分别为 $k = 5000 \text{ N/m}$, $m = 10 \text{ kg}$, 所受简谐力的幅值为 250 N 。若质量块的振幅为 100 mm , 求激励频率 ω 。
- 3.10 如图 3.1(a) 所示, 周期力 $F(t) = F_0 \cos \omega t$ 作用在弹簧上的某点, 该位置距固定端的距离为总长度的 25% 。假定 $c = 0$, 求质量块 m 的稳态响应。
- 3.11 飞机发动机具有一个大小为 m 、偏心距为 r 的不平衡质量, 如果机翼可以简化成如图 3.38(b) 所示的横截面为 $a \times b$ 的等截面悬臂梁, 求发动机转速为 $N(\text{rpm})$ 时的最大位移。假设阻尼和从发动机到机翼自由端部分的影响不计。
- 3.12 如图 3.39(a) 所示, 三叶风力发电机在叶片转动平面内具有一个大小为 m 、偏心距为 r 的不平衡质量, 叶片到中心垂直轴 y 的距离为 R , 转动的角速度为 ω 。如果支承架可以简化成内径为 0.08 m 、外径为 0.1 m 的空心钢轴, 求支承架中的最大应力 (A 处)。假设系统关于垂直轴 y 的转动惯量为 $J_0 = 100 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $R = 0.5 \text{ m}$, $m = 0.1 \text{ kg}$, $r = 0.1 \text{ m}$, $h = 8 \text{ m}$, $\omega = 31.416 \text{ rad/s}$ 。

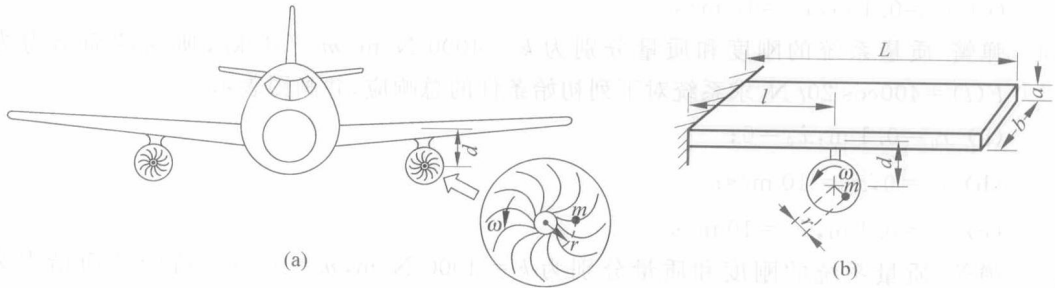


图 3.38 习题 3.11 图

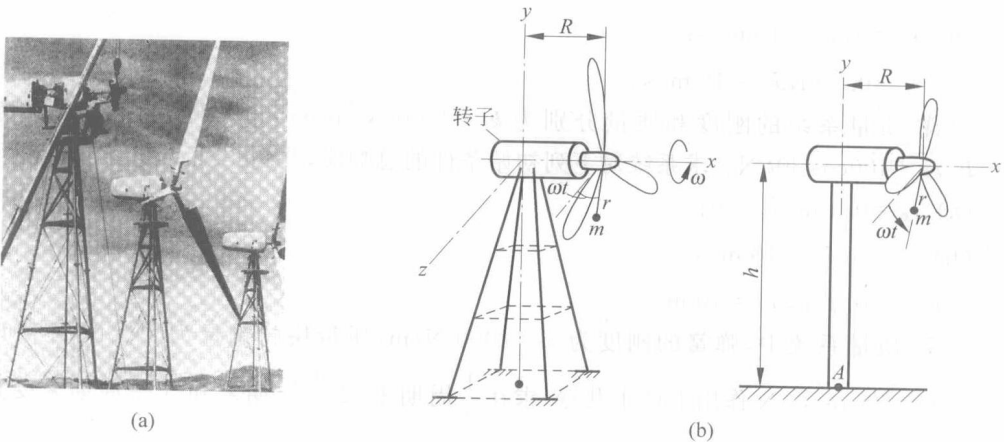


图 3.39 三叶风力发电机

- 3.13 电磁疲劳实验机如图 3.40 所示,它可以靠使一个频率为 f 的交流电通过电枢而给试样提供一个交变的作用力。如果电枢的重量是 40 lbf, 弹簧的刚度是 $k_1 = 10\,217.0296$ lbf/in, 钢试样的刚度是 $k_2 = 75 \times 10^4$ lbf/in。求使试样产生的应力为磁铁产生应力的 2 倍时交流电的频率。
- 3.14 如图 3.41 所示,弹簧作动器利用来自风压控制器的风压作为输入来驱动阀产生一个与输入风压成正比的位移。纤维基橡胶膜片的面积为 A , 在输入风压的作用下产生变形。求输入风压按简谐规律 $p(t) = p_0 \sin \omega t$ 变化时阀的响应。其中, $p_0 = 10$ lbf/in², $\omega = 8$ rad/s, $A = 100$ in², $k = 400$ lbf/in, 弹簧的重量为 15 lbf, 阀和阀杆的重量为 20 lbf。
- 3.15 在图 3.42 所示的凸轮-从动件系统中,凸轮的旋转

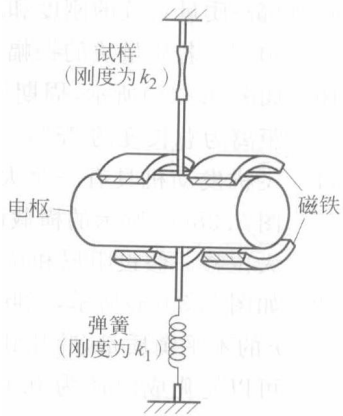


图 3.40 电磁疲劳实验机

使从动件作垂直运动。推杆可视为一弹簧,在装配前已有大小为 x_0 的压缩量。求:
(a)考虑重力时,从动件的运动微分方程;(b)凸轮施加在从动件上的力;(c)从动件与凸轮失去接触的条件。

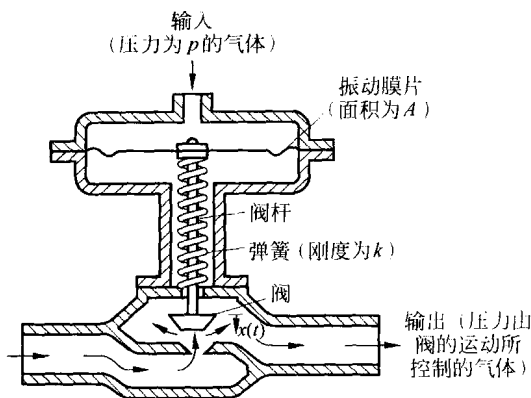


图 3.41 弹簧作动器

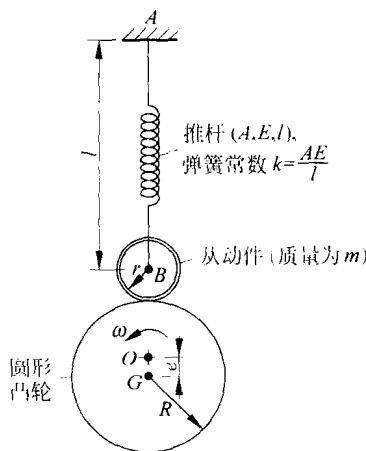


图 3.42 习题 3.15 图

- 3.16* 设计一实心钢轴,在其中点固定一个汽轮机转子,用轴承支承。转子的重量是 500 lbf,传递的功率是 200 hp,转速为 3000 r/min。为了使由于转子的不平衡而引起的轴的应力较小,要求轴的临界转速是工作转速的 1/5,长度至少是直径的 30 倍。
- 3.17 一空心钢轴长 100 in,内、外径分别为 3.5 in 和 4 in,两端轴承支承,在其中点固定着一个重量为 500 lbf 的汽轮机转子。转子和定子之间的间隙是 0.5 in。转子的偏心相当于一个重量为 0.5 lbf、偏心距为 2 in 的偏心质量。为防止转子和定子发生接触,安装了一个限位开关,以保证一旦转子和定子发生接触,转子就会停下来。如果转子运行时满足共振条件,问需要多长时间会导致限位开关动作。假设转子沿与轴垂直方向的初始位移和初始速度均为零。
- 3.18 在自由端有一个重为 0.1 lbf 集中质量的悬臂钢梁用来作频率计。梁的长度为 10 in,横截面的宽度和高度分别为 0.2 in 和 0.05 in,结构阻尼相当于阻尼比为 0.01。当梁的固定端承受简谐位移激励 $y(t) = 0.05 \cos \omega t$ 时,自由端处的最大位移为 2.5 in。求激励频率。
- 3.19 如图 3.43 所示,等截面刚性杆可绕铰支点 O 转动,试推导其运动微分方程并求稳态响应。有关数据为 $k_1 = k_2 = 5000 \text{ N/m}$, $a = 0.25 \text{ m}$, $b = 0.5 \text{ m}$, $l = 1 \text{ m}$, $M = 50 \text{ kg}$, $m = 10 \text{ kg}$, $F_0 = 500 \text{ N}$, $\omega = 1000 \text{ r/min}$ 。
- 3.20 如图 3.44 所示,等截面刚性杆可绕铰支点 O 转动,试推导其运动微分方程并求稳态响应。有关数据为 $k = 5000 \text{ N/m}$, $l = 1 \text{ m}$, $m = 10 \text{ kg}$, $M_0 = 100 \text{ N} \cdot \text{m}$, $\omega = 1000 \text{ r/min}$ 。
- 3.21 弹簧-质量-阻尼器系统的参数如下: $k = 4000 \text{ N/m}$, $m = 10 \text{ kg}$, $c = 40 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ 。

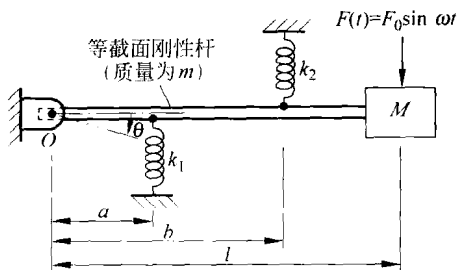


图 3.43 习题 3.19 图

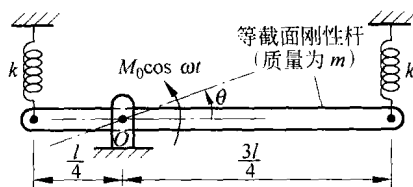


图 3.44 习题 3.20 图

求系统的稳态响应和总响应, 所受的简谐力和初始条件为: $F(t) = 200 \cos 10t$ N, $x(0) = 0.1$ m, $\dot{x}(0) = 0$ 。

- 3.22 弹簧-质量-阻尼器系统的参数如下: $k = 4000$ N/m, $m = 10$ kg, $c = 40$ N · s/m。求系统的稳态响应和总响应, 所受的简谐力和初始条件为: $F(t) = 200 \cos 10t$ N, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 10$ m/s。
- 3.23 弹簧-质量-阻尼器系统的参数如下: $k = 4000$ N/m, $m = 10$ kg, $c = 40$ N · s/m。求系统的稳态响应和总响应, 所受的简谐力和初始条件为: $F(t) = 200 \cos 20t$ N, $x(0) = 0.1$ m, $\dot{x}(0) = 0$ 。
- 3.24 弹簧-质量-阻尼器系统的参数如下: $k = 4000$ N/m, $m = 10$ kg, $c = 40$ N · s/m。求系统的稳态响应和总响应, 所受的简谐力和初始条件为: $F(t) = 200 \cos 20t$ N, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 10$ m/s。
- 3.25 如图 3.45 所示, 四冲程汽车发动机支承在 3 个防振支架上, 发动机组总成的重

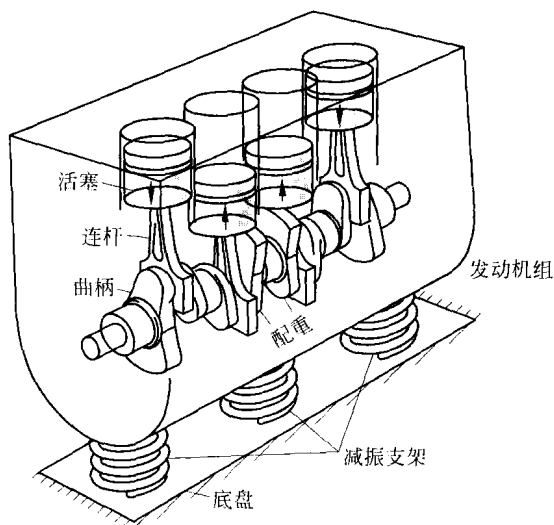


图 3.45 四冲程汽车发动机

量为 500 lbf。若由发动机产生的不平衡力为 $200\sin \pi t$ lbf, 试设计 3 个防振支架(每个支架的刚度为 k , 黏性阻尼常数为 c), 以使振幅不超过 0.1 in。

- 3.26 如图 3.46 所示, 船舶螺旋桨重为 10^5 N, 转动惯量为 $10\,000\text{ kg}\cdot\text{m}^2$, 通过一空心阶梯轴与发动机相连。假设水的黏性阻尼比为 0.1, 求当发动机引起推进轴的根部(A点)有一个简谐角位移 $0.05\sin 314.16t$ rad 时, 推进器的扭振响应。

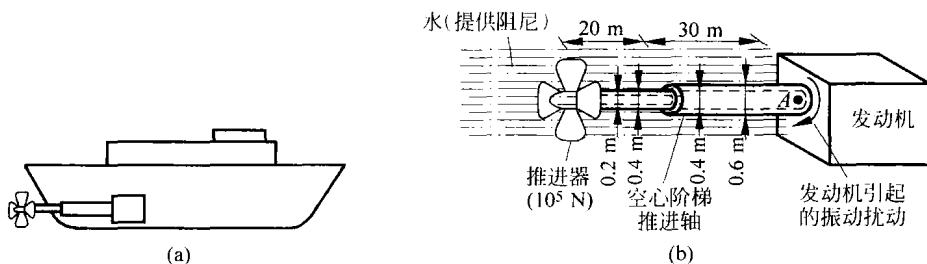


图 3.46 轮船螺旋桨

- 3.27 求单自由度有阻尼系统的振幅达到最大值时的频率比, 以及此时的振幅值。

- 3.28 图 3.47 所示是一个永磁运动线圈电表。当电流通过缠绕在铁芯上的线圈时, 线圈将转过一个与通过电流幅值成正比的角度, 该角度由指针指示。铁芯和线圈的转动惯量为 J_0 , 扭转弹簧的刚度系数为 k_t , 扭转阻尼器的阻尼系数为 c_t 。校准后, 当线圈中通过 1 A 的直流电时, 电表的指针指示 1 A。此电表也要用来测量交流电的幅值。求当线圈中通过幅值为 5 A、频率为 50 Hz 的交流电时电表指示的电流稳态值。取 $J_0 = 0.001\text{ N}\cdot\text{m}^2$, $k_t = 62.5\text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$, $c_t = 0.5\text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}/\text{rad}$ 。

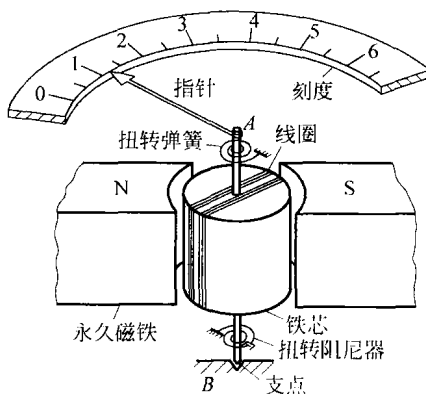


图 3.47 永磁移动线圈电表

- 3.29 弹簧-质量-阻尼系统受到一个简谐力的作用, 共振时的振幅为 20 mm, 激励频率为共振频率的 0.75 倍时, 振幅为 10 mm。求系统的阻尼比。
- 3.30 在图 3.48 所示系统中, x 和 y 分别表示质量块的绝对位移和阻尼器 c_1 末端 Q 点的

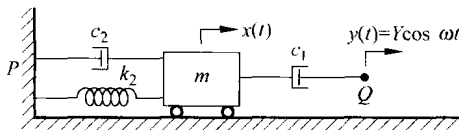


图 3.48 习题 3.30 图

位移。(a)推导质量块 m 的运动微分方程;(b)求质量块 m 的稳态位移响应;(c)求当 Q 端受简谐运动 $y(t)=Y\cos\omega t$ 作用时,传递给 P 处支承的力。

- 3.31 证明在小阻尼情况下,阻尼比可以表示为

$$\zeta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2 + \omega_1}$$

其中, ω_1 和 ω_2 分别为半功率点对应的激励频率。

- 3.32 一个盘轴扭振系统的扭转阻尼系数为 $c_t = 300 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}/\text{rad}$, 盘的转动惯量为 $J_0 = 10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 轴的直径和长度分别为 4 cm 和 1 m 。轴的一端固定, 自由端固结着圆盘。当在盘上作用幅值为 $1000 \text{ N} \cdot \text{m}$ 的简谐力矩时, 角振动的振幅是 2° 。求:(a)激励力矩的频率;(b)传递给支承的最大力矩。
- 3.33 一个振动系统的参数如下: $m = 10 \text{ kg}$, $k = 2500 \text{ N}/\text{m}$, $c = 45 \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}$ 。质量块所受简谐力的幅值和频率分别为 180 N 和 3.5 Hz 。如果初始位移和初始速度分别为 15 mm 和 5 m/s , 求质量块的总响应。
- 3.34 在简谐激励作用下, 单自由度系统响应的峰值为 0.2 in , 如果无阻尼固有频率为 5 Hz , 在最大力作用下弹簧的静变形为 0.1 in 。(a)估计系统的阻尼比;(b)求半功率点对应的频率。
- 3.35 飞机的着陆轮可理想化如图 3.49 所示的弹簧-质量-阻尼器系统。如果跑道路面可用 $y(t) = y_0 \cos \omega t$ 描述, 试确定刚度 k 与阻尼 c 的值以使飞机的振动幅值 x 限制在 0.1 m 以内。假定 $m = 2000 \text{ kg}$, $y_0 = 0.2 \text{ m}$ 以及 $\omega = 157.08 \text{ rad/s}$ 。

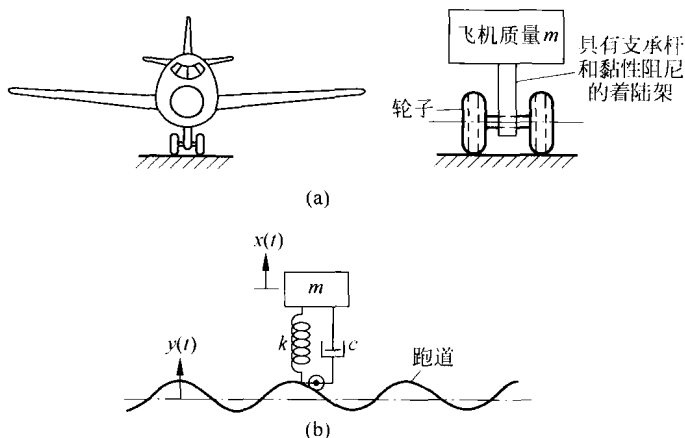


图 3.49 飞机着陆轮模型

- 3.36 如图 3.50 所示, 精密磨床和地面之间安装了一隔振器。隔振器弹簧的刚度系数和阻尼器的黏性阻尼系数分别为 $1 \text{ MN}/\text{m}$ 和 $1 \text{ kN} \cdot \text{s}/\text{m}$ 。由于受临近磨床的影响, 地面承受一个简谐扰动。求当磨轮的振幅要限制在 10^{-6} m 以下时, 地面承受的最大位移

振幅的许可值。假设磨床(包括磨轮)是一个重量为 5000 N 的刚体。

- 3.37 在图 3.51 所示系统中,刚性杆可绕铰支点 O 转动。(a)推导其运动微分方程;
(b)求其稳态响应,数据如下: $m=10\text{ kg}$, $k=5000\text{ N/m}$, $c=1000\text{ N}\cdot\text{s/m}$, $l=1\text{ m}$,
 $M_0=100\text{ N}\cdot\text{m}$, $\omega=1000\text{ r/min}$ 。

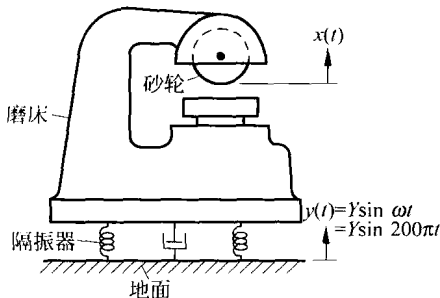


图 3.50 习题 3.36 图

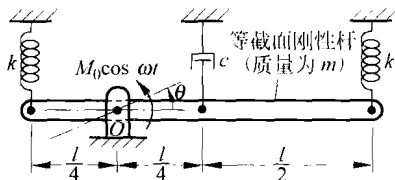


图 3.51 习题 3.37 图

- 3.38 一空气压缩机的质量为 100 kg, 安装在一弹性地基上。当压缩机受到一个幅值为 100 N 的简谐力作用时, 稳态位移的最大值和角频率分别为 5 mm 和 300 r/min。求地基的等效刚度系数和等效阻尼系数。

- 3.39 根据下列数据求图 3.52 所示系统的稳态响应:
 $m=10\text{ kg}$, $k_1=1000\text{ N/m}$, $k_2=500\text{ N/m}$, $c=500\text{ N}\cdot\text{s/m}$, $r=5\text{ cm}$, $J_0=1\text{ kg}\cdot\text{m}^2$, $F_0=50\text{ N}$, $\omega=20\text{ rad/s}$ 。

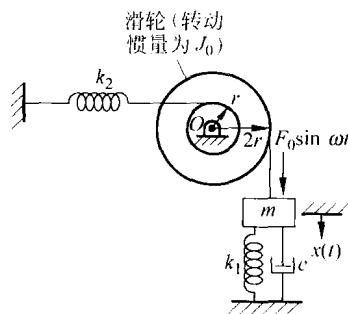


图 3.52 习题 3.39 图

- 3.40 质量为 m 的等截面细长杆, 可采用如图 3.53 所示的两种形式之一支承。若在杆的中部作用简谐激励力 $F_0 \sin \omega t$, 问哪一种支承方式对应的稳态响应的幅值较小?

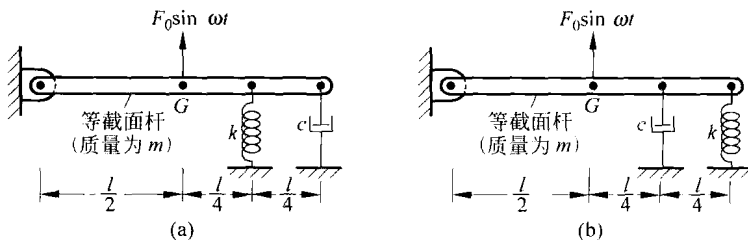


图 3.53 习题 3.40 图

- 3.41 如图 3.54 所示, 单层建筑物的框架结构受到一个简谐地面加速度的作用, 求楼板(质量 m) 的稳态运动。

- 3.42 求图 3.54 所示单层建筑物模型中, 楼板(质量 m) 的水平位移, 假设地面加速度的形式为 $\ddot{x}_g = 100 \sin \omega t$ mm/s。其他参数如下: $m = 2000$ kg, $k = 0.1$ MN/m, $\omega = 25$ rad/s, $x_g(t=0) = \dot{x}_g(t=0) = x(t=0) = \dot{x}(t=0) = 0$ 。
- 3.43 对图 3.54 所示系统, 如果简谐地面加速度的角频率和振幅分别为 $\omega = 200$ rad/s 和 $X_g = 15$ mm, 求楼板振动的振幅。假设楼板的质量为 $m = 2000$ kg, 立柱的刚度为 $k = 0.5$ MN/m。
- 3.44 汽车可以简化成一个在竖直方向振动的单自由度系统。它行驶在一高度按正弦规律变化的路面上。路面波峰到波谷的落差为 0.2 m, 两个波峰之间的纵向距离为 35 m。如果汽车的固有频率为 2 Hz, 减振器的阻尼比为 0.15 , 求汽车以 60 km/h 的速度行驶时的振幅。当速度发生变化时, 求当速度的大小为多少时乘客会感到最不舒服?

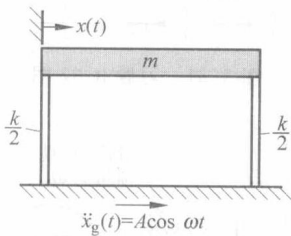


图 3.54 习题 3.41~习题 3.43 图

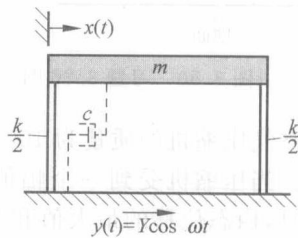


图 3.55 习题 3.46 图

- 3.45 推导公式(3.74)。
- 3.46 如图 3.55 所示, 单层建筑物的框架结构可以简化为一个质量为 m 的刚性楼板和刚度为 k 的立柱组成的一个单自由度系统。为了抑制由于地面的水平运动 $y(t) = Y \sin \omega t$ 引起的振动, 设计了一个吸振器。确定阻尼系数的表达式以使其吸收的振动能量最大。
- 3.47 如图 3.56 所示, 质量为 m 的等截面杆可绕铰支点 O 转动, 两端分别由两个弹簧支承。弹簧 PQ 的 P 端承受一个正弦变化的位移 $x(t) = x_0 \sin \omega t$ 。求杆的稳态角位移响应, 参数如下: $l = 1$ m, $k = 1000$ N/m, $m = 10$ kg, $x_0 = 1$ cm, $\omega = 10$ rad/s。
- 3.48 如图 3.57 所示, 质量为 m 的等截面杆可绕铰支点 O 转动, 两端分别由两个弹簧支

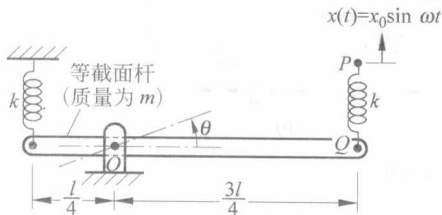


图 3.56 习题 3.47 图

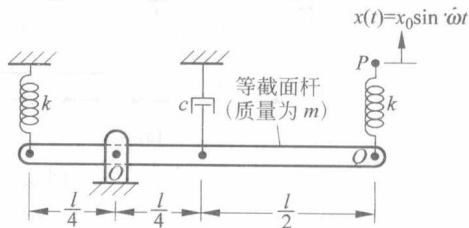


图 3.57 习题 3.48 图

承。弹簧 PQ 的 P 端承受一个正弦变化的位移 $x(t) = x_0 \sin \omega t$ 。求杆的稳态角位移响应, 参数如下: $l = 1 \text{ m}$, $k = 1000 \text{ N/m}$, $c = 500 \text{ N} \cdot \text{m/s}$, $m = 10 \text{ kg}$, $x_0 = 1 \text{ cm}$, $\omega = 10 \text{ rad/s}$ 。

- 3.49 求使由式(3.68)给出的位移传递率取得最大值的频率比。
- 3.50 汽车空载时重 1000 lbf, 满载时重 3000 lbf, 当以 55 mile/h 的速度在粗糙路面行驶时, 在垂直方向上作正弦波形的振动, 幅值为 $Y \text{ ft}$, 其周期为 12 s。假定汽车可模型化为刚度为 30 000 lbf/ft 和阻尼比 $\zeta = 0.2$ 的单自由度系统, 试求汽车空载与满载时的振动幅值。

- 3.51 如图 3.58 所示, 质量为 100 kg 的单缸空气压缩机安放在一个橡胶垫上。橡胶垫的刚度系数和阻尼系数分别为 10^6 N/m 和 $2000 \text{ N} \cdot \text{m/s}$ 。如果压缩机的不平衡相当于一个位于曲柄末端 A 处、大小为 0.1 kg 的不平衡质量, 求当曲柄的转速为 3000 r/min 时, 压缩机的响应。假设 $r = 10 \text{ cm}$, $l = 40 \text{ cm}$ 。

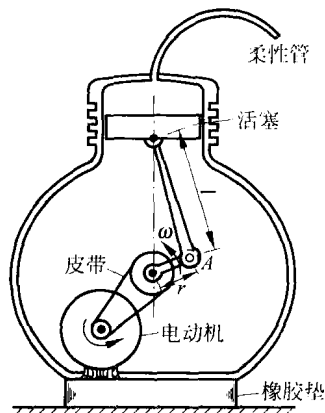


图 3.58 习题 3.51 图

- 3.52 如图 3.59 所示, 直升机尾部的转子叶片之一有一个不平衡量, 大小为 $m = 0.5 \text{ kg}$, 距旋转轴的距离为 $e = 0.15 \text{ m}$ 。机尾部分的长度为 4 m, 质量为 240 kg, 弯曲刚度为 $EI = 2.5 \text{ MN} \cdot \text{m}^2$, 阻尼比为 0.15, 机尾转子叶片(包括它们的驱动系统)的质量为 20 kg。求当机尾转子叶片的转动速度为 1500 r/min 时, 机尾部分的受迫响应。

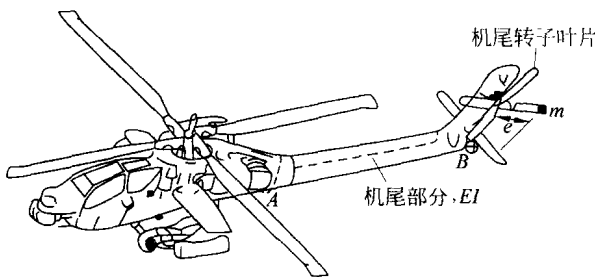


图 3.59 习题 3.52 图

- 3.53 质量为 380 kg 的排气扇安放在一个不计阻尼的弹簧上, 引起的静变形为 45 mm。如果排气扇的旋转不平衡量为 $0.15 \text{ kg} \cdot \text{m}$, 求: (a) 转速为 1750 r/min 时的振幅; (b) 此转速时传给地面的力。
- 3.54 如图 3.60 所示, 两端固定钢梁的长度为 5 m, 横截面的高和宽分别为 0.1 m 和 0.5 m。在其中部安装着一个质量为 75 kg、转速为 1200 r/min 的电动机。由于电动机转子的不平衡而引起的旋转力的大小为 $F_0 = 5000 \text{ N}$, 不计梁的质量, 求稳态振动

的幅值。如果考虑梁的质量,稳态振动的幅值是多少?

- 3.55* 如图 3.61 所示,一电机安装在长为 5 m 的悬臂梁的自由端,如果要求振幅不能超过 0.5 cm,求梁横截面的尺寸。计算时考虑梁的质量。

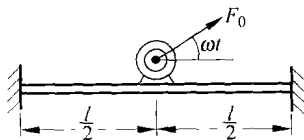


图 3.60 习题 3.54 图

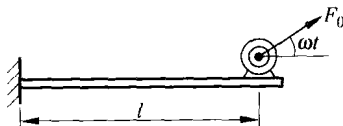


图 3.61 习题 3.55 图

- 3.56 重为 600 N 的离心泵以 1000 r/min 速度转动,固定在每根刚度为 6000 N/m 的 6 根弹簧上。若稳态振动的峰-峰值限定为 5 mm,试求最大允许不平衡量的大小。
- 3.57* 重量为 1000 lbf、转速为 1500 r/min 的空气压缩机安放在一个隔振器上。有两个刚度系数分别为 45 000 lbf/in 和 15 000 lbf/in 的螺旋弹簧,另有一个阻尼比为 0.15 的阻尼器可供使用。试为空气压缩机设计一个最好的隔振系统。
- 3.58 一具有不平衡质量的变速电机安放在一个隔振器上。当电机的转速从零开始增加,发现共振时电机的振幅为 0.55 in,非共振时的振幅为 0.15 in。求隔振器的阻尼比。
- 3.59 重量为 750 lbf、转速为 1800 r/min 的电机由 4 个螺旋弹簧支承,每个弹簧的有效圈数为 8 圈,簧丝和簧圈的直径分别为 0.25 in 和 3 in。电机转子的重量为 100 lbf,其质心到转动轴的距离为 0.01 in。求电机的振幅和通过弹簧传递给地面的力。
- 3.60 一小型排风扇的转速为 1500 r/min,安装在直径为 0.2 in 的钢轴上。风扇的转子重 30 lbf,与旋转轴有 0.01 in 的偏心距。求:(a)传递给轴承的最大力;(b)驱动轴转动所需的马力值。
- 3.61 如图 3.62 所示,刚性板的 P 端为铰支支承,Q 端支承在一个阻尼器上,阻尼器的黏性阻尼系数为 $c=1 \text{ lbf} \cdot \text{s/in}$ 。一重为 50 lbf 的小电扇安放在杆的 S 点处,其转速为 750 r/min,支承弹簧的刚度系数为 $k=200 \text{ lbf/in}$ 。如果电扇的重心距其旋转轴的距离为 0.1 in,求 Q 端的稳态响应以及传递给 S 点的力。
- 3.62 推导公式(3.99)。
- 3.63 推导图 3.63 所示系统中,质量块 m 的运动微分方程。假设液压缸中的压力按正弦

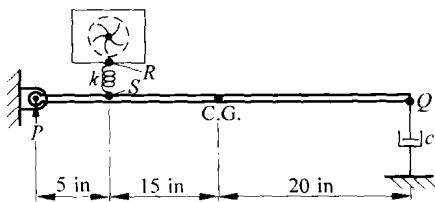


图 3.62 习题 3.61 图

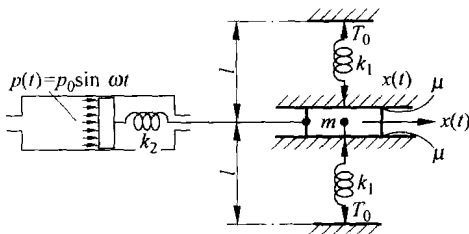


图 3.63 习题 3.63 图

规律变化。两个弹簧的刚度系数均为 k_1 , 初始张力为 T_0 , 质量块和接触面之间的摩擦系数为 μ 。

- 3.64 一具有库仑阻尼的弹簧-质量系统, 受到幅值为 120 N、频率为 2.517 326 8 Hz 的简谐力作用时, 振幅为 75 mm。如果 $m=2$ kg, $k=2100$ N/m, 求干摩擦系数。
- 3.65 在一复合材料结构中, 5000 N 的载荷引起的静态位移为 0.05 m。简谐激振力的幅值为 1000 N, 所引起的共振幅值为 0.1 m。求: (a) 结构的滞后阻尼常数; (b) 共振时每周期的能量耗散; (c) 1/4 共振频率所对应的稳态幅值; (d) 三倍共振频率所对应的稳态幅值。
- 3.66 简谐激励作用时, 滞后阻尼在一个周期内所消耗的能量可以表示成如下的一般形式:

$$\Delta W = \pi \beta k X^\gamma \quad (\text{E. 1})$$

其中, γ 是指数(在式(2.131)中 $\gamma=2$); β 是量纲为 $[\text{m}]^2$ 的系数。 $k=60$ kN/m 的具有滞后阻尼的弹簧-质量系统在简谐激励下, 共振时的稳态振幅为 40 mm, 相应的能量输入为 3.8 N·m。若共振时的能量输入增加到 9.5 N·m, 则稳态振幅为 60 mm。确定式中 β 和 γ 的值。

- 3.67 弹簧-质量-阻尼器系统受简谐力 $F(t)=5\cos 3\pi t$ lbf 作用时, 位移响应的规律为 $x(t)=0.5\cos(3\pi t-\pi/3)$ 。求在前 1 s 内和前 4 s 内简谐力所做的功。
- 3.68 一阻尼器提供的阻尼力的形式为 $F_d=c\dot{x}^n$, 式中的 c 和 n 均为常数, \dot{x} 为相对速度。求其等效黏性阻尼系数以及振幅。
- 3.69 证明同时具有黏性阻尼和库仑阻尼的系统, 稳态响应振幅的近似值由下式决定:

$$X^2[k^2(1-r^2)^2+c^2\omega^2]+X\frac{8\mu Nc\omega}{\pi}+\left(\frac{16\mu^2N^2}{\pi^2}-F_0^2\right)=0$$

- 3.70 弹簧-质量-阻尼器系统的运动微分方程为 $m\ddot{x}\pm\mu N+c\dot{x}^3+kx=F_0\cos\omega t$ 。试推导下列表达式: (a) 等效黏性阻尼常数; (b) 稳态振幅; (c) 共振时的振幅比。
- 3.71 如图 3.64 所示, 密度为 ρ 的流体, 流经一长为 l 、横截面面积为 A 的悬臂钢管。求引起钢管不稳定的流速。假设钢管的质量和刚度分别是 m 和 EI 。
- 3.72 如图 3.65 所示, 汽车上伸缩式天线的前两阶固有频率分别为 3 Hz 和 7 Hz。当汽车以 50~75 km/h 的速度行驶时, 旋涡脱落是否会引起天线的不稳定?

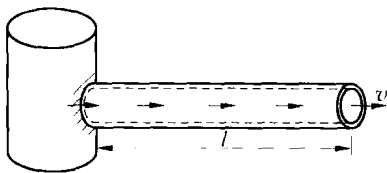


图 3.64 习题 3.71 图

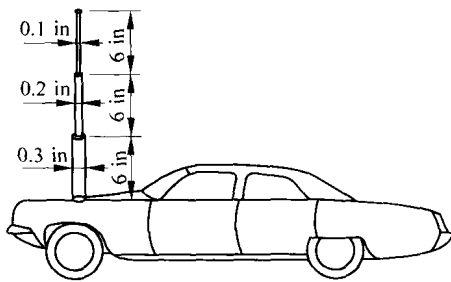


图 3.65 习题 3.72 图

- 3.73 一个快餐店的标志牌固定在内、外径分别为 d 和 D , 高度是 h 的空心钢管的上端。空心钢管下端与地面固定, 上端的集中质量为 M 。为分析其在风激励下的横向振动特性, 可将其简化为黏性阻尼比为 0.1 的单自由度弹簧-质量-阻尼系统。求: (a) 标志牌横向振动的固有频率; (b) 标志牌产生最大稳态位移的风速; (c) 标志牌产生的最大风致稳态位移。数据如下: $h=10\text{ m}$, $D=25\text{ cm}$, $d=20\text{ cm}$, $M=200\text{ kg}$ 。
- 3.74 单自由度系统的运动微分方程为 $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F$ 。推导在下列各种情况下出现发散振动的条件: (a) 力函数与位移成正比, 即 $F(t) = F_0 x(t)$; (b) 力函数与速度成正比, 即 $F(t) = F_0 \dot{x}(t)$; (c) 力函数与加速度成正比, 即 $F(t) = F_0 \ddot{x}(t)$ 。
- 3.75 利用 MATLAB 绘制无阻尼弹簧-质量系统的强迫振动响应曲线。其条件为: $m=10\text{ kg}$, $k=4000\text{ N/m}$, $F(t)=200\cos 10t\text{ N}$, $x_0=0.1\text{ m}$, $\dot{x}_0=10\text{ m/s}$ 。
- 3.76 利用 MATLAB 作图表示具有库仑阻尼的弹簧-质量系统的受迫振动响应。数据如下: $m=10\text{ kg}$, $k=4000\text{ N/m}$, $F(t)=200\sin 10t\text{ N}$, $\mu=0.3$, $x_0=0.1\text{ m}$, $\dot{x}_0=10\text{ m/s}$ 。
- 3.77 利用 MATLAB 作图表示黏性阻尼系统在简谐基础运动 $y(t)=Y\sin \omega t\text{ m}$ 激励下的响应。数据如下: $m=100\text{ kg}$, $k=4\times 10^4\text{ N/m}$, $\zeta=0.25$, $Y=0.05\text{ m}$, $\omega=10\text{ rad/s}$, $x_0=1\text{ m}$, $\dot{x}_0=0$ 。
- 3.78 利用 MATLAB 作图表示黏性阻尼系统在简谐激励 $F(t)=F_0\cos \omega t$ 作用下的稳态响应。数据如下: $m=10\text{ kg}$, $k=1000\text{ N/m}$, $\zeta=0.1$, $F_0=100\text{ N}$, $\omega=20\text{ rad/s}$ 。
- 3.79 一辆以速度 $v(\text{km/h})$ 行驶在不平路面上的汽车, 其悬挂系统的弹簧常数为 40 kN/m , 阻尼比为 $\zeta=0.1$ 。路面的高度按正弦规律变化, 其中振幅为 $Y=0.05\text{ m}$, 波长为 6 m 。编写一个 MATLAB 程序, 根据下列条件求汽车位移响应的振幅: (a) 空载和满载时汽车的质量分别为 600 kg 和 1000 kg ; (b) 行驶速度分别为 10 km/h , 50 km/h 和 100 km/h 。
- 3.80 利用程序 Program3. cpp 求扭振系统的稳态响应。数据如下: $J_0=6\text{ kg}\cdot\text{m}^2$, $c_t=210\text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s/rad}$, $k_t=14\,000\text{ N}\cdot\text{m/rad}$, $F(t)=450\sin 10t\text{ N}\cdot\text{m}$ 。
- 3.81 利用程序 Program3. cpp 求单自由度系统的稳态响应。数据如下: $m=10\text{ kg}$, $c=45\text{ N}\cdot\text{s/m}$, $k=2500\text{ N/m}$, $F(t)=180\cos 20t\text{ N}$, $x_0=0$, $\dot{x}_0=10\text{ m/s}$ 。
- 3.82 利用子程序 HARESP 求扭振系统的稳态响应。数据如下: $J_0=6\text{ kg}\cdot\text{m}^2$, $c_t=210\text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s/rad}$, $k_t=14\,000\text{ N}\cdot\text{m/rad}$, $F(t)=450\sin 10t\text{ N}\cdot\text{m}$ 。
- 3.83 编写一个命名为 TOTALR 的子程序求单自由度系统的全解(齐次解加上特解), 并利用此程序求习题 3.33 的全解。
- 3.84 应用子程序 HARESP 求解单自由度系统的稳态解, 该系统的参数为: $m=10\text{ kg}$, $c=45\text{ N}\cdot\text{s/m}$, $k=2500\text{ N/m}$, $F(t)=180\cos 20t\text{ N}$, $x_0=0$ 与 $\dot{x}_0=10\text{ m/s}$ 。
- 3.85 编写一个计算机程序, 求弹簧-质量-黏性阻尼器系统承受基础运动激励时的总响应。并利用此程序求针对下列数据的解: $m=2\text{ kg}$, $c=10\text{ N}\cdot\text{s/m}$, $k=100\text{ N/m}$, $y(t)=0.1\sin 25t\text{ m}$, $x_0=10\text{ mm}$, $\dot{x}_0=5\text{ m/s}$ 。

设计题目

- 3.86 图 3.66 所示系统由两个以相同转速反向转动的偏心质量组成,用作机械式激振器,要求其工作频率为 $20 \sim 30$ Hz。确定 ω, e, M, m, k, c 的值以满足下列要求: (a) 在要求的频率范围内激振器的平均功率输出至少为 1 hp; (b) 两个偏心质量的振幅在 $0.1 \sim 0.2$ in 之间; (c) 激振器的质量 M 至少为偏心质量 m 的 50 倍。
- 3.87 对如图 3.67 所示水塔,设计其空心钢立柱的最小重量。已知水箱的重量为 100 000 lbf, 高度是 50 ft。当由于地震使地面产生大小为 $0.5g$ (g 为重力加速度)、频率为 15 Hz 的简谐加速度时,要求立柱中的应力不能超过材料的屈服应力 $30\,000$ lbf/in²。此外,还要求水箱的固有频率大于 15 Hz。假设立柱的阻尼比为 0.15。

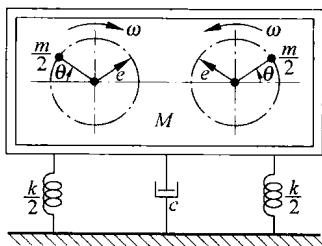


图 3.66 振动筛

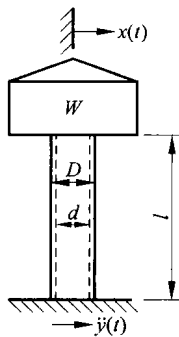


图 3.67 水塔



傅里叶(Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768—1830), 法国数学家, 巴黎埃可尔(Ecole)工业大学教授。他在三角级数理论方面取得的成就广为人知。把一个周期函数展开成简谐函数的和, 称为傅里叶级数, 就是以他的名字命名的。

(照片经 Applied Mechanics Reviews 授权使用。)

第 4 章 单自由度系统在一般激励下的振动

4.1 引言

这一章将讨论单自由度系统受到一般的非简谐力作用时的响应。一般的力函数可以是周期性的(非简谐的), 也可以是非周期性的。非周期性的力函数可以是作用在短时间、长时间或者无限长时间内。如果激励(力)作用的时间与系统的固有周期相比很短, 那么这种激励就称为冲击。顶杆在凸轮作用下所产生的运动, 包装从高处落下后设备所承受的振动, 锻压机对地基的作用, 汽车通过不平路面时的运动, 地震时房屋和路面的振动, 这些都是一般力函数作用引起振动的例子。

根据 1.8 节中谐波分析的过程, 如果力函数是周期的(但不是简谐的), 那么这一函数可以用简谐函数的和来表示。根据叠加原理, 系统的响应可以由单个简谐力作用引起响应的叠加得到。如果系统突然受到非周期力的作用, 那么系统的响应就会包含瞬态振动。系统的瞬态响应可由卷积积分(convolution integral)来确定。

4.2 一般周期力作用下的响应

若外力 $F(t)$ 是以 $\tau = 2\pi/\omega$ 为周期的周期力, 那么可以将其展开为傅里叶级数(见 1.8 节):

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos j\omega t + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin j\omega t \quad (4.1)$$

其中

$$a_j = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} F(t) \cos j\omega t dt, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2)$$

$$b_j = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} F(t) \sin j\omega t dt, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

此时系统的运动微分方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos j\omega t + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin j\omega t \quad (4.4)$$

方程的右边是一个常数加上一系列简谐函数的和。根据叠加原理,方程(4.4)的稳态解就是下述各方程的稳态解的和:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \frac{a_0}{2} \quad (4.5)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = a_j \cos j\omega t \quad (4.6)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = b_j \sin j\omega t \quad (4.7)$$

注意到方程(4.5)的解为

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2k} \quad (4.8)$$

由3.4节中的结论可知,方程(4.6)、方程(4.7)的解可以分别表示为

$$x_p(t) = \frac{a_j/k}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2 + (2\zeta jr)^2}} \cos(j\omega t - \phi_j) \quad (4.9)$$

$$x_p(t) = \frac{b_j/k}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2 + (2\zeta jr)^2}} \sin(j\omega t - \phi_j) \quad (4.10)$$

其中

$$\phi_j = \arctan \frac{2\zeta jr}{1-j^2r^2} \quad (4.11)$$

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} \quad (4.12)$$

因此方程(4.4)的稳态解是

$$\begin{aligned} x_p(t) = & \frac{a_0}{2k} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j/k}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2 + (2\zeta jr)^2}} \cos(j\omega t - \phi_j) \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j/k}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2 + (2\zeta jr)^2}} \sin(j\omega t - \phi_j) \end{aligned} \quad (4.13)$$

由式(4.13)可知,第 j 项的振幅和相角差均依赖于 j 。如果 j 取某一值有 $j\omega = \omega_n$,那么相应的谐响应的振幅就会比较大。特别是当 j 和 ζ 比较小时,就更容易出现这种情况。另外,随着 j 增大,振幅会逐渐减小,相应的项将趋于零。因此只取前几项就可以得到足够精确的结果。

式(4.13)给出的解是系统的稳态响应。为了求出全解,还应该求出与系统的初始

条件对应的瞬态响应。为此,需要令全解中的位移及相应的速度在 $t=0$ 时的值等于特定的初始条件,即根据 $x(0)$ 和 $\dot{x}(0)$ 来确定任意常数。这一结果会使全解中瞬态解的形式非常复杂。

例 4.1 在研究液压控制系统中阀的振动时,可将阀及其弹性杆简化为有阻尼的弹簧-质量系统,如图 4.1(a)所示。除了弹簧力和阻尼力,阀还受到随着其开启和关闭量变化的液体的压力。当液压缸内的液体压力按照图 4.1(b)所示变化时,试求阀的稳态响应,其中 $k=2500 \text{ N/m}$, $c=10 \text{ N} \cdot \text{s/m}$, $m=0.25 \text{ kg}$ 。

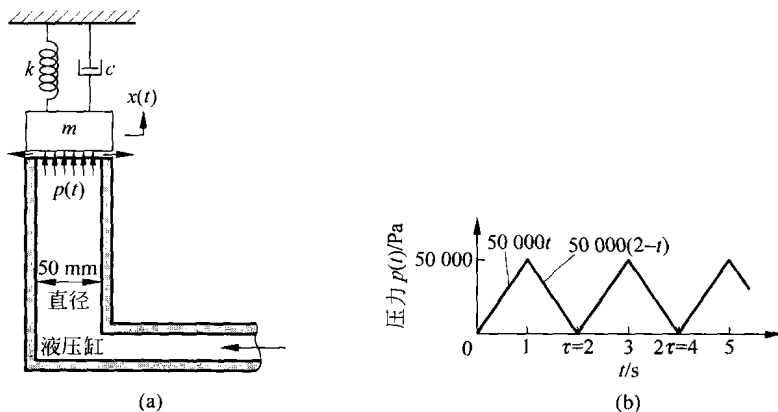


图 4.1 液压阀的周期振动

解: 阀可简化为一端与阻尼器和弹簧相连,另一端受到力 $F(t)$ 作用的质量块, $F(t)$ 的表达式为

$$F(t) = Ap(t) \quad (\text{E. 1})$$

其中, A 是缸体的横截面面积,大小为

$$A = \frac{\pi \times 50^2}{4} = 625\pi (\text{mm}^2) = 0.000625\pi \text{ m}^2 \quad (\text{E. 2})$$

$p(t)$ 是在任意瞬时 t 作用在阀上的液体压力。由于 $p(t)$ 的周期是 $\tau=2 \text{ s}$, 而 A 为常数, 因此 $F(t)$ 也是周期变化的, 且周期也是 $\tau=2 \text{ s}$ 。作用力 $F(t)$ 的角频率为 $\omega=2\pi/\tau=\pi (\text{rad/s})$ 。将 $F(t)$ 作傅里叶级数展开:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots \\ + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots \quad (\text{E. 3})$$

其中, a_j 和 b_j 由式(4.2)和式(4.3)给出。由于 $F(t)$ 的定义如下:

$$F(t) = \begin{cases} 50\,000At, & 0 \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ 50\,000A(2-t), & \frac{\tau}{2} \leq t \leq \tau \end{cases} \quad (\text{E. 4})$$

由式(4.2)和式(4.3)可求出傅里叶系数 a_j 和 b_j 为

$$a_0 = \frac{2}{2} \left[\int_0^1 50\,000At \, dt + \int_1^2 50\,000A(2-t) \, dt \right] = 50\,000A \quad (\text{E. 5})$$

$$a_1 = \frac{2}{2} \left[\int_0^1 50\,000At \cos \pi t \, dt + \int_1^2 50\,000A(2-t) \cos \pi t \, dt \right] = -\frac{2 \times 10^5 A}{\pi^2} \quad (\text{E. 6})$$

$$b_1 = \frac{2}{2} \left[\int_0^1 50\,000At \sin \pi t \, dt + \int_1^2 50\,000A(2-t) \sin \pi t \, dt \right] = 0 \quad (\text{E. 7})$$

$$a_2 = \frac{2}{2} \left[\int_0^1 50\,000At \cos 2\pi t \, dt + \int_1^2 50\,000A(2-t) \cos 2\pi t \, dt \right] = 0 \quad (\text{E. 8})$$

$$b_2 = \frac{2}{2} \left[\int_0^1 50\,000At \sin 2\pi t \, dt + \int_1^2 50\,000A(2-t) \sin 2\pi t \, dt \right] = 0 \quad (\text{E. 9})$$

$$a_3 = \frac{2}{2} \left[\int_0^1 50\,000At \cos 3\pi t \, dt + \int_1^2 50\,000A(2-t) \cos 3\pi t \, dt \right] = -\frac{2 \times 10^5 A}{9\pi^2} \quad (\text{E. 10})$$

$$b_3 = \frac{2}{2} \left[\int_0^1 50\,000At \sin 3\pi t \, dt + \int_1^2 50\,000A(2-t) \sin 3\pi t \, dt \right] = 0 \quad (\text{E. 11})$$

与此类似,可得 $a_4 = a_5 = a_6 = \dots = b_4 = b_5 = b_6 = \dots = 0$ 。只取级数的前3项,力函数可近似为

$$F(t) \simeq 25\,000A - \frac{2 \times 10^5 A}{\pi^2} \cos \omega t - \frac{2 \times 10^5 A}{9\pi^2} \cos 3\omega t \quad (\text{E. 12})$$

故阀受到如式(E.12)所确定的力函数作用时的稳态响应为

$$\begin{aligned} x_p(t) = & \frac{25\,000A}{k} - \frac{2 \times 10^5 A / (k\pi^2)}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \cos(\omega t - \phi_1) \\ & - \frac{2 \times 10^5 A / (9k\pi^2)}{\sqrt{(1-9r^2)^2 + (6\zeta r)^2}} \cos(3\omega t - \phi_3) \end{aligned} \quad (\text{E. 13})$$

阀的固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2500}{0.25}} = 100 \text{ (rad/s)} \quad (\text{E. 14})$$

外力的频率 ω 为

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ (rad/s)} \quad (\text{E. 15})$$

所以频率比为

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{\pi}{100} = 0.031\,416 \quad (\text{E. 16})$$

阻尼比为

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{10.0}{2 \times 0.25 \times 100} = 0.2 \quad (\text{E. 17})$$

相角 ϕ_1 和 ϕ_3 可由下面的式子求得:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \arctan \frac{2\zeta r}{1-r^2} = \arctan \frac{2 \times 0.2 \times 0.031416}{1-0.031416^2} \\ &= 0.0125664(\text{rad})\end{aligned}\quad (\text{E. 18})$$

$$\begin{aligned}\phi_3 &= \arctan \frac{6\zeta r}{1-9r^2} = \arctan \frac{6 \times 0.2 \times 0.031416}{1-9 \times 0.031416^2} \\ &= 0.0380483(\text{rad})\end{aligned}\quad (\text{E. 19})$$

由式(E. 2)、式(E. 14)~式(E. 19) 可将稳态解进一步化简为

$$\begin{aligned}x_p(t) &= 0.019635 - 0.015930 \cos(\pi t - 0.0125664) \\ &\quad - 0.0017828 \cos(3\pi t - 0.0380483) \text{ m}\end{aligned}\quad (\text{E. 20})$$

例 4.2 试求黏性阻尼单自由度系统在受到简谐基础运动激励时的全响应。已知数据如下: $m=10 \text{ kg}$, $c=20 \text{ N} \cdot \text{m/s}$, $k=4000 \text{ N/m}$, $y(t)=0.05 \sin 5t \text{ m}$, $x_0=0.02 \text{ m}$, $\dot{x}_0=10 \text{ m/s}$ 。

解: 系统的运动方程(见式(3.65))为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ky + c\dot{y} = kY \sin \omega t + c\omega Y \cos \omega t \quad (\text{E. 1})$$

注意到式(E. 1)与式(4.4)的相似性, 比较两者可知 $a_0=0$, $a_1=c\omega Y$, $b_1=kY$, $a_i=b_i=0 (i=2, 3, \dots)$ 。由式(4.13)可得系统的稳态响应为

$$x_p(t) = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \left[\frac{a_1}{k} \cos(\omega t - \phi_1) + \frac{b_1}{k} \sin(\omega t - \phi_1) \right] \quad (\text{E. 2})$$

由已知数据可得

$$\begin{aligned}Y &= 0.05 \text{ m}, \omega = 5 \text{ rad/s}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4000}{10}} = 20(\text{rad/s}) \\ r &= \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{5}{20} = 0.25, \quad \zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{20}{2\sqrt{4000 \times 10}} = 0.05 \\ \omega_d &= \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n = 19.975(\text{rad/s}) \\ a_1 &= c\omega Y = 20 \times 5 \times 0.05 = 5, \quad b_1 = kY = 4000 \times 0.05 = 200 \\ \phi_1 &= \arctan \frac{2\zeta r}{1-r^2} = \arctan \frac{2 \times 0.05 \times 0.25}{1-0.25^2} = 0.02666(\text{rad}) \\ \sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2} &= \sqrt{(1-0.25^2)^2 + (2 \times 0.05 \times 0.25)^2} \\ &= 0.937833\end{aligned}$$

齐次方程的解(见式(2.70))为

$$x_h(t) = X_0 e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi_0) = X_0 e^{-t} \cos(19.975t - \phi_0) \quad (\text{E. 3})$$

其中, X_0 和 ϕ_0 为待定常数。由 $x_h(t)$ 和 $x_p(t)$ 的叠加可得全解如下:

$$\begin{aligned}x(t) &= X_0 e^{-t} \cos(19.975t - \phi_0) \\ &\quad + \frac{1}{0.937833} \left[\frac{5}{4000} \cos(5t - \phi_1) + \frac{200}{4000} \sin(5t - \phi_1) \right]\end{aligned}$$

$$= X_0 e^{-t} \cos(19.975t - \phi_0) + 0.001333 \cos(5t - 0.02666) + 0.053314 \sin(5t - 0.02666) \quad (\text{E. 4})$$

其中,未知常数 X_0 和 ϕ_0 可由初始条件确定。由式(E.4)可得质量块的速度为

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}(t) = -X_0 e^{-t} \cos(19.975t - \phi_0) - 19.975 X_0 e^{-t} \sin(19.975t - \phi_0) - 0.006665 \sin(5t - 0.02666) + 0.266572 \cos(5t - 0.02666) \quad (\text{E. 5})$$

由式(E.4)和式(E.5)可得

$$x_0 = x(t=0) = 0.02 = X_0 \cos \phi_0 + 0.001333 \cos 0.02666 - 0.053314 \sin 0.02666$$

或

$$X_0 \cos \phi_0 = 0.020088 \quad (\text{E. 6})$$

和

$$\dot{x}_0 = \dot{x}(t=0) = 10 = -X_0 \cos \phi_0 + 19.975 X_0 \sin \phi_0 + 0.006665 \sin 0.02666 + 0.266572 \cos 0.02666$$

或

$$-X_0 \cos \phi_0 + 19.975 \sin \phi_0 = 9.733345 \quad (\text{E. 7})$$

由式(E.6)和式(E.7)可解得 $X_0 = 0.488695$ 和 $\phi_0 = 1.529683 \text{ rad}$ 。因此在简谐基础运动激励下质量块的全解为

$$x(t) = 0.488695 e^{-t} \cos(19.975t - 1.529683) + 0.001333 \cos(5t - 0.02666) + 0.053314 \sin(5t - 0.02666) \quad (\text{E. 8})$$

式(E.8)所表示的曲线已在例4.18中画出。

4.3 不规则形式的周期力作用下的响应

有些情况下,作用在系统上的力可能是非常不规则的或者只能通过实验确定。风和地震引起的力就属于这样的例子。此时,力的变化可能以曲线的形式给出,但不能得到 $F(t)$ 的解析表达式。有时,只能得到 $F(t)$ 在若干离散时刻 t_1, t_2, \dots, t_N 处的值。所有上述情况,都可根据1.8节中所述的数值积分方法来求出傅里叶系数。如果用 F_1, F_2, \dots, F_N 分别代表 $F(t)$ 在 t_1, t_2, \dots, t_N 处的值,其中 N 代表在一个周期 τ ($\tau = N\Delta t$) 内等间隔离散点的个数(偶数),如图4.2所示。应用梯形法则^[4.1]有

$$a_0 = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N F_i \quad (4.14)$$

$$a_j = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N F_i \cos \frac{2j\pi t_i}{\tau}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.15)$$

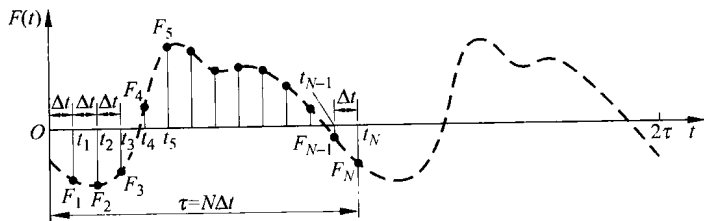


图 4.2 不规则形式的周期力

$$b_j = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N F_i \sin \frac{2j\pi t_i}{\tau}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.16)$$

一旦知道了傅里叶系数 a_0, a_j 和 b_j , 就可以由式(4.13)得到系统的稳态解, 其中

$$r = \frac{2\pi}{\tau\omega_n}$$

例 4.3 求例 4.1 中阀的稳态响应。假设缸体内液体的压力波动是周期变化的, 在一个周期内每隔 0.01 s 压力的大小为:

时间 t_i/s	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10	0.11	0.12
$p_i = p(t_i)/(\text{kN/m}^2)$	0	20	34	42	49	53	70	60	36	22	16	7	0

解: 阀所受的液体压力是周期变化的, 根据一个周期内所给的压力值进行傅里叶分析 (见例题 1.13) 可得

$$\begin{aligned} p(t) = & 34\,083.3 - 26\,996.0\cos 52.36t + 8307.7\sin 52.36t \\ & + 1416.7\cos 104.72t + 3608.3\sin 104.72t \\ & - 5833.3\cos 157.08t + 2333.3\sin 157.08t + \dots \text{ N/m}^2 \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

求解过程中所需的其他数据有

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{2\pi}{0.12} = 52.36 (\text{rad/s})$$

$$\omega_n = 100 \text{ rad/s}$$

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = 0.5236$$

$$\zeta = 0.2$$

$$A = 0.000\,625\pi \text{ m}^2$$

$$\phi_1 = \arctan \frac{2\zeta r}{1-r^2} = \arctan \frac{2 \times 0.2 \times 0.5236}{1-0.5236^2} = 16.1^\circ$$

$$\phi_2 = \arctan \frac{4\zeta r}{1-4r^2} = \arctan \frac{4 \times 0.2 \times 0.5236}{1-4 \times 0.5236^2} = -77.01^\circ$$

$$\phi_3 = \arctan \frac{6\zeta r}{1-9r^2} = \arctan \frac{6 \times 0.2 \times 0.5236}{1-9 \times 0.5236^2} = -23.18^\circ$$

由式(4.13)可得阀的稳态响应为

$$\begin{aligned} x_v(t) = & \frac{34\,083.3A}{k} - \frac{26\,996.0A/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \cos(52.36t - \phi_1) \\ & + \frac{8309.7A/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \sin(52.36t - \phi_1) \\ & + \frac{1416.7A/k}{\sqrt{(1-4r^2)^2 + (4\zeta r)^2}} \cos(104.72t - \phi_2) \\ & + \frac{3608.3A/k}{\sqrt{(1-4r^2)^2 + (4\zeta r)^2}} \sin(104.72t - \phi_2) \\ & - \frac{5833.3A/k}{\sqrt{(1-9r^2)^2 + (6\zeta r)^2}} \cos(157.08t - \phi_3) \\ & + \frac{2333.3A/k}{\sqrt{(1-9r^2)^2 + (6\zeta r)^2}} \sin(157.08t - \phi_3) \end{aligned}$$

4.4 非周期力作用下的响应

我们已经知道,具有任意波形的周期力可以用具有不同频率的简谐函数的叠加即傅里叶级数来表示。对于线性系统,所有激振力的谐响应之和就是系统的响应。如果激振力 $F(t)$ 是非周期的,比如爆炸时产生的冲击力,则需要用别的方法来计算系统的响应。有很多方法可以求解受任意激振力时系统的响应,例如:

- (1) 利用傅里叶积分来代替激振力;
- (2) 利用褶积积分方法;
- (3) 利用拉普拉斯变换方法;
- (4) 首先通过适当的插值模型来近似表示 $F(t)$,然后用数值方法求解;
- (5) 对运动微分方程进行数值积分。

在接下来的章节中主要讲解方法(2),(3)和(4),方法(5)可以参考常微分方程数值解法方面的书籍。

4.5 褶积积分

非周期变化的激振力的大小是随着时间变化的。它一般作用在一段确定的时间内,此后就停止作用。最简单的非周期变化的激振力是冲击力——这种力 F 的大小很大,但作用时间 Δt 却很短。由动力学理论可知,这一冲量的大小可以用它所引起的系统动量的改变来

量度。如果 \dot{x}_1 和 \dot{x}_2 代表质量块 m 在受到冲量前后的速度,那么有

$$\text{冲量} = F\Delta t = m\dot{x}_2 - m\dot{x}_1 \quad (4.17)$$

如果用 \underline{F} 来表示冲量 $F\Delta t$ 的大小,则其一般形式为

$$\underline{F} = \int_t^{t+\Delta t} F dt \quad (4.18)$$

单位冲量 \underline{f} 定义为

$$\underline{f} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_t^{t+\Delta t} F dt = F dt = 1 \quad (4.19)$$

可以看出,要使 $F dt$ 为有限值, F 就应该趋向于无穷大(因为 dt 是趋于 0 的)。虽然单位冲量没有物理意义,但却是一个非常方便的分析工具。^①

4.5.1 对冲量的响应

首先考虑单自由度系统受到冲量时的响应。这对研究系统受更一般激励作用时的响应非常有用。考虑具有黏性阻尼的弹簧-质量系统在 $t=0$ 时受到一个单位冲量作用的情况,如图 4.3(a)和(b)所示。

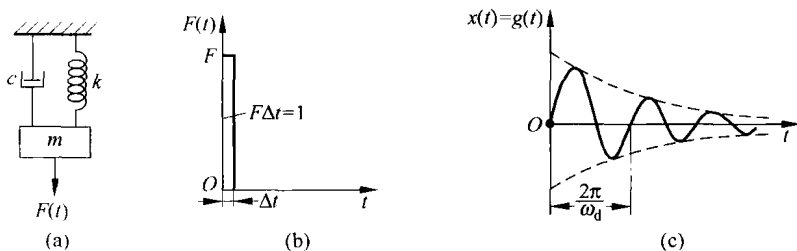


图 4.3 有一冲量作用的单自由度系统

对于欠阻尼系统,运动方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (4.20)$$

由式(2.72)可得方程的解为

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left(x_0 \cos \omega_d t + \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) \quad (4.21)$$

其中

^① 作用在 $t=0$ 时刻的单位冲量也可以用狄拉克 $\delta(t)$ 函数来表示。在 $t=\tau$ 时刻的狄拉克 δ 函数记作 $\delta(t-\tau)$, 当 $t \neq \tau$ 时有 $\delta(t-\tau)=0$, 且

$$\int_0^\infty \delta(t-\tau) dt = 1, \quad \int_0^\infty \delta(t-\tau) F(t) dt = F(\tau)$$

其中, $0 < \tau < \infty$ 。因此在 $t=\tau$ 时刻作用的冲量可以记作 $F(t) = \underline{F}\delta(t-\tau)$ 。

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} \quad (4.22)$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \quad (4.23)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4.24)$$

如果在施加单位冲量之前质量块处于静止状态(即在 $t < 0$ 或 $t = 0^-$ 时 $x = \dot{x} = 0$), 由动量定理可得

$$\text{冲量} = \underline{f} = 1 = m\dot{x}(t=0) - m\dot{x}(t=0^-) = m\dot{x}_0 \quad (4.25)$$

故初始条件为

$$\left. \begin{aligned} x(t=0) &= x_0 = 0 \\ \dot{x}(t=0) &= \dot{x}_0 = \frac{1}{m} \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

根据式(4.26), 式(4.21)可化简为

$$x(t) = g(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{m\omega_d} \sin \omega_d t \quad (4.27)$$

式(4.27)就是单自由度系统受到单位冲量时的响应, 称为单位脉冲响应函数, 记作 $g(t)$, 如图 4.3(c) 所示。

如果冲量的大小是 \underline{F} 而不是 1, 那么初始速度 x_0 就是 \underline{F}/m , 而系统的响应为

$$x(t) = \frac{\underline{F}e^{-\zeta\omega_n t}}{m\omega_d} \sin \omega_d t = \underline{F}g(t) \quad (4.28)$$

如图 4.4(a) 所示, 如果冲量 \underline{F} 是作用在任意时刻 $t = \tau$ 处, 那么它将引起 $t = \tau$ 时刻的速度发生变化 \underline{F}/m 。假设冲量作用前 $x = 0$, 那么在随后的任意时刻 t , 由于在时刻 τ 的速度变化引起的位移 x , 可通过令式(4.28)中的 t 等于 $t - \tau$ 得到, 即

$$x(t) = \underline{F}g(t - \tau) \quad (4.29)$$

如图 4.4(b) 所示。

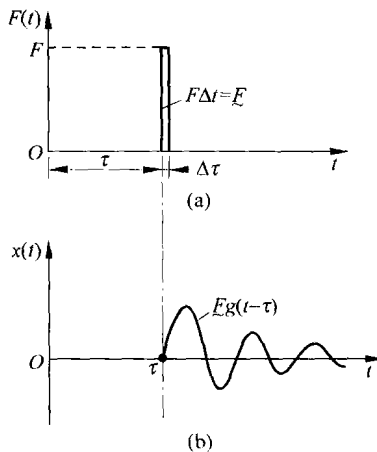


图 4.4 冲量响应

例 4.4 如图 4.5(a) 所示, 在结构振动测试中, 用一个装有测力传感器的冲击锤激振。假设 $m = 5 \text{ kg}$, $k = 2000 \text{ N/m}$, $c = 10 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ 和 $\underline{F} = 20 \text{ N} \cdot \text{s}$, 求系统的响应。

解: 由已知数据, 可得

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2000}{5}} = 20 (\text{rad/s})$$

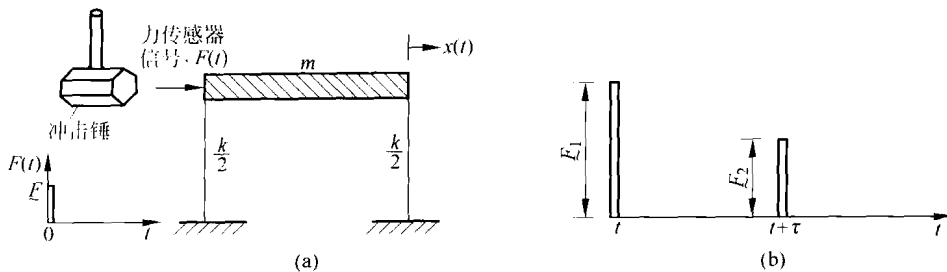


图 4.5 利用冲击锤的结构动态测试

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{10}{2\sqrt{2000 \times 5}} = 0.05$$

$$\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n = 19.975 (\text{rad/s})$$

假设冲量是在 $t=0$ 时刻施加的,由式(4.28)可得系统的响应为

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{F e^{\zeta \omega_n t}}{m \omega_d} \sin \omega_d t = \frac{20}{5 \times 19.975} e^{0.05 \times 20 t} \sin 19.975 t \\ &= 0.20025 e^{t} \sin 19.975 t \quad (\text{E. 1}) \end{aligned}$$

式(E.1)所代表的曲线见例 4.19。

例 4.5 在许多情况下,不能假设只有一个力锤的冲量作用在结构上。如图 4.5(b)所示,有时候在施加了一个冲量之后还要再施加第二个冲量。此时作用力 $F(t)$ 可以表示为

$$F(t) = F_1 \delta(t) + F_2 \delta(t - \tau)$$

其中, $\delta(t)$ 是狄拉克 δ 函数; τ 是两个冲量 F_1 和 F_2 之间的时间间隔。如果 $m = 5 \text{ kg}$, $k = 2000 \text{ N/m}$, $c = 10 \text{ N} \cdot \text{s/m}$, $F(t) = 20\delta(t) + 10\delta(t - 0.2) \text{ N}$, 求结构响应。

解: 由已知数据,可得 $\omega_n = 20 \text{ rad/s}$ (见例 4.4 的结果), $\zeta = 0.05$, $\omega_d = 19.975 \text{ rad/s}$ 。例 4.4 的方程(E.1)给出了由冲量 $F_1 \delta(t)$ 引起的响应,而由式(4.29)、式(4.28)可得由冲量 $F_2 \delta(t - 0.2)$ 引起的响应为

$$x_2(t) = \frac{F_2}{m \omega_d} e^{\zeta \omega_n (t - \tau)} \sin \omega_d (t - \tau) \quad (\text{E. 1})$$

当 $\tau = 0.2$ 时,式(E.1)可化为

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \frac{10}{5 \times 19.975} e^{0.05 \times 20 (t - 0.2)} \sin 19.975 (t - 0.2) \\ &= 0.100125 e^{(t - 0.2)} \sin 19.975 (t - 0.2), \quad t > 0.2 \quad (\text{E. 2}) \end{aligned}$$

将两个响应 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 叠加,可以得到由这两个冲量引起的响应(单位是 m):

$$x(t) = \begin{cases} 0.20025e^{-t} \sin 19.975t, & 0 \leq t \leq 0.2 \\ 0.20025e^{-t} \sin 19.975t + 0.100125e^{-(t-0.2)} \sin 19.975(t-0.2), & t > 0.2 \end{cases} \quad (\text{E.3})$$

式(E.3)所代表的曲线见例4.19。

4.5.2 对一般力的响应

下面研究受任意外力 $F(t)$ 作用时系统的响应, 见图4.6。这个力可以看成是由一系列大小变化的冲量组成的。假设在 τ 时刻, $F(\tau)$ 在很短的时间 $\Delta\tau$ 内作用在系统上, 则在 $t=\tau$ 时刻的冲量就是 $F(\tau)\Delta\tau$ 。对于任意时刻 t , 冲量发生作用的时间为 $t-\tau$, 那么这一冲量在 t 时刻引起的系统的响应由式(4.29)确定, 其中 $\underline{F} = F(\tau)\Delta\tau$, 即

$$\Delta x(t) = F(\tau)\Delta\tau g(t-\tau) \quad (4.30)$$

系统在时刻 t 的总响应等于作用在所有 τ 时刻的微冲量引起的响应的叠加, 即

$$x(t) \simeq \sum F(\tau)g(t-\tau)\Delta\tau \quad (4.31)$$

令 $\Delta\tau \rightarrow 0$, 并用积分代替求和, 可得

$$x(t) = \int_0^t F(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad (4.32)$$

将式(4.27)代入式(4.32)可得

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t F(\tau)e^{\xi\omega_n(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau)d\tau \quad (4.33)$$

这就是单自由度欠阻尼系统对任意激励 $F(t)$ 的响应。注意: 式(4.33)没有考虑初始条件的影响。式(4.32)和式(4.33)中的积分称作褶(卷)积或杜哈美积分。许多情况下, 函数 $F(t)$ 的形式都可以实现对式(4.33)的直接积分。而有些时候无法直接积分, 但可以比较容易地用数值积分进行估计, 见4.8节。

4.5.3 对基础激励的响应

当一个弹簧-质量-阻尼系统受到一个用位移、速度或者加速度描述的基础运动激励时, 以相对位移 $z=x-y$ 表示的运动微分方程为(见3.6.2节)

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y} \quad (4.34)$$

如果用变量 z 替换 x , 用 $-m\ddot{y}$ 代替激励函数 F , 则式(4.34)与下式类似:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \quad (4.35)$$

因此, 受到外力激励系统的解的结果可直接应用于受基础激励的系统。即在式(4.35)

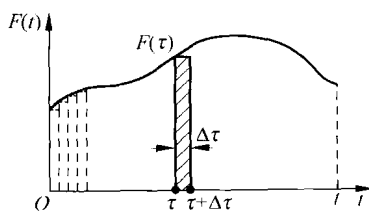


图4.6 任意力函数(非周期函数)

中用 $-m\ddot{y}$ 代替 F 就可以根据其解确定式(4.34)的解。对于一个承受基础激励的欠阻尼系统, 相对位移可以由式(4.33)求出:

$$z(t) = -\frac{1}{\omega_d} \int_0^t \ddot{y}(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau \quad (4.36)$$

例 4.6 一台压实机, 可以简化为一个如图 4.7(a) 所示的单自由度系统。由于一个突然的压力而引起的作用在质量 m 上的力 (m 包括活塞的质量、工作台的质量和被压实材料的质量) 可以认为是一个如图 4.7(b) 所示的阶跃函数。求系统的响应。

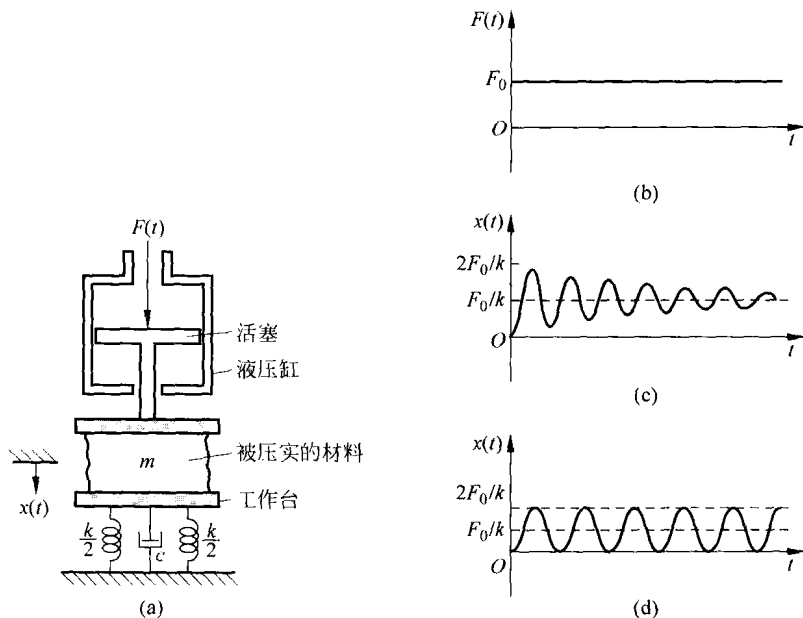


图 4.7 作用在压紧机上的阶跃力

解: 因为压实机可以简化为一个质量-弹簧-阻尼系统, 所以问题就转化为求一个受到阶跃力的有阻尼单自由度系统的响应。注意到 $F(t) = F_0$, 由式(4.33)得

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{F_0}{m\omega_d} \int_0^t e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau \\ &= \frac{F_0}{m\omega_d} \left[e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \left\{ \frac{\zeta\omega_n \sin \omega_d(t-\tau) + \omega_d \cos \omega_d(t-\tau)}{(\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \right\} \right]_{\tau=0}^t \\ &= \frac{F_0}{k} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi) \right] \end{aligned} \quad (\text{E. 1})$$

其中

$$\phi = \arctan \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (\text{E. 2})$$

这个响应如图 4.7(c) 所示。如果系统是无阻尼的 ($\zeta=0$ 且 $\omega_d=\omega_n$)，式(E.1)可化简为

$$x(t) = \frac{F_0}{k} [1 - \cos \omega_n t] \quad (\text{E. 3})$$

式(E.3)代表的振动位移随时间的变化规律如图 4.7(d) 所示。可以看出，如果一个突加载荷作用在无阻尼系统上，系统的最大位移将是静位移的 2 倍，即 $x_{\max} = 2F_0/k$ 。

例 4.7 如果图 4.7(a) 所示的压实机受到图 4.8 所示的延迟阶跃力，求压实机的响应。

解：因为激励函数起始于 $t=t_0$ ，而不是 $t=0$ 时刻，将例 4.6 中式(E.1)中的 t 用 $t-t_0$ 代替，就得到了系统的响应：

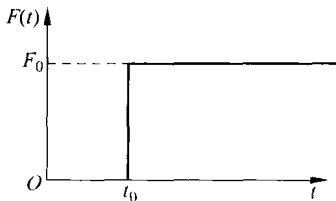


图 4.8 有时滞的阶跃力

$$x(t) = \frac{F_0}{k \sqrt{1-\zeta^2}} [\sqrt{1-\zeta^2} - e^{-\zeta\omega_n(t-t_0)} \cos \{\omega_d(t-t_0) - \phi\}] \quad (\text{E. 1})$$

如果系统是无阻尼的，式(E.1)可化简为

$$x(t) = \frac{F_0}{k} [1 - \cos \omega_n(t-t_0)] \quad (\text{E. 2})$$

例 4.8 如果图 4.7(a) 所示的压实机只是在 $0 \leq t \leq t_0$ 时间内受到一个恒定的力(图 4.9(a))，求它的响应。

解：所给的激励函数 $F(t)$ 可以看成是一个起始于 $t=0$ 、大小为 $+F_0$ 的阶跃函数 $F_1(t)$ 和一个起始于 $t=t_0$ 、大小为 $-F_0$ 的阶跃函数 $F_2(t)$ 的和，如图 4.9(b) 所示。因此系统的响应可以从例 4.6 中式(E.1)减去例 4.7 中式(E.1)得

$$x(t) = \frac{F_0 e^{-\zeta\omega_n t}}{k \sqrt{1-\zeta^2}} [-\cos(\omega_d t - \phi) + e^{\zeta\omega_n t_0} \cos \{\omega_d(t-t_0) - \phi\}] \quad (\text{E. 1})$$

其中

$$\phi = \arctan \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (\text{E. 2})$$

为了用曲线表示该振动响应，假设系统是无阻尼的，则式(E.1)可化简为

$$x(t) = \frac{F_0}{k} [\cos \omega_n(t-t_0) - \cos \omega_n t] \quad (\text{E. 3})$$

图 4.9(c) 中的响应曲线对应着两种不同的脉冲宽度 t_0 ，其他数据为 $m=100 \text{ kg}$ ， $c=50 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ ， $k=1200 \text{ N/m}$ ， $F_0=100 \text{ N}$ 。 $t_0 > \tau_n/2$ 和 $t_0 < \tau_n/2$ 两种情况下系统的响应是不同的(τ_n 表示无阻尼系统的固有周期)。 $t_0 > \tau_n/2$ 时，峰值较大，发生在强迫振动阶段(介于 0 和 t_0 之间)； $t_0 < \tau_n/2$ 时，峰值较小，发生在残余振动阶段(t_0 之后)。图 4.9(c) 中， $\tau_n=1.8138 \text{ s}$ ， $t_0=1.5 \text{ s}$ 时的峰值比 $t_0=0.1 \text{ s}$ 时的峰值大 6 倍。

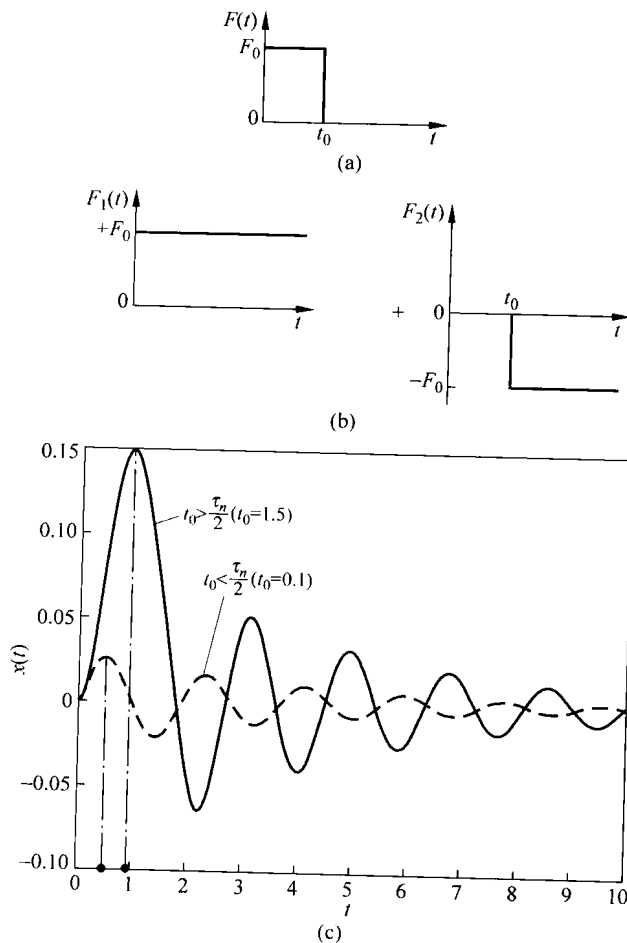


图 4.9 脉冲载荷的响应

例 4.9 如图 4.10(a) 所示的压实机受到一个由凸轮运动产生的线性变化的力 (图 4.10(b)), 求其响应。

解: 图 4.10(b) 所示的线性变化的力的表达式显然是时间的一次函数。该激励函数可以写成 $F(\tau) = \delta F \cdot \tau$, 这里 δF 表示力 F 在单位时间内的增长率。将其代入到式 (4.33) 可得

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{\delta F}{m\omega_d} \int_0^t \tau e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau \\
 &= \frac{\delta F}{m\omega_d} \int_0^t (t-\tau) e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) (-d\tau)
 \end{aligned}$$

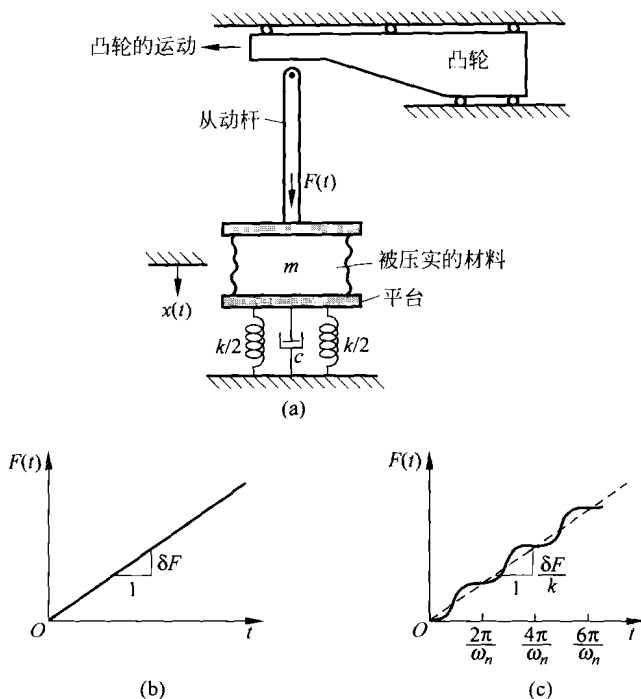


图 4.10 承受线性力的压紧机

$$-\frac{\delta F \cdot t}{m\omega_d} \int_0^t e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) (-d\tau)$$

经过积分运算,该响应可以表示为

$$x(t) = \frac{\delta F}{k} \left[t - \frac{2\zeta}{\omega_n} + e^{-\zeta\omega_n t} \left(\frac{2\zeta}{\omega_n} \cos \omega_d t - \left(\frac{\omega_d^2 - \zeta^2 \omega_n^2}{\omega_n^2 \omega_d} \right) \sin \omega_d t \right) \right] \quad (\text{E. 1})$$

若不计系统阻尼,式(E.1)化简为

$$x(t) = \frac{\delta F}{\omega_n k} (\omega_n t - \sin \omega_n t) \quad (\text{E. 2})$$

图 4.10(c)是式(E.2)对应的响应曲线。

例 4.10 单层房屋结构可以简化为如图 4.11(a)所示的无阻尼单自由度系统。如果所受的风载荷可表示为图 4.11(b)所示的三角形脉冲,求它的响应。

解: 激励函数为

$$F(\tau) = F_0 \left(1 - \frac{\tau}{t_0} \right), \quad 0 \leq \tau \leq t_0 \quad (\text{E. 1})$$

$$F(\tau) = 0, \quad \tau > t_0 \quad (\text{E. 2})$$

不计阻尼时,根据式(4.33)可得

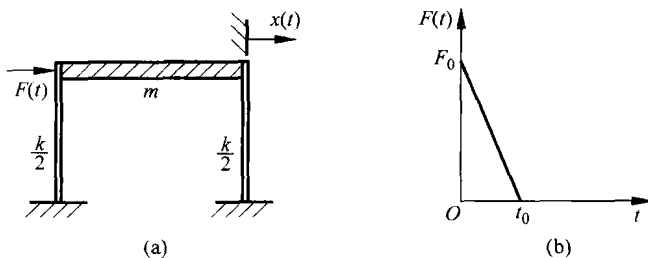


图 4.11 承受风载荷的建筑框架

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t F(\tau) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau \quad (\text{E. 3})$$

为求在 $0 \leq t \leq t_0$ 时间内的响应, 将式(E. 1)中的 $F(\tau)$ 代入式(E. 3)得

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_0}{m\omega_n^2} \int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t_0}\right) [\sin \omega_n t \cos \omega_n \tau - \cos \omega_n t \sin \omega_n \tau] d(\omega_n \tau) \\ &= \frac{F_0}{k} \sin \omega_n t \int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t_0}\right) \cos \omega_n \tau d(\omega_n \tau) \\ &\quad - \frac{F_0}{k} \cos \omega_n t \int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t_0}\right) \sin \omega_n \tau d(\omega_n \tau) \end{aligned} \quad (\text{E. 4})$$

利用分部积分法得

$$\int \tau \cos \omega_n \tau d(\omega_n \tau) = \tau \sin \omega_n \tau + \frac{1}{\omega_n} \cos \omega_n \tau \quad (\text{E. 5})$$

$$\int \tau \sin \omega_n \tau d(\omega_n \tau) = -\tau \cos \omega_n \tau + \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n \tau \quad (\text{E. 6})$$

故式(E. 4)可以写作

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_0}{k} \left[\sin \omega_n t \left(\sin \omega_n t - \frac{t}{t_0} \sin \omega_n t - \frac{1}{\omega_n t_0} \cos \omega_n t + \frac{1}{\omega_n t_0} \right) \right. \\ &\quad \left. - \cos \omega_n t \left(-\cos \omega_n t + 1 + \frac{t}{t_0} \cos \omega_n t - \frac{1}{\omega_n t_0} \sin \omega_n t \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{E. 7})$$

将上式化简得

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \left(1 - \frac{t}{t_0} - \cos \omega_n t + \frac{1}{\omega_n t_0} \sin \omega_n t \right) \quad (\text{E. 8})$$

下面求 $t > t_0$ 时的响应。这里仍使用式(E. 1)给出的 $F(\tau)$, 但是式(E. 3)的积分上限为 t_0 , 因为当 $\tau > t_0$ 时 $F(\tau) = 0$ 。因此令式(E. 7)中圆括号内的 $t = t_0$, 可得系统的响应为

$$x(t) = \frac{F_0}{k\omega_n t_0} [(1 - \cos \omega_n t_0) \sin \omega_n t - (\omega_n t_0 - \sin \omega_n t_0) \cos \omega_n t] \quad (\text{E. 9})$$

4.6 响应谱

反映在特定的激励作用下单自由度系统的最大响应(最大振幅、速度、加速度或者其他的量)随自然频率(或者自然周期)变化的曲线称为响应谱(response spectrum)。因为所给的是最大响应对固有频率(或者固有周期)的关系曲线,所以响应谱提供了所有可能的单自由度系统的最大响应。响应谱在地震工程设计中有着广泛的应用。

一旦得到了对应于某一特定激励的响应谱,只需要知道系统的固有频率就可以求出它的最大响应。下面通过具体的例子来说明响应谱的计算过程。

例 4.11 求图 4.12(a)所示正弦脉冲的无阻尼响应谱,初始条件为 $x(0)=\dot{x}(0)=0$ 。

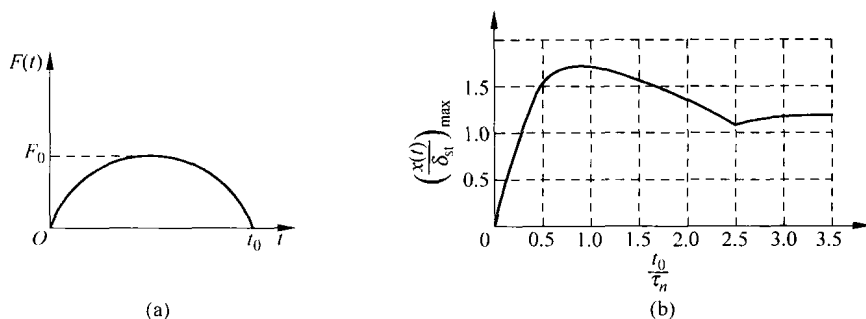


图 4.12 正弦激励下的响应谱

解: 无阻尼单自由度系统的运动微分方程为

$$m\ddot{x} + kx = F(t) = \begin{cases} F_0 \sin \omega t, & 0 \leq t \leq t_0 \\ 0, & t > t_0 \end{cases} \quad (\text{E. 1})$$

其中

$$\omega = \frac{\pi}{t_0} \quad (\text{E. 2})$$

方程(E. 1)的解由齐次方程的通解 $x_c(t)$ 和特解 $x_p(t)$ 组成:

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) \quad (\text{E. 3})$$

即

$$x(t) = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t + \left(\frac{F_0}{k - m\omega^2} \right) \sin \omega t \quad (\text{E. 4})$$

其中, A 和 B 为常数; ω_n 是系统的固有频率:

$$\omega_n = \frac{2\pi}{\tau_n} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{E. 5})$$

将初始条件 $x(0)=\dot{x}(0)=0$ 代入式(E. 4),可以确定常数 A 和 B 如下:

$$A = 0, \quad B = -\frac{F_0 \omega}{\omega_n(k - m\omega^2)} \quad (\text{E. 6})$$

因此解(E. 4)成为

$$x(t) = \frac{F_0/k}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_n} \sin \omega_n t \right), \quad 0 \leq t \leq t_0 \quad (\text{E. 7})$$

上式又可以写成如下形式:

$$\frac{x(t)}{\delta_{st}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\tau_n}{2t_0}\right)^2} \left\{ \sin \frac{\pi t}{t_0} - \frac{\tau_n}{2t_0} \sin \frac{2\pi t}{\tau_n} \right\}, \quad 0 \leq t \leq t_0 \quad (\text{E. 8})$$

这里

$$\delta_{st} = \frac{F_0}{k} \quad (\text{E. 9})$$

式(E. 8)给出的解仅仅在有外激力作用即 $0 \leq t \leq t_0$ 的情况下是有效的。当 $t > t_0$ 时, 由于没有外激力作用, 故为自由振动, 因此解的形式为

$$x(t) = A' \cos \omega_n t + B' \sin \omega_n t, \quad t > t_0 \quad (\text{E. 10})$$

根据式(E. 8)可以求出 $x(t=t_0)$ 和 $\dot{x}(t=t_0)$ 的值, 将它们看作是 $t > t_0$ 时的初始条件就可以确定常数 A' 和 B' :

$$x(t=t_0) = \alpha \left(-\frac{\tau_n}{2t_0} \sin \frac{2\pi t_0}{\tau_n} \right) = A' \cos \omega_n t_0 + B' \sin \omega_n t_0 \quad (\text{E. 11})$$

$$\dot{x}(t=t_0) = \alpha \left\{ \frac{\pi}{t_0} - \frac{\pi}{t_0} \cos \frac{2\pi t_0}{\tau_n} \right\} = -\omega_n A' \sin \omega_n t_0 + \omega_n B' \cos \omega_n t_0 \quad (\text{E. 12})$$

其中

$$\alpha = \frac{\delta_{st}}{1 - \left(\frac{\tau_n}{2t_0}\right)^2} \quad (\text{E. 13})$$

由方程(E. 11)和方程(E. 12)得

$$A' = \frac{\alpha \pi}{\omega_n t_0} \sin \omega_n t_0, \quad B' = -\frac{\alpha \pi}{\omega_n t_0} (1 + \cos \omega_n t_0) \quad (\text{E. 14})$$

将式(E. 14)代入式(E. 10)得

$$\frac{x(t)}{\delta_{st}} = \frac{\tau_n/t_0}{2 \{1 - (\tau_n/2t_0)^2\}} \left[\sin 2\pi \left(\frac{t_0}{\tau_n} - \frac{t}{\tau_n} \right) - \sin 2\pi \frac{t}{\tau_n} \right], \quad t \geq t_0 \quad (\text{E. 15})$$

式(E. 8)和式(E. 15)给出了系统无量纲形式的响应, 即反映的是无量纲响应 x/δ_{st} 随无量纲时间 t/τ_n 的变化。因此对应着特定的 t_0/τ_n 就可以得到 x/δ_{st} 的最大值。画出 x/δ_{st} 的最大值随 t_0/τ_n 的变化曲线就得到了响应谱, 如图 4.12(b)所示。可以看出, 响应的最大值为 $(x/\delta_{st})_{\max} \simeq 1.75$, 发生在 $t_0/\tau_n \simeq 0.75$ 。

此例中, 输入力比较简单, 因此得到了响应谱的封闭解。然而对于任意的激励函数, 或许只能求出响应谱的数值解。这时, 根据式(4.33)可以得到一个无阻尼单自由度系统在任

意输入力 $F(t)$ 作用下的最大响应为

$$x(t) \big|_{\max} = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t F(\tau) \sin \omega_n(t-\tau) d\tau \big|_{\max} \quad (4.37)$$

4.6.1 基础激励的响应谱

在设计承受地面冲击(比如地震产生的冲击)的结构和机械时,对应于基础激励的响应谱是非常有用的。一个有阻尼单自由度系统的基础受到一个加速度 $\ddot{y}(t)$ 激励时,式(4.34)给出了用相对位移 $z=x-y$ 表示的运动微分方程,响应 $z(t)$ 可以根据式(4.36)求出。在地面冲击情况下,最常用的是速度响应谱。而位移响应谱和加速度响应谱都可以利用速度响应谱来表示。对于一个简谐振子(一个无阻尼自由振动系统),由于存在下列关系:

$$\ddot{x} \big|_{\max} = -\omega_n^2 x \big|_{\max} \quad \text{及} \quad \dot{x} \big|_{\max} = \omega_n x \big|_{\max}$$

因此可以得到用速度谱 S_v 表示的加速度谱 S_a 和位移谱 S_d 为

$$S_d = \frac{S_v}{\omega_n}, \quad S_a = \omega_n S_v \quad (4.38)$$

为考虑系统的阻尼,如果假设最大相对位移发生在冲击作用之后,随后的运动一定是简谐的。这时就可以应用式(4.38)。这种与真正的简谐运动相关的虚拟速度叫做**伪速度**(pseudo velocity),其响应谱 S_v 称为**伪速度谱**(pseudo spectrum)。阻尼系统的速度谱在地震分析中有广泛的应用。

为了得到相对速度谱,对式(4.36)求导,并利用下列关系:

$$\frac{d}{dt} \int_0^t f(t, \tau) d\tau = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(t, \tau) d\tau + f(t, \tau) \big|_{\tau=t}$$

可得

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) = & -\frac{1}{\omega_d} \int_0^t \ddot{y}(\tau) e^{\xi\omega_n(t-\tau)} [-\xi\omega_n \sin \omega_d(t-\tau) \\ & + \omega_d \cos \omega_d(t-\tau)] d\tau \end{aligned} \quad (4.39)$$

式(4.39)还可以写为

$$\dot{z}(t) = \frac{e^{\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sqrt{P^2 + Q^2} \sin(\omega_d t - \phi) \quad (4.40)$$

其中

$$P = \int_0^t \ddot{y}(\tau) e^{\xi\omega_n \tau} \cos \omega_d \tau d\tau \quad (4.41)$$

$$Q = \int_0^t \ddot{y}(\tau) e^{\xi\omega_n \tau} \sin \omega_d \tau d\tau \quad (4.42)$$

$$\phi = \arctan \left\{ \frac{-(P \sqrt{1-\xi^2} + Q\xi)}{P\xi - Q \sqrt{1-\xi^2}} \right\} \quad (4.43)$$

速度响应谱可以根据式(4.40)求出:

$$S_v = |\dot{z}(t)|_{\max} = \left| \frac{e^{\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sqrt{P^2 + Q^2} \right|_{\max} \quad (4.44)$$

因此可以求出虚拟响应谱为

$$S_d = |z|_{\max} = \frac{S_v}{\omega_n}, \quad S_v = |\dot{z}|_{\max}, \quad S_a = |\ddot{z}|_{\max} = \omega_n S_v \quad (4.45)$$

例 4.12 图 4.13(a)所示水塔,受到一个由于地震造成的线性变化的地面加速度的作用,如图 4.13(b)所示。水塔的质量为 m , 支承架的刚度为 k , 阻尼可以忽略不计。求水塔相对位移 $z = x - y$ 的响应谱。

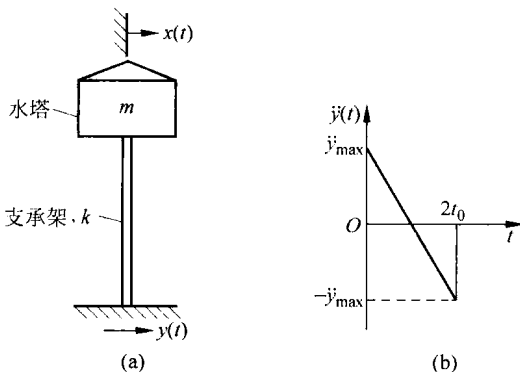


图 4.13 承受基础运动的水塔

解: 基础的加速度可以表示为

$$\ddot{y}(t) = \ddot{y}_{\max} \left(1 - \frac{t}{t_0}\right), \quad 0 \leq t \leq 2t_0 \quad (E.1)$$

$$\ddot{y}(t) = 0, \quad t > 2t_0 \quad (E.2)$$

先求 $0 \leq t \leq 2t_0$ 的响应。将式(E.1)代入式(4.36), 由于不计阻尼, 系统的响应可以表示为

$$z(t) = -\frac{1}{\omega_n} \ddot{y}_{\max} \left[\int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t_0}\right) (\sin \omega_n t \cos \omega_n \tau - \cos \omega_n t \sin \omega_n \tau) d\tau \right] \quad (E.3)$$

上式和例 4.10 中的式(E.4)是相同的, 除了将 F_0/m 替换为 $(-\ddot{y}_{\max})$ 之外。因此, 根据例 4.10 中的式(E.8), $z(t)$ 可以写作

$$z(t) = -\frac{\ddot{y}_{\max}}{\omega_n^2} \left(1 - \frac{t}{t_0} - \cos \omega_n t + \frac{1}{\omega_n t_0} \sin \omega_n t\right) \quad (E.4)$$

为了求得最大响应 z_{\max} , 令

$$\dot{z}(t) = -\frac{\ddot{y}_{\max}}{t_0 \omega_n^2} \left[-1 + \omega_n t_0 \sin \omega_n t + \cos \omega_n t\right] = 0 \quad (E.5)$$

由这个方程可以求出 z_{\max} 对应的时间 t_m :

$$t_m = \frac{2}{\omega_n} \arctan \omega_n t_0 \quad (\text{E. 6})$$

将式(E. 6)代入式(E. 4),即可求出水塔的最大响应:

$$z_{\max} = -\frac{\ddot{y}_{\max}}{\omega_n^2} \left(1 - \frac{t_m}{t_0} - \cos \omega_n t_m + \frac{1}{\omega_n t_0} \sin \omega_n t_m \right) \quad (\text{E. 7})$$

接下来求 $t > 2t_0$ 时的响应。因为在这一段时间内没有激励,所以可以使用自由振动的解:

$$z(t) = z_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{z}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t \quad (\text{E. 8})$$

其中,初始位移和初始速度根据式(E. 7)确定:

$$z_0 = z(t = 2t_0) \quad \text{及} \quad \dot{z}_0 = \dot{z}(t = 2t_0) \quad (\text{E. 9})$$

由式(E. 8)可知, $z(t)$ 的最大值为

$$z_{\max} = \left[z_0^2 + \left(\frac{\dot{z}_0}{\omega_n} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{E. 10})$$

这里的 z_0 和 \dot{z}_0 由式(E. 9)确定。

4.6.2 地震响应谱

地震运动在时域上最直接的描述就是地震加速度图,它是由一种叫做强震加速度计(strong motion accelerographs)的仪器记录下来的。加速度计记录了特定位置地面加速度的3个直角分量。图4.14就是一个典型的地震加速度图。加速度图一般记录在相纸或者胶片上,从而为工程应用提供数据。由加速度图可以得到地震时的地面加速度的峰值、持续时间和频率组成。对地震加速度图进行积分可以得到地面速度和位移随时间的变化。

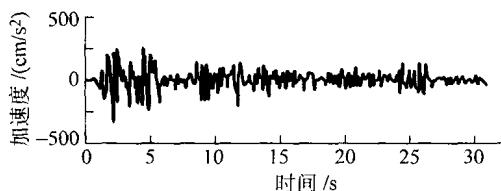


图 4.14 一个典型的地震加速度图

响应谱最容易说明地震对结构和机械的影响。使用对数比例尺可以画出以加速度、相对速度(伪速度)和相对位移表示的单自由度系统的最大响应。图4.15是一张以4种形式画在对数纸上的响应谱。图中纵轴表示谱速度,横轴表示自然周期,45°轴代表谱加速度,135°表示谱位移。

从图4.15可以看到,加速度图(地震)的响应谱在频域上是很不规则的。然而从在地理和地震特征相同的几个点得到的加速度图在时间上是光滑的,它们有共同的趋势。这种观

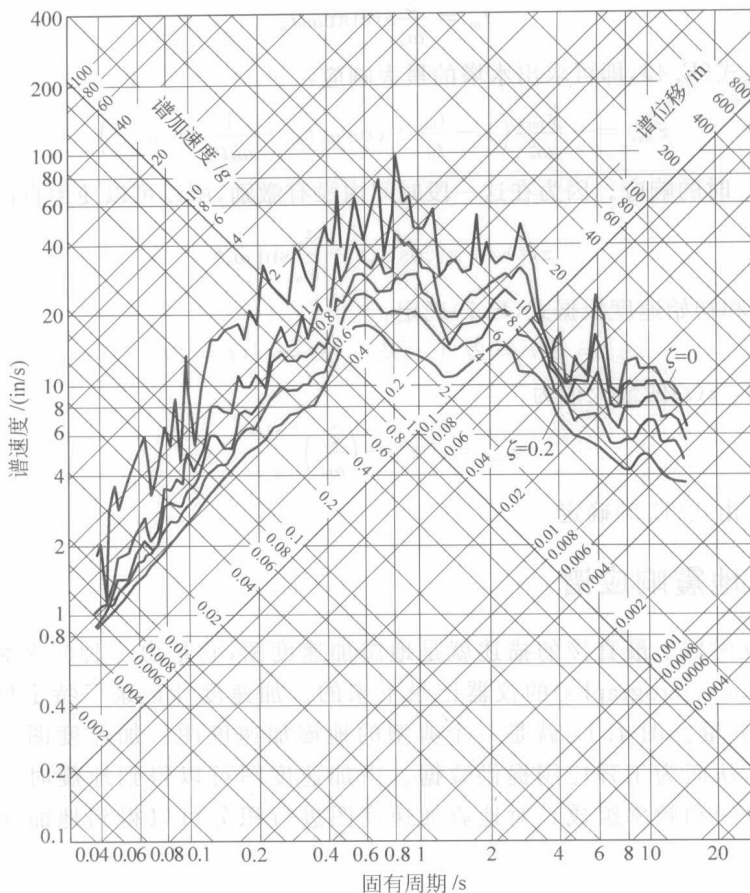


图 4.15 一个典型地震的响应谱^[4.12] ($\zeta=0, 0.02, 0.05, 0.1$ 和 0.2)
(经 *The Shock and Vibration Digest* 许可重印)

点导致建筑和机械抗震设计中设计谱(见图 4.16)思想的发展。

例 4.13 一幢建筑的框架重 15 000 lbf, 两根柱子的总刚度为 k , 如图 4.17 所示。它的阻尼比为 0.05, 固有周期是 1.0 s。如果图 4.15 是对地震的描述, 试求: (a) 重物的最大相对位移 x_{\max} ; (b) 柱子受到的最大剪力; (c) 柱子的最大弯曲应力。

解: 思路是求对应于给定固有周期的位移谱、速度谱和加速度谱。

因为 $\tau_n = 1.0$ s, $\zeta = 0.05$, 由图 4.15 可以查出 $S_v = 25$ in/s, $S_d = 4.2$ in, $S_a = 0.42$ g = 162.288 in/s²。

重物的最大相对位移为

$$x_{\max} = S_d = 4.2 \text{ in}$$

柱子承受的最大剪力为

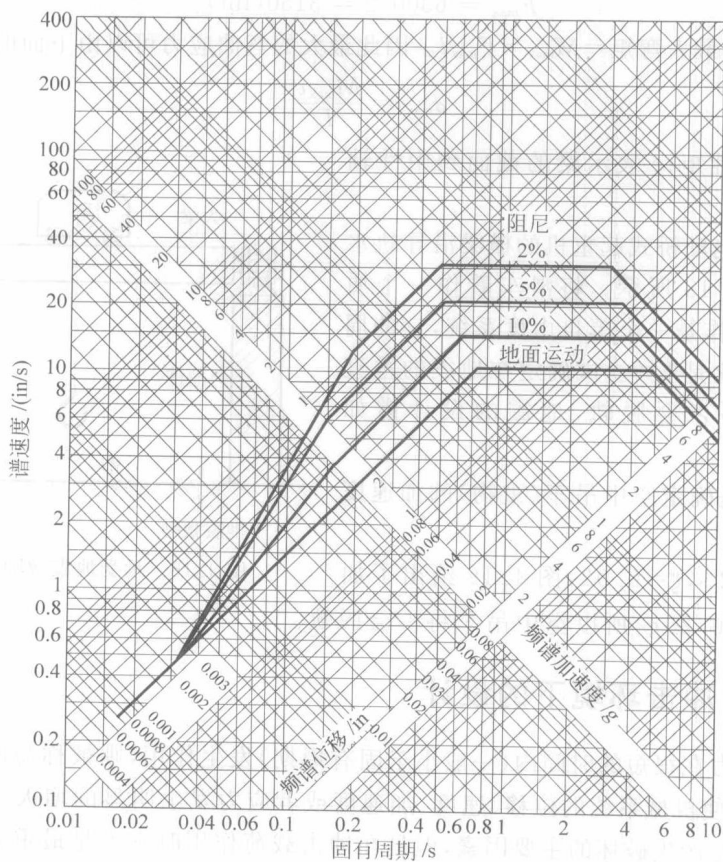
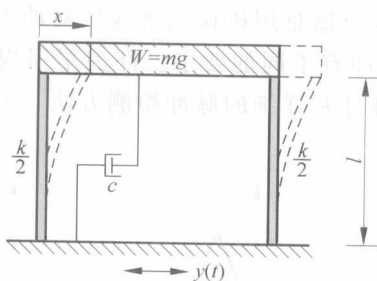
图 4.16 设计谱(经 *The Shock and Vibration Digest* 许可重印)

图 4.17 承受基础运动的建筑物框架

$$|kx_{\max}| = m\ddot{x}_{\max} = \frac{W}{g}S_a = \frac{15\,000}{386.4} \times 162.288 = 6300(\text{lbf})$$

因此每根柱子承受的最大剪力为

$$F_{\max} = 6300/2 = 3150(\text{lbf})$$

每根柱子的最大弯矩 $= M_{\max} = F_{\max} l$ 。因此最大的弯曲应力可以由下面的公式求出:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} c}{I}$$

这里, I 表示惯性矩; c 表示梁的截面到中性轴距离的最大值。

例 4.14 电动桥式起重机的横梁沿导轨水平运动, 如图 4.18 所示。将滑车看作一个质点, 横梁可以看作是一个单自由度系统, 它的周期为 2 s, 阻尼比是 2%。试确定在地震的垂直激励下滑车是否会脱轨, 地震的设计谱如图 4.16 所示。

解: 思路是确定空中吊车(重物)的加速度谱是否超过 $1g$ 。

因为 $\tau_n = 2 \text{ s}$, $\zeta = 0.02$, 图 4.16 给出了加速度谱为 $S_a = 0.25g$, 所以空中吊车将不会脱轨。

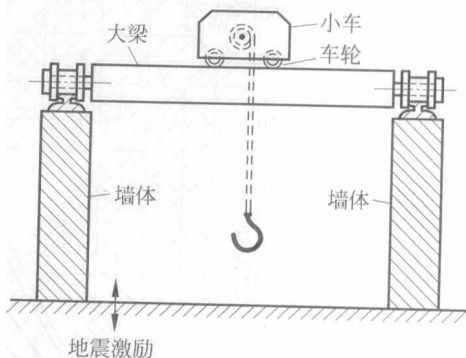


图 4.18 承受地震激励的起重机

4.6.3 冲击环境下的设计

如果一个力在很短的时间内(一般小于固有周期)发生作用, 则被称为冲击载荷(shock load)。冲击会使机械系统的位移、速度、加速度或者应力发生明显的增大。虽然在谐波力的作用下疲劳是产生破坏的主要因素, 但是在冲击载荷作用时它不是最重要的。冲击可以用脉冲冲击、速度冲击或者冲击响应谱来描述。脉冲冲击一般是突加一个方形、半正弦形、三角形或其他形状的力或者位移(见图 4.19)。速度冲击一般是由速度的突然变化造成的, 例如包裹从高处落下。冲击响应谱是用机械或者建筑对冲击的响应来代替冲击本身。商业、工业和军用产品对冲击脉冲有不同的要求。许多军用规定比如 MIL-E-5400 和 MIL-STD-810 限定了不同的冲击脉冲和详细的脉冲检测方法。下面的例子说明了冲击环境下降低机械系统动应力的方法。

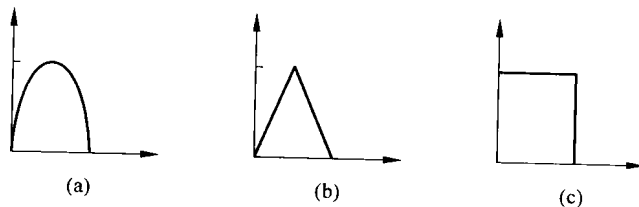


图 4.19 几种常见的冲击脉冲

(a) 半正弦脉冲; (b) 三角脉冲; (c) 矩形脉冲

例 4.15 一块印刷电路板(PCB)安装在一个悬臂的铝制托架上,如图 4.20(a)所示。托架放在一个盒子里,盒子将会从低空飞行的直升机上落下。造成的冲击可以近似看作一个半正弦的脉冲波,如图 4.20(b)所示。为了保证电路板在冲击下的加速度不大于 $100g$,试设计托架。假定铝的密度为 0.1 lbf/in^3 ,弹性模量为 10^7 lbf/in^2 ,许用应力为 $26\,000 \text{ lbf/in}^2$ 。

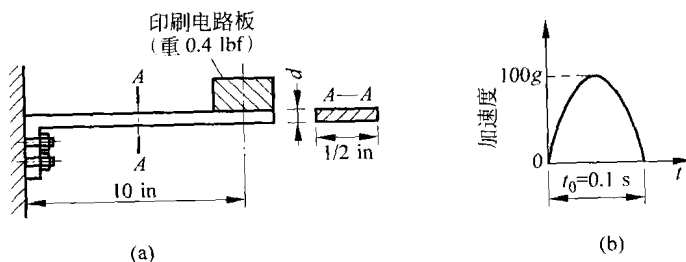


图 4.20 承受冲击载荷的悬臂梁

解: 梁的自重 w 为

$$w = 10 \times \frac{1}{2}d \times 0.1 = 0.5d$$

假定电路板的质量集中作用在梁的自由端,则总重 W 为

$$W = \text{梁的重量} + \text{印刷电路板的重量} = 0.5d + 0.4$$

梁的横截面的惯性矩 I 为

$$I = \frac{1}{12} \times \frac{1}{2}d^3 = 0.041\,67d^3$$

在 W 作用下,梁的静变形 δ_{st} 为

$$\delta_{st} = \frac{Wl^3}{3EI} = \frac{(0.5d + 0.4) \times 10^3}{3 \times 10^7 \times 0.041\,67d^3} = \frac{0.5d + 0.4}{d^3} \times 7.9994 \times 10^{-4}$$

如果不知道 t_0/τ_n 的值,冲击放大系数(图 4.12(b)的纵坐标)就无法确定。下面采用试算法来确定 τ_n 的值,从而求出 t_0/τ_n 。如果假定 d 为 $\frac{1}{2}\text{in}$,则

$$\delta_{st} = \frac{0.5 \times 0.5 + 0.4}{0.5^3} \times 7.9997 \times 10^{-4} = 41.5969 \times 10^{-4} (\text{in})$$

由式(2.30)可得

$$\tau_n = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{41.5969 \times 10^{-4}}{386.4}} = 0.020\,615 (\text{s})$$

因此

$$\frac{t_0}{\tau_n} = \frac{0.1}{0.020\,615} = 4.8508$$

从图 4.12(b)可以查出冲击放大系数 A_s 为 1.1。作用在悬臂上的动载荷 P_d 为

$$P_d = A_s Ma_s = 1.1 \times \frac{0.65}{g} \times 100g = 71.5(\text{lbf})$$

这里, a_s 表示对应于冲击的加速度; M 为作用在梁端的重量; Ma_s 是梁的惯性力。注意到 $I = 0.041\,67d^3 = 0.005\,209\text{ in}^4$, 悬臂支架根部的最大弯曲应力为

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{b,c}}{I} = \frac{(71.5 \times 10) \frac{0.5}{2}}{0.005\,209} = 34\,315.6076(\text{lbf/in}^2)$$

由于这个应力值超过了许用值, 假设 $d = 0.6\text{ in}$, 则

$$\delta_{st} = \left(\frac{0.5 \times 0.6 + 0.4}{0.6^3} \right) 7.9994 \times 10^{-4} = 25.9240 \times 10^{-4}(\text{in})$$

$$\tau_n = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{25.9240 \times 10^{-4}}{386.4}} = 0.016\,27(\text{s})$$

$$\frac{t_0}{\tau_n} = \frac{0.1}{0.016\,27} = 6.1445$$

从图 4.12(b) 可以看到, 冲击放大系数 $A_s \approx 1.1$, 因此作用在梁上的动载荷为

$$P_d = 1.1 \times \frac{0.7}{g} \times 100g = 77.0(\text{lbf})$$

因为 $d = 0.6\text{ in}$, 有 $I = 0.041\,67d^3 = 0.009\,001\text{ in}^4$, 支架根部的最大弯曲应力为

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{b,c}}{I} = \frac{(77.0 \times 10) \times \frac{0.6}{2}}{0.009\,001} = 25\,663.8151(\text{lbf/in}^2)$$

因为应力在许用范围内, 所以支架的厚度可以设计为 $d = 0.6\text{ in}$ 。

4.7 拉普拉斯变换

拉普拉斯变换法可以用来求一个系统在任何激励下的响应, 包括谐波激励和周期激励。这种方法可用于求线性微分方程的精确解, 尤其是常系数微分方程^[4,3]。它可以将微分方程转换为代数方程, 以便于求解。这种方法的最大优点为可以解决离散函数问题, 而不增加难度, 而且它可以自动考虑初始条件。

表达式 $x(t)$ 的拉普拉斯变换用 $\bar{x}(s) = \mathcal{L}x(t)$ 表示, 定义为

$$\bar{x}(s) = \mathcal{L}x(t) = \int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt \quad (4.46)$$

这里, s 一般为复数量, 称为**辅助变量**(subsidiary variable); 表达式 e^{-st} 称为变化的核(kernel)。因为是关于 t 进行积分, 所以变换后得到关于 s 的表达式。用拉普拉斯变换法解决振动问题必须经过下列步骤:

- (1) 写出系统的运动微分方程;
- (2) 使用已知的初始条件, 对方程中的每一项进行变换;
- (3) 求解变换后系统的响应;

(4) 应用拉普拉斯反变换求出所需要的解(响应)。

为了求解强迫振动的方程

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (4.47)$$

应用拉普拉斯变换法必须要求出下列导数:

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}(t) \quad \text{及} \quad \ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}(t)$$

根据下面的式子可以求出上式:

$$\mathcal{L}\frac{dx}{dt}(t) = \int_0^\infty e^{-st} \frac{dx}{dt}(t) dt \quad (4.48)$$

对上式进行分部积分得

$$\mathcal{L}\frac{dx}{dt}(t) = e^{-st}x(t) \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st}x(t) dt = s\bar{x}(s) - x(0) \quad (4.49)$$

其中, $x(0)=x_0$ 是质量 m 的初始位移。同理, 可求出 $x(t)$ 二阶导数的拉氏变换:

$$\mathcal{L}\frac{d^2x}{dt^2}(t) = \int_0^\infty e^{-st} \frac{d^2x}{dt^2}(t) dt = s^2\bar{x}(s) - sx(0) - \dot{x}(0) \quad (4.50)$$

这里, $\dot{x}(0)=\dot{x}_0$ 是质量 m 的初速度。激励力 $F(t)$ 的拉氏变换为

$$\bar{F}(s) = \mathcal{L}F(t) = \int_0^\infty e^{-st}F(t) dt \quad (4.51)$$

根据式(4.46)、式(4.48)和式(4.51), 将方程(4.47)两侧同时进行变换得到

$$m\mathcal{L}\ddot{x}(t) + c\mathcal{L}\dot{x}(t) + k\mathcal{L}x(t) = \mathcal{L}F(t)$$

或者写作

$$(ms^2 + cs + k)\bar{x}(s) = \bar{F}(s) + m\dot{x}(0) + (ms + c)x(0) \quad (4.52)$$

式(4.52)右边的部分可以认为是变换后总的激励。

暂时令 $\dot{x}(0)$ 和 $x(0)$ 为零, 这相当于忽略了微分方程(4.47)的齐次解。则激励的变换和响应变换的比值 $\bar{Z}(s)$ 可表示为

$$\bar{Z}(s) = \frac{\bar{F}(s)}{\bar{x}(s)} = ms^2 + cs + k \quad (4.53)$$

表达式 $\bar{Z}(s)$ 称为系统的广义阻抗 (generalized impedance)。 $\bar{Z}(s)$ 的倒数称为系统的导纳 (admittance) 或者传递函数 (transfer function), 用 $\bar{Y}(s)$ 表示:

$$\bar{Y}(s) = \frac{1}{\bar{Z}(s)} = \frac{\bar{x}(s)}{\bar{F}(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} = \frac{1}{m(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (4.54)$$

令 $\bar{Y}(s)$ 中的 $s = i\omega$, 同乘以 k , 就得到式(3.54)定义的复频响应 $H(i\omega)$ 。式(4.54)还可以写作

$$\bar{x}(s) = \bar{Y}(s)\bar{F}(s) \quad (4.55)$$

它表明传递函数可以看作是从力的变换到响应的变换的代数算子。

为了由 $\bar{x}(s)$ 求出所需的响应 $x(t)$, 对 $\bar{x}(s)$ 进行拉氏反变换, 拉氏反变换可以定义为如下形式:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \bar{x}(s) = \mathcal{L}^{-1} \bar{Y}(s) \bar{F}(s) \quad (4.56)$$

一般来说,算子 \mathcal{L}^{-1} 包括一个复数域的线性积分^[4.9,4.10]。幸运的是,我们不需要对每个问题分别进行积分。不同形式的表达式 $F(t)$ 的积分已经计算出来并进行了列表^[4.4]。在附录 A 中给出了一个这样的表格。为了通过式(4.56)求解,一般把 $\bar{x}(s)$ 分解成拉氏变换表中存在反变换的简单表达式的组合。通过分式分解可以很容易地将 $\bar{x}(s)$ 展开。

在上面的讨论中,令 $\dot{x}(0)$ 和 $x(0)$ 为零即忽略了微分方程的齐次解。现在考虑 $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ 和 $x(0) = x_0$ 为初始条件的通解。根据式(4.52),可以求出响应的变换 $\bar{x}(s)$:

$$\bar{x}(s) = \frac{\bar{F}(s)}{m(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} + \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} x_0 + \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \dot{x}_0 \quad (4.57)$$

将式(4.57)分解即可以得到 $\bar{x}(s)$ 的反变换。根据下列关系^[4.4]:

$$\mathcal{L}^{-1} \bar{f}_1(s) \bar{f}_2(s) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad (4.58)$$

将式(4.57)右边的第1项看作 $\bar{f}_1(s) \bar{f}_2(s)$, 这里

$$\bar{f}_1(s) = \bar{F}(s) \quad \text{及} \quad \bar{f}_2(s) = \frac{1}{m(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

考虑 $f_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \bar{f}_1(s) = F(t)$, 得到^①

$$\mathcal{L}^{-1} \bar{f}_1(s) \bar{f}_2(s) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t F(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin \omega_d(t - \tau) d\tau \quad (4.59)$$

考虑式(4.57)右边的第2项,根据附录 A 求 x_0 的系数的反变换:

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi_1) \quad (4.60)$$

其中

$$\phi_1 = \cos^{-1} \zeta \quad (4.61)$$

最后,从附录 A 中求出式(4.57)右侧第3项的反变换:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right] = \frac{1}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t \quad (4.62)$$

根据式(4.57)、式(4.59)、式(4.60)和式(4.62),方程(4.47)的通解可以表示为

$$x(t) = \frac{x_0}{(1 - \zeta^2)^{1/2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi_1) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t + \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t F(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin \omega_d(t - \tau) d\tau \quad (4.63)$$

例 4.16 求例 4.6 中压实机的响应,假定系统有阻尼(即 $\zeta < 1$)。

解: 思路是将压实机简化为一个弹簧-质量块-阻尼模型,并采用拉氏变换法。

① $\bar{f}_2(s)$ 的反变换可由附录 A 中的拉氏变换表得出。

力的表达式为

$$F(t) = \begin{cases} F_0, & 0 \leq t \leq t_0 \\ 0, & t > t_0 \end{cases} \quad (\text{E. 1})$$

对微分方程(4.47)作拉氏变换,就得到了式(4.57),根据附录 A 和

$$\bar{F}(s) = \mathcal{L}F(t) = \frac{F_0(1 - e^{-t_0 s})}{s} \quad (\text{E. 2})$$

式(4.57)可以写作

$$\begin{aligned} \bar{x}(s) &= \frac{F_0(1 - e^{-t_0 s})}{ms(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} + \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} x_0 + \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \dot{x}_0 \\ &= \frac{F_0}{m\omega_n^2} \frac{1}{s\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1\right)} - \frac{F_0}{m\omega_n^2} \frac{e^{-t_0 s}}{s\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1\right)} \\ &\quad + \frac{x_0}{\omega_n^2} \frac{s}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1} + \left(\frac{2\zeta x_0}{\omega_n} + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n^2}\right) \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1} \end{aligned} \quad (\text{E. 3})$$

应用附录 A 中的结果,式(E.3)的反变换为

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_0}{m\omega_n^2} \left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi_1\} \right] \\ &\quad - \frac{F_0}{m\omega_n^2} \left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n(t-t_0)}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}(t-t_0) + \phi_1\} \right] \\ &\quad - \frac{x_0}{\omega_n^2} \left[\frac{\omega_n^2 e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \phi_1\} \right] \\ &\quad + \left(\frac{2\zeta x_0}{\omega_n} + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n^2} \right) \left[\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t) \right] \end{aligned} \quad (\text{E. 4})$$

其中, ϕ_1 由式(4.61)确定。因此压实机的响应可以表示为

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_0}{m\omega_n^2 \sqrt{1-\zeta^2}} \left[-e^{\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi_1) \right. \\ &\quad \left. + e^{-\zeta\omega_n(t-t_0)} \sin\{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}(t-t_0) + \phi_1\} \right] \\ &\quad - \frac{x_0}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \phi_1) \\ &\quad + \frac{2\zeta\omega_n x_0 + \dot{x}_0}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t) \end{aligned} \quad (\text{E. 5})$$

虽然预想的式(E.5)的第一部分应该与例4.8中的(E.1)相同,现在却很难看出它们有什么共同点。但是,对于无阻尼系统,式(E.5)可以化简为

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n^2} \left[-\sin\left(\omega_n t + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left\{\omega_n(t-t_0) + \frac{\pi}{2}\right\} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & -x_0 \sin \left(\omega_n t - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t \\
 & = \frac{F_0}{k} [\cos \omega_n (t - t_0) - \cos \omega_n t] + x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t
 \end{aligned} \quad (\text{E. 6})$$

式(E. 6)的第一项或者稳态项与例 4. 8 的式(E. 3)是相同的。

4. 8 应用数值方法求解不规则激励下的响应

在前面的章节中,我们都假定激励函数 $F(t)$ 是存在的,而且是关于时间的多项式。但是在有些问题中激励 $F(t)$ 是没有解析表达式的。如果激励项是由实验确定的,则 $F(t)$ 可能是一个不规则的波形。有些时候,只有一张图或者表给出了一系列点 $t=t_i$ 时的值 $F(t)=F_i$ 。这时,可以用数据来求出拟和函数或曲线,并对它们作杜哈美(Duhamel)积分,即式(4. 33),来求解系统的响应。另一种更常用的求解响应的方法需要将时间轴划分成一系列的离散点,在每一步应用 $F(t)$ 的变化。本节将介绍使用 $F(t)$ 的不同插值函数的数值方法^[4. 8]。

方法 1 假设函数 $F(t)$ 随时间的变化是任意的,如图 4. 21 所示。激励函数可以用不同时刻起始的不同大小的阶跃函数来逼近,见图 4. 22。图中,第 1 级阶跃函数始于 $t=t_1=0$,大小为 ΔF_1 ;第 2 级阶跃函数起始于 $t=t_2$,大小为 ΔF_2 ,等等。系统在任意的时间段 $t_{j-1} \leq t \leq t_j$ 的响应取决于根据例 4. 6 所求得阶跃函数 $\Delta F_i (i=1, 2, \dots, j-1)$:

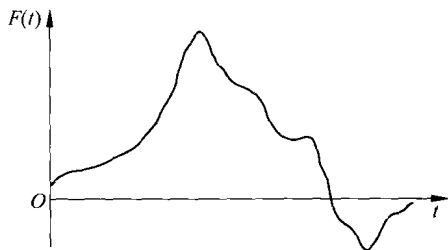


图 4. 21 任意的力函数

$$x(t) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{j-1} \Delta F_i \left[1 - e^{-\xi \omega_n (t-t_i)} \left\{ \cos \omega_d (t-t_i) + \frac{\xi \omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d (t-t_i) \right\} \right] \quad (4. 64)$$

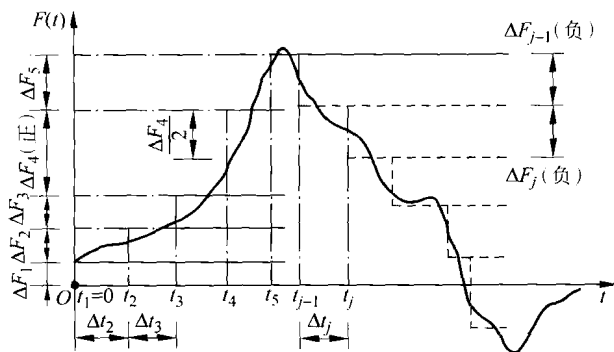


图 4. 22 用一系列阶跃函数来逼近激励函数

因此系统在 $t=t_j$ 的响应为

$$x_j = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^j \Delta F_i \left[1 - e^{-\zeta \omega_n (t_j - t_i)} \left\{ \cos \omega_d (t_j - t_i) + \frac{\zeta \omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d (t_j - t_i) \right\} \right] \quad (4.65)$$

可以注意到,如果 $F-t$ 曲线的斜率为正,则第 i 阶阶跃函数 ΔF_i 为正;如果 $F-t$ 曲线的斜率为负,则第 i 阶阶跃函数 ΔF_i 为负,如图 4.22 所示。为了提高准确度,每步的时间可以取得尽量小。此外,第 1 阶以后的函数都必须起始于 $F(t)$ 曲线在各阶的高度中点,如图 4.22 所示。这样, $F(t)$ 拟合过程中产生的误差将会有一定的自我补偿,因为 $F(t)$ 曲线上部分的面积近似于 $F(t)$ 曲线下部分的面积。

方法 2 用一系列的矩形脉冲代替阶跃函数逼近 $F(t)$,如图 4.23 所示。这些脉冲 F_i 的正负取决于 $F(t)$ 曲线在时间(t)轴的上面还是下面。和前面一样, F_i 的大小应该选择时间段 Δt_i 中点处 $F(t)$ 的值(见图 4.23),从而实现误差自我补偿。系统在任意时间段 $t_{j-1} \leq t \leq t_j$ 的响应可以通过将 F_j 的响应(作用在时间段 Δt_j)和 $t=t_{j-1}$ 时的响应(初始条件)相加得到,即

$$x(t) = \frac{F_j}{k} \left[1 - e^{-\zeta \omega_n (t - t_{j-1})} \left\{ \cos \omega_d (t - t_{j-1}) + \frac{\zeta \omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d (t - t_{j-1}) \right\} \right] + e^{-\zeta \omega_n (t - t_{j-1})} \left\{ x_{j-1} \cos \omega_d (t - t_{j-1}) + \frac{\dot{x}_{j-1} + \zeta \omega_n x_{j-1}}{\omega_d} \sin \omega_d (t - t_{j-1}) \right\} \quad (4.66)$$

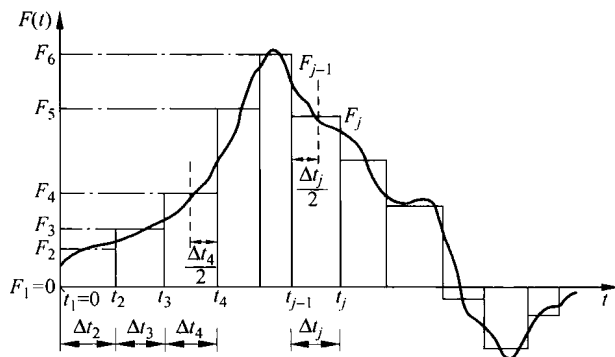


图 4.23 用一系列脉冲来逼近激励函数

将 $t=t_j$ 代入式(4.66),可以求出时间段 Δt_j 结束时系统的响应:

$$x_j = \frac{F_j}{k} \left[1 - e^{-\zeta \omega_n \Delta t_j} \left\{ \cos \omega_d \cdot \Delta t_j + \frac{\zeta \omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d \cdot \Delta t_j \right\} \right] + e^{-\zeta \omega_n \Delta t_j} \left\{ x_{j-1} \cos \omega_d \cdot \Delta t_j + \frac{\dot{x}_{j-1} + \zeta \omega_n x_{j-1}}{\omega_d} \sin \omega_d \cdot \Delta t_j \right\} \quad (4.67)$$

将式(4.66)对 t 求导,并令 $t=t_j$,可得到时间段 Δt_j 结束时的速度 \dot{x}_j :

$$\dot{x}_j = \frac{F_j \omega_d}{k} e^{-\zeta \omega_n \Delta t_j} \left(1 + \frac{\zeta^2 \omega_n^2}{\omega_d^2} \right) \sin \omega_d \cdot \Delta t_j$$

$$\begin{aligned}
 & + \omega_d e^{-\zeta \omega_n \Delta t_j} \left\{ -x_{j-1} \sin \omega_d \Delta t_j + \frac{\dot{x}_{j-1} + \zeta \omega_n x_{j-1}}{\omega_d} \cos \omega_d \Delta t_j \right. \\
 & \left. - \frac{\zeta \omega_n}{\omega_d} \left[x_{j-1} \cos \omega_d \Delta t_j + \frac{\dot{x}_{j-1} + \zeta \omega_n x_{j-1}}{\omega_d} \sin \omega_d \Delta t_j \right] \right\} \quad (4.68)
 \end{aligned}$$

式(4.67)和式(4.68)说明了第 j 个时间段结束时响应的递归关系。它们还提供了 $(j+1)$ 阶的起始条件 x_j 和 \dot{x}_j 。这些公式还可用于求解系统位移和速度随时间的变化。

方法3 方法1和方法2应用分段常数逼近时,一般很难使得 $F(t)$ 曲线上面和下面的面积相等,从而实现自我补偿。因此需要一种精度更高的插值方法,比如分段线性或者分段二次的方式逼近 $F(t)$ 。在分段线性插值时, $F(t)$ 在任意时间段内的变化率被假定为线性的,如图4.24所示。这样,系统在时间段 $t_{j-1} \leq t \leq t_j$ 的响应可以通过将线性(斜率)多项式的响应加上 $t=t_{j-1}$ 时的响应(初始条件)得出来,即

$$\begin{aligned}
 x(t) = & \frac{\Delta F_j}{k \Delta t_j} \left[t - t_{j-1} - \frac{2\zeta}{\omega_n} + e^{-\zeta \omega_n (t-t_{j-1})} \left\{ \frac{2\zeta}{\omega_n} \cos \omega_d (t - t_{j-1}) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\omega_d^2 - \zeta^2 \omega_n^2}{\omega_n^2 \omega_d} \sin \omega_d (t - t_{j-1}) \right\} \right] \\
 & + \frac{F_{j-1}}{k} \left[1 - e^{-\zeta \omega_n (t-t_{j-1})} \left\{ \cos \omega_d (t - t_{j-1}) + \frac{\zeta \omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d (t - t_{j-1}) \right\} \right] \\
 & + e^{-\zeta \omega_n (t-t_{j-1})} \left[x_{j-1} \cos \omega_d (t - t_{j-1}) + \frac{\dot{x}_{j-1} + \zeta \omega_n x_{j-1}}{\omega_d} \sin \omega_d (t - t_{j-1}) \right] \quad (4.69)
 \end{aligned}$$

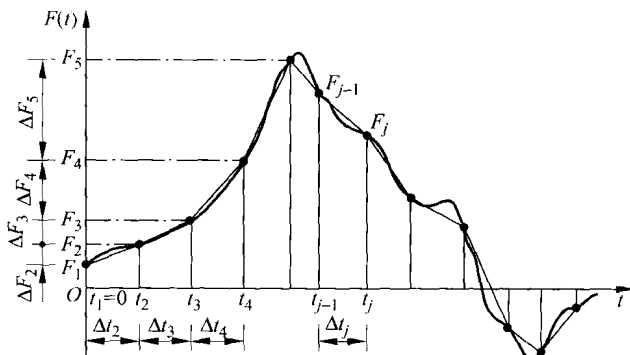


图 4.24 用分段线性函数来逼近激励函数

这里, $\Delta F_j = F_j - F_{j-1}$ 。令式(4.69)中的 $t=t_j$, 就可得到时间段 Δt_j 结束时系统的响应:

$$\begin{aligned}
 x_j = & \frac{\Delta F_j}{k \Delta t_j} \left[\Delta t_j - \frac{2\zeta}{\omega_n} + e^{-\zeta \omega_n \Delta t_j} \left\{ \frac{2\zeta}{\omega_n} \cos \omega_d \Delta t_j - \frac{\omega_d^2 - \zeta^2 \omega_n^2}{\omega_n^2 \omega_d} \sin \omega_d \Delta t_j \right\} \right] \\
 & + \frac{F_{j-1}}{k} \left[1 - e^{-\zeta \omega_n \Delta t_j} \left\{ \cos \omega_d \Delta t_j + \frac{\zeta \omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d \Delta t_j \right\} \right] \\
 & + e^{-\zeta \omega_n \Delta t_j} \left[x_{j-1} \cos \omega_d \Delta t_j + \frac{\dot{x}_{j-1} + \zeta \omega_n x_{j-1}}{\omega_d} \sin \omega_d \Delta t_j \right] \quad (4.70)
 \end{aligned}$$

将式(4.69)对 t 求导,并令 $t=t_j$,可得到时间段 Δt_j 结束时的速度 \dot{x}_j :

$$\begin{aligned}\dot{x}_j = & \frac{\Delta F_j}{k \Delta t_j} \left[1 - e^{-\zeta \omega_n \Delta t_j} \left\{ \cos \omega_d \Delta t_j + \frac{\zeta \omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d \Delta t_j \right\} \right] \\ & + \frac{F_{j-1}}{k} e^{-\zeta \omega_n \Delta t_j} \frac{\omega_n^2}{\omega_d} \sin \omega_d \Delta t_j + e^{-\zeta \omega_n \Delta t_j} \left[\dot{x}_{j-1} \cos \omega_d \Delta t_j \right. \\ & \left. - \frac{\zeta \omega_n}{\omega_d} \left(\dot{x}_{j-1} + \frac{\omega_n}{\zeta} x_{j-1} \right) \sin \omega_d \Delta t_j \right]\end{aligned}\quad (4.71)$$

式(4.70)和式(4.71)说明了第 j 个时间段结束时响应的递归关系。

例 4.17 已知弹簧-质量块-阻尼系统受到的激励为

$$F(t) = F_0 \left(1 - \sin \frac{\pi t}{2t_0} \right) \quad (\text{E. } 1)$$

应用数值方法求在时间段 $0 \leq t \leq t_0$ 内系统的响应。假设 $F_0 = 1, k = 1, m = 1, \zeta = 0.1$ 和 $t_0 = \tau_n/2$ 。这里, τ_n 表示系统的固有周期,由下式给出:

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{(k/m)^{1/2}} = 2\pi \quad (\text{E. } 2)$$

$t=0$ 处 x 和 \dot{x} 的值均为 0。

解: 图 4.25 是激励函数(E.1)。为了进行数值计算,时间段 $0 \sim t_0$ 被分为 10 段,即

$$\Delta t_i = \frac{t_0}{10} = \frac{\pi}{10}, \quad i = 2, 3, \dots, 11 \quad (\text{E. } 3)$$

用 4 种不同的方法来逼近激励函数 $F(t)$ 。图 4.26 中,用一系列起始于对应时间的矩形脉冲逼近 $F(t)$;图 4.27 中,使用相同的逼近方式,采用脉冲结束时的值;图 4.28 中,采用的是脉冲的中点值;图 4.29 中,将分段线性脉冲用于逼近激励函数 $F(t)$ 。表 4.1 列出了数值计算的结果。可以想象,由方法 1 和方法 2(图 4.26 和图 4.27)得到的结果分别高于或者低于正确结果,由方法 3 和方法 4(图 4.26 和图 4.27)得到的结果在 1 和 2 之间。此外,方法 4 得到的结果是最精确的。

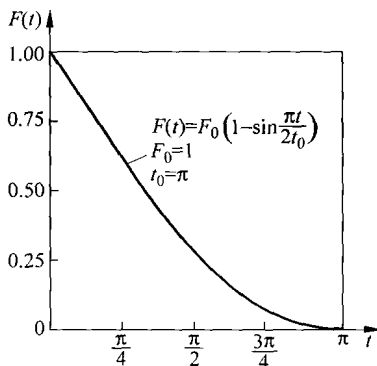


图 4.25 力函数

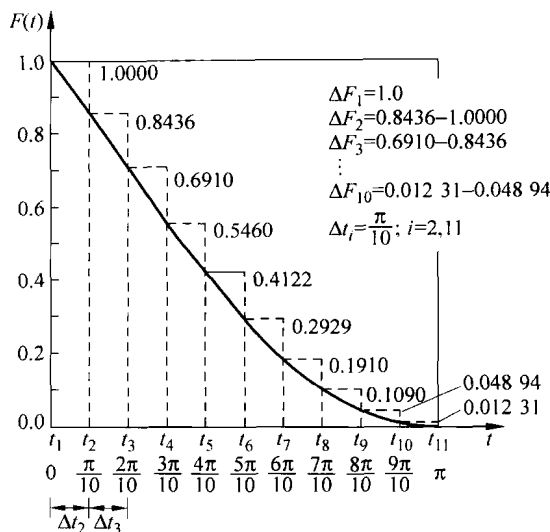


图 4.26 用一系列矩形脉冲近似力函数

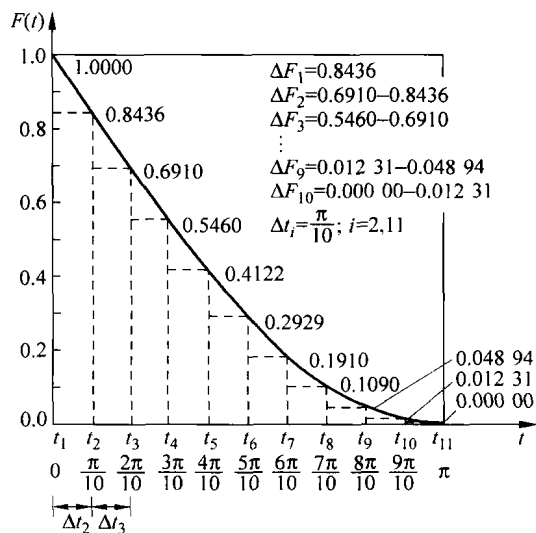


图 4.27 用一系列矩形脉冲近似力函数(数值不同)

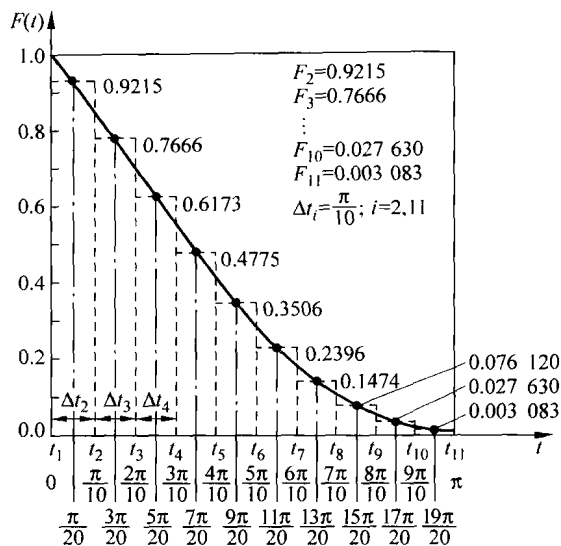


图 4.28 用时间步长中点的值作为矩形脉冲值

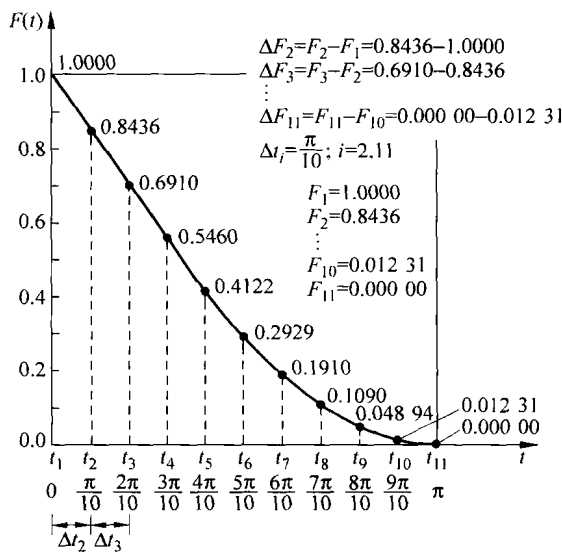


图 4.29 分段线性近似

表 4.1 不同近似下系统的响应

$x(t_i)$ 的取值根据					
i	t_i	图 4.26 (理想值 1)	图 4.27 (理想值 2)	图 4.28 (理想值 3)	图 4.29 (理想值 4)
1	0	0.000 00	0.000 00	0.000 00	0.000 00
2	0.1π	0.047 94	0.040 44	0.044 17	0.045 41
3	0.2π	0.175 78	0.147 29	0.161 47	0.163 77
4	0.3π	0.351 88	0.292 28	0.321 90	0.324 99
5	0.4π	0.542 48	0.446 09	0.493 92	0.497 46
6	0.5π	0.715 40	0.581 60	0.647 90	0.651 51
7	0.6π	0.843 30	0.676 59	0.759 06	0.762 38
8	0.7π	0.906 30	0.715 78	0.809 86	0.812 55
9	0.8π	0.893 67	0.692 14	0.791 42	0.793 23
10	0.9π	0.804 49	0.607 17	0.704 03	0.704 82
11	π	0.647 30	0.471 52	0.556 72	0.556 47

4.9 利用 MATLAB 求解的例子

例 4.18 绘制例 4.2 中讨论的黏性阻尼系统对简谐基础激励的响应随时间变化的曲线。

解：例 4.2 中的式(E.8)给出的响应为

$$x(t) = 0.488\,695e^{-t}\cos(19.975t - 1.529\,683) + 0.001\,333\cos(5t - 0.026\,66) + 0.053\,314\sin(5t - 0.026\,66)$$

应用 MATLAB 画上述方程对应曲线的程序如下：

```
%Ex4_18.m
for i=1:1001
    t(i)=(i-1)*10/1000;
    x(i)=0.488695*exp(-t(i))*cos(19.975*t(i)-1.529683)+...
        0.001333*cos(5*t(i)-0.02666)+0.053314*sin(5*t(i)
        -0.02666);
end
plot(t,x);
xlabel('t');
ylabel('x(t)');
```

所绘曲线如图 4.30 所示。

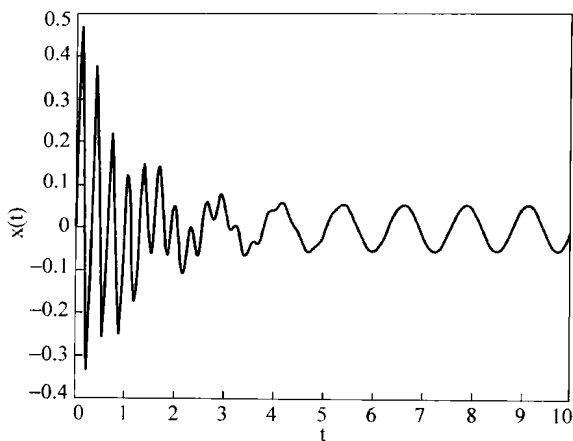


图 4.30 例 4.18 图

例 4.19 应用 MATLAB,画单自由度结构系统的脉冲响应曲线。假设结构受例 4.4 和例 4.5 中提到的单冲击和双冲击作用。

解: 结构受单冲击和双冲击的脉冲响应由例 4.4 和例 4.5 中的方程(E.1)和方程(E.3)给出,分别是

$$x(t) = 0.20025e^{-t}\sin 19.975t \quad (\text{E.1})$$

$$x(t) = \begin{cases} 0.20025e^{-t}\sin 19.975t, & 0 \leq t \leq 0.2 \\ 0.20025e^{-t}\sin 19.975t + 0.100125e^{-(t-0.2)}\sin 19.975(t-0.2), & t \geq 0.2 \end{cases} \quad (\text{E.2})$$

应用 MATLAB 画方程(E.1)和方程(E.3)对应曲线的程序如下:

```
%Ex4_19.m
for i=1:1001
    t(i)=(i-1)*5/1000;
    x1(i)=0.20025*exp(-t(i))*sin(19.975*t(i));
    if t(i)>0.2
        a=0.100125;
    else
        a=0.0;
    end
    x2(i)=0.20025*exp(-t(i))*sin(19.975*t(i))+ ...
        a*exp(-(t(i)-0.2))*sin(19.975*(t(i)-0.2));
end
plot(t,x1);
```

```

gtext('Eq.(E.1):solid line');
hold on;
plot(t,x2,'-');
gtext('Eq.(E.2):dashed line');
xlabel('t');

```

所绘曲线如图 4.31 所示。

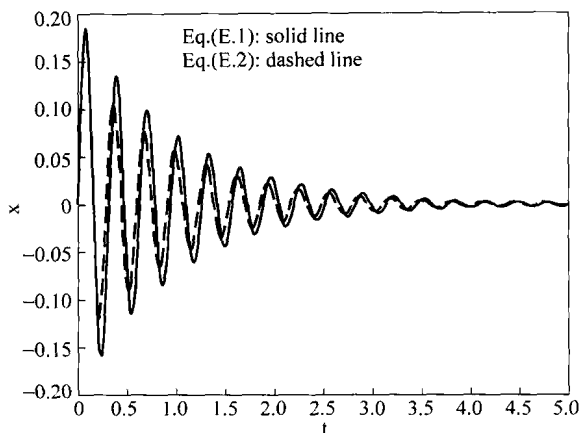


图 4.31 例 4.19 图

例 4.20 编写一个命名为 Program4.m 的通用 MATLAB 程序,以绘制单自由度黏性阻尼系统在周期力作用下的稳态响应曲线。系统参数如下: $m=100\text{ kg}$, $k=10^5\text{ N/m}$, $\zeta=0.1$, 周期力的形式如图所示。

解: Program4.m 被发展为可以接受 n 段离散时间值的周期力的值。程序输入的数值如下:

xm——系统的规模

xk——系统的刚度

xai——阻尼比 ζ

n——数值已知的力 $F(t)$ 等比例点的数目

m——解答中傅里叶参数的数目

time——函数 $F(t)$ 的时间域

f——包含已知力 $F(t)$ 的空间 n 的列阵; $f(i)=F(t_i)$, $i=1,2,\dots,n$

t——包含已知离散时间值 t 的空间 n 的列阵; $t(i)=t_i$, $i=1,2,\dots,n$

该程序的输出结果如下:

步数 i, t(i), f(i), x(i)

这里, $x(i) = x(t=t_i)$ 是在时间步 i 处的响应。这个程序也能画出 x 随时间的变化。所绘曲线如图 4.32(b) 所示。

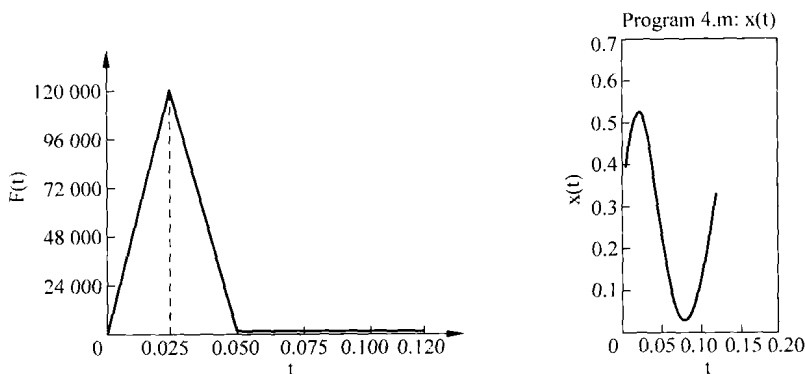


图 4.32 例 4.20 图

(a) 周期力; (b) 响应曲线

例 4.21 编写一个命名为 Program5.m 的通用 MATLAB 程序, 利用 4.8 节中介绍的方法绘制例 4.17 中单自由度黏性阻尼系统的响应曲线。

解: 程序 Program5.m 运行后需要输入任意力函数的 n 个离散值以及如下数据:

n —— 力函数值已知的离散时间的数目

t —— 力函数值已知的 n 维时间列阵

f —— 在不同离散时间处的 n 维力函数值列阵, 按图 4.22 确定 (也可按例 4.17 中的图 4.26 或图 4.27 确定)

ff —— 在不同离散时间处的 n 维力函数值列阵, 按图 4.24 确定 (也可按例 4.17 中的图 4.28 或图 4.29 确定)

xai —— 阻尼比 ζ

omn —— 系统的无阻尼固有频率

delt —— 连续时间点间的累加时间

xk —— 弹簧刚度

这个程序给出下列输出: 时间点 i 、由方法 1 (图 4.26 和图 4.27) 得到的 $x(i)$ 、由方法 2 (图 4.28) 得到的 $x(i)$ 、由方法 3 (图 4.29) 得到的 $x(i)$, 如图 4.33 所示。这里的 $x(i)$ 是系统在离散时间点 i 处的响应。这个程序也能画出根据不同方法得到的 x 随时间变化的曲线。

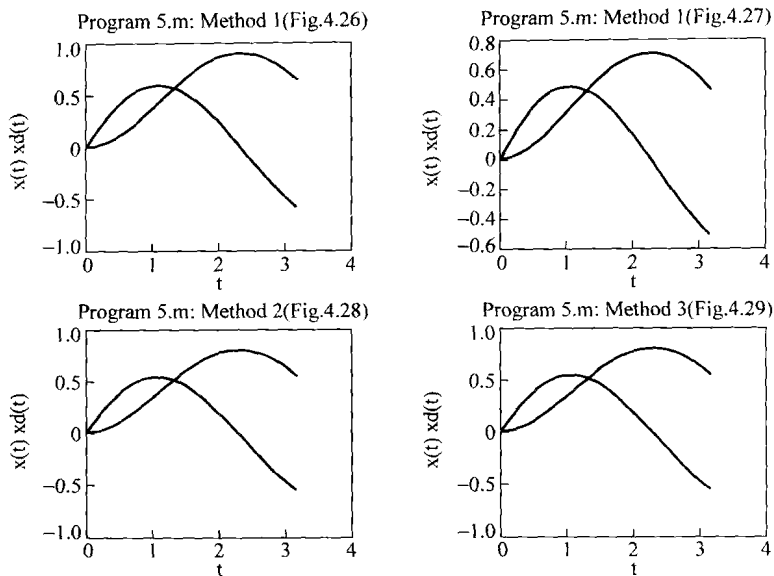


图 4.33 例 4.21 图

4.10 C++ 程序

可以利用交互式的 C++ 程序研究有阻尼的振子在周期性外力或任意激励下的动态响应。

例 4.22 编写一个名为 Program4.m 的 C++ 程序求例 4.20 中单自由度黏性阻尼系统在周期力作用下的稳态响应。

解：数据的键入是交互式的，程序执行后的结果如下：

```
Please input n and m:
```

```
24
```

```
20
```

```
Please input xm,xk,xai,time:
```

```
100.0 100000.0 0.1 0.12
```

```
Please input f[i]:i=0,1,...,n-1
```

```
24000.0
```

```
48000.0
```

```
72000.0
```

```
96000.0
```

```
120000.0
```

```
96000.0
```

[illegible]

RESPONSE OF A SINGLE D.O.F SYSTEM UNDER PERIODIC FORCE

$X_M = 100$

XK=100000

$$XAI = 0.1$$

N= 24

M= 20

TIME= 0.12

APPLIED FORCE RESPONSE

I	T (I)	F (I)	X (I)
0	0.00500000	24000.00000000	0.39311979
1	0.01000000	48000.00000000	0.45115592
2	0.01500000	72000.00000000	0.49675477
3	0.02000000	96000.00000000	0.52336489
4	0.02500000	120000.00000000	0.52511284
5	0.03000000	96000.00000000	0.49745120
6	0.03500000	72000.00000000	0.44728028
7	0.04000000	48000.00000000	0.38235024
8	0.04500000	24000.00000000	0.31053464
9	0.05000000	0.00000000	0.23964565
10	0.05500000	0.00000000	0.17698370
11	0.06000000	0.00000000	0.12413921
12	0.06500000	0.00000000	0.08215259

13	0.07000000	0.00000000	0.05174979
14	0.07500000	0.00000000	0.03332517
15	0.08000000	0.00000000	0.02694470
16	0.08500000	0.00000000	0.03236967
17	0.09000000	0.00000000	0.04908952
18	0.09500000	0.00000000	0.07635072
19	0.10000000	0.00000000	0.11317605
20	0.10500000	0.00000000	0.15837841
21	0.11000000	0.00000000	0.21058025
22	0.11500000	0.00000000	0.26824905
23	0.12000000	0.00000000	0.32974721

例 4.23 编写一个名为 Program5. cpp 的 C++ 程序,利用 4.8 节中所述方法求例 4. 17 中的黏性阻尼弹簧-质量系统的稳态响应。程序中参数的输入和输出与例 4. 21 中的 MATLAB 程序 Program5. m 相类似。

解: 数据的键入是交互式的,程序的执行结果如下:

VALUE	METHOD #1	METHOD #1	METHOD #2	METHOD #3
OF	(FIG.4.26)	(FIG.4.27)	(FIG.4.28)	(FIG.4.29)
I	X(I)	X(I)	X(I)	X(I)
1	0.047936	0.040437	0.044175	0.045415
2	0.175781	0.147295	0.161471	0.163773
3	0.351883	0.292278	0.321877	0.324989
4	0.542483	0.446091	0.493842	0.497464
5	0.715396	0.581603	0.647699	0.651514
6	0.843296	0.676586	0.758676	0.762379
7	0.906301	0.715783	0.809225	0.812552
8	0.893674	0.692145	0.790486	0.793232
9	0.804490	0.607167	0.702788	0.704821
10	0.647299	0.469170	0.555199	0.556465
I	XD(I)	XD(I)	XD(I)	XD(I)
1	0.298008	0.251389	0.276010	0.275640
2	0.502976	0.418148	0.462605	0.461687
3	0.602270	0.491876	0.549249	0.547683
4	0.595174	0.474576	0.536630	0.534405
5	0.492171	0.377744	0.435845	0.433036
6	0.313187	0.220601	0.266613	0.263378
7	0.085019	0.027665	0.054767	0.051327
8	-0.161754	-0.174042	-0.170711	-0.174093
9	-0.396047	-0.357870	-0.380784	-0.383830
10	-0.589414	-0.507466	-0.549290	-0.551730

4.11 Fortran 程序

还可以利用 Fortran 程序研究有阻尼的单自由度系统在周期性外力或任意激励下的动态响应。程序中的变量与例 4.20 中的 Program4.m 是类似的。

例 4.24 编写一个命名为 PERIOD.F 的 Fortran 子程序求例 4.20 中黏性阻尼弹簧-质量系统的稳态响应。

解：调用子程序 PERIOD.F 的主程序名为 PROGRAM4.F, 程序的执行结果如下：

RESPONSE OF A SINGLE D.O.F SYSTEM UNDER PERIODIC FORCE

XM= 0.100000E+ 03

XK= 0.100000E+ 06

XAI= 0.100000E+ 00

N= 24

M= 20

TIME= 0.120000E+ 00

APPLIED FORCE AND RESPONSE

I	T(I)	F(I)	X(I)
1	0.500000E- 02	0.240000E+ 05	0.393120E+ 00
2	0.100000E- 01	0.480000E+ 05	0.451156E+ 00
3	0.150000E- 01	0.720000E+ 05	0.496755E+ 00
4	0.200000E- 01	0.960000E+ 05	0.523365E+ 00
5	0.250000E- 01	0.120000E+ 06	0.525113E+ 00
6	0.300000E- 01	0.960000E+ 05	0.497451E+ 00
7	0.350000E- 01	0.720000E+ 05	0.447280E+ 00
8	0.400000E- 01	0.480000E+ 05	0.382350E+ 00
9	0.450000E- 01	0.240000E+ 05	0.310534E+ 00
10	0.500000E- 01	0.000000E+ 00	0.239646E+ 00
11	0.550000E- 01	0.000000E+ 00	0.176984E+ 00
12	0.600000E- 01	0.000000E+ 00	0.124139E+ 00
13	0.650000E- 01	0.000000E+ 00	0.821526E- 01
14	0.700000E- 01	0.000000E+ 00	0.517498E- 01
15	0.750000E- 01	0.000000E+ 00	0.333252E- 01
16	0.800000E- 01	0.000000E+ 00	0.269447E- 01
17	0.850000E- 01	0.000000E+ 00	0.323697E- 01
18	0.900000E- 01	0.000000E+ 00	0.490896E- 01
19	0.950000E- 01	0.000000E+ 00	0.763507E- 01
20	0.100000E+ 00	0.000000E+ 00	0.113176E+ 00
21	0.105000E+ 00	0.000000E+ 00	0.158378E+ 00

22	0.110000E+00	0.000000E+00	0.210580E+00
23	0.115000E+00	0.000000E+00	0.268249E+00
24	0.120000E+00	0.000000E+00	0.329747E+00

例 4.25 编写一个命名为 PROGRAM5.F 的 Fortran 程序,利用 4.8 节中所述方法求例 4.17 中黏性阻尼单自由度系统的稳态响应。程序中的变量与例 4.21 中的 MATLAB 程序 Program5.m 相类似。

解：程序执行后的输出如下：

VALUE	METHOD # 1	METHOD # 1	METHOD # 2	METHOD # 3
OF	(FIG.4.26)	(FIG.4.27)	(FIG.4.28)	(FIG.4.29)
I	X(I)	X(I)	X(I)	X(I)
2	0.479360E-01	0.404372E-01	0.441750E-01	0.454151E-01
3	0.175781E+00	0.147294E+00	0.161471E+00	0.163773E+00
4	0.351883E+00	0.292277E+00	0.321896E+00	0.324989E+00
5	0.542483E+00	0.446091E+00	0.493921E+00	0.497464E+00
6	0.715396E+00	0.581603E+00	0.647897E+00	0.651514E+00
7	0.843296E+00	0.676586E+00	0.759062E+00	0.762379E+00
8	0.906301E+00	0.715783E+00	0.809863E+00	0.812552E+00
9	0.893674E+00	0.692145E+00	0.791421E+00	0.793231E+00
10	0.804490E+00	0.607167E+00	0.704031E+00	0.704820E+00
11	0.647299E+00	0.469170E+00	0.556719E+00	0.556465E+00
I	XD(I)	XD(I)	XD(I)	XD(I)
2	0.298008E+00	0.251389E+00	0.276010E+00	0.275640E+00
3	0.502976E+00	0.418148E+00	0.462668E+00	0.461687E+00
4	0.602270E+00	0.491876E+00	0.549451E+00	0.547683E+00
5	0.595174E+00	0.474576E+00	0.537041E+00	0.534405E+00
6	0.492171E+00	0.377744E+00	0.436504E+00	0.433036E+00
7	0.313187E+00	0.220601E+00	0.267517E+00	0.263378E+00
8	0.850188E-01	0.276649E-01	0.558601E-01	0.513272E-01
9	-0.161754E+00	-0.174042E+00	-0.169532E+00	-0.174093E+00
10	-0.396047E+00	-0.357870E+00	-0.379660E+00	-0.383830E+00
11	-0.589414E+00	-0.507466E+00	-0.548380E+00	-0.551730E+00

参 考 文 献

4.1 S. S. Rao, *Applied Numerical Methods for Engineers and Scientists*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2002.

4.2 M. Paz, *Sturctural Dynamics: Theory and Computation* (2nd ed.), Van Nostrand Reinhold, New York, 1985.

- 4.3 E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics* (7th ed.), Wiley, New York, 1993.
- 4.4 F. Oberhettinger and L. Badii, *Tables of Laplace Transforms*, Springer Verlag, New York, 1973.
- 4.5 G. M. Hieber et al., "Understanding and measuring the shock response spectrum. Part I," *Sound and Vibration*, Vol. 8, March 1974, pp. 42-49.
- 4.6 R. E. D. Bishop, A. G. Parkinson, and J. W. Pendered, "Linear analysis of transient vibration," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 9, 1969, pp. 313-337.
- 4.7 Y. Matsuzaki and S. Kibe, "Shock and seismic response spectra in design problems," *Shock and Vibration Digest*, Vol. 15, October 1983, pp. 3-10.
- 4.8 S. Timoshenko, D. H. Young, and W. Weaver, Jr., *Vibration Problems in Engineering* (4th ed.), Wiley, New York, 1974.
- 4.9 R. A. Spinelli, "Numerical inversion of a Laplace transform," *SIAM Journal of Numerical Analysis*, Vol. 3, 1966, pp. 636-649.
- 4.10 R. Bellman, R. E. Kalaba, and J. A. Lockett, *Numerical Inversion of the Laplace Transform*, American Elsevier, New York, 1966.
- 4.11 S. G. Kelly, *Fundamentals of Mechanical Vibrations*, McGraw-Hill, New York, 1993.
- 4.12 P-T. D. Spanos, "Digital synthesis of response-design spectrum compatible earthquake records for dynamic analyses," *Shock and Vibration Digest*, Vol. 15, No. 3, March 1983, pp. 21-30.

思 考 题

4.1 简答题

1. 在周期激励作用下,把几个谐响应的总和作为系统响应的理论基础是什么?
2. 简要列举一些求系统受非周期力作用时响应的方法。
3. 什么是杜哈美(Duhamel)积分?有什么用途?
4. 在 $t=0$ 时受到一个脉冲激励作用的单自由度系统的初始条件怎样确定?
5. 推导系统受基础运动激励时的运动微分方程。
6. 什么是响应谱?
7. 拉普拉斯变换法的优点是什么?
8. 伪速度谱的作用是什么?
9. 函数 $x(t)$ 的拉普拉斯变换是怎样定义的?
10. 如何定义系统的广义阻抗和导纳?
11. 简述可以用来近似任意力函数的插值模型。
12. 当外力不是简谐力时有多少个共振条件?
13. 怎样计算周期激励中第一阶谐波的频率?
14. 周期激励的第一阶谐波的频率和高阶谐波频率之间是什么关系?

4.2 判断题

1. 动量的改变称为脉冲。

()

2. 对几个基本冲量的响应求和能得到系统在任意力作用下的响应。 ()
3. 基础运动激励下系统的响应谱在机械抗振设计中是非常有用的。 ()
4. 有些周期函数不能用一些简谐函数的和来代替。 ()
5. 系统的响应中谐波阶数越高振幅越小。 ()
6. 在拉普拉斯变换中会自动考虑初始条件。 ()
7. 即使激励力是非周期的,运动微分方程也能进行数值积分。 ()
8. 响应谱给出所有可能单自由度系统中的最大响应。 ()
9. 对于一个简谐振子,加速度谱和位移谱可由速度谱得到。 ()

4.3 填空题

1. 线性系统在任意周期力作用下的响应可以通过对合适的谐波响应_____得到。
2. 任何非周期函数都可以用_____积分表示。
3. 冲击力的特点是数值很大,但作用时间很_____。
4. 单位_____作用下单自由度系统的响应称为脉冲响应函数。
5. 杜哈美积分也称为_____积分。
6. 单自由度系统的最大响应随其固有频率的变化称为_____谱。
7. 应用_____积分可以求出系统的瞬态响应。
8. 振动问题的全解由_____态解和瞬态解组成。
9. 拉普拉斯变换将微分方程转换为_____方程。
10. 传递函数是广义阻抗的_____。
11. 冲量的大小可由系统_____的改变来确定。
12. 杜哈美积分是基于系统_____响应函数得到的。
13. 杜哈美积分可以用来求任意激励作用下_____单自由度系统的响应。
14. 根据加速度谱得到的速度响应谱也称为_____谱。
15. 任意的周期力函数都可以展开成_____级数的形式。

4.4 选择题

1. 瞬态解是由_____引起的。
(a) 力函数 (b) 初始条件 (c) 边界条件
2. 如果对系统突然施加一非周期力,该响应将是_____。
(a) 周期的 (b) 瞬态的 (c) 稳态的
3. 初始条件用来求解_____。
(a) 稳态解 (b) 瞬态解 (c) 全解
4. 加速度谱 S_a 可由位移谱 S_d 表示为_____。
(a) $S_a = -\omega_n^2 S_d$ (b) $S_a = \omega_n S_d$ (c) $S_a = \omega_n^2 S_d$

5. 虚谱与_____相对应。
 (a) 虚加速度 (b) 虚速度 (c) 虚位移
6. 当函数 $f(t)$ 的值是_____时,可以利用数值方法得到傅里叶系数。
 (a) 解析形式 (b) 离散时间 t 处的值 (c) 复杂方程的形式
7. 在基础运动 $y(t)$ 激励下单自由度系统的响应可以由外力确定,其形式为_____。
 (a) $-m\ddot{y}$ (b) $m\ddot{y}$ (c) $m\ddot{y} + c\dot{y} + ky$
8. 响应谱被广泛应用于_____。
 (a) 大的活载荷作用下的建筑物设计 (b) 抗震设计
 (c) 机械的疲劳设计
9. 在基础运动 $y(t)$ 激励下,系统的运动微分方程为_____。
 (a) $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{y}$
 (b) $m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y}; z = x - y$
 (c) $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{z}; z = x - y$
10. 在拉普拉斯变换中,函数 e^{-st} 称为_____。
 (a) 积分核 (b) 被积函数 (c) 辅助项
11. $x(t)$ 的拉普拉斯变换定义为_____。
 (a) $x(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt$ (b) $\bar{x}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt$
 (c) $\bar{x}(s) = \int_0^{\infty} e^{st} x(t) dt$

4.5 连线题

- | | |
|--|---------------------------|
| 1. $x(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t$ | (a) $\bar{x}(s)$ 的拉普拉斯逆变换 |
| 2. $x(t) = \int_0^t F(\tau) g(t-\tau) d\tau$ | (b) 广义阻抗函数 |
| 3. $x(t) = \mathcal{L}^{-1} \bar{Y}(s) \bar{F}(s)$ | (c) 单位脉冲响应函数 |
| 4. $\bar{Y}(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$ | (d) 拉普拉斯变换 |
| 5. $z(s) = ms^2 + cs + k$ | (e) 卷积积分 |
| 6. $\bar{x}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt$ | (f) 导纳函数 |

习 题

- 4.1 求出图 4.1(a) 所示液压控制阀的稳态响应,作用在其上的力函数如图 1.81 所示。注意将 $x(t)$ 替换为 $F(t)$, A 替换为 F_0 。

- 4.2 求出图 4.1(a) 所示液压控制阀的稳态响应, 作用在其上的力函数如图 1.82 所示。注意将 $x(t)$ 替换为 $F(t)$, A 替换为 F_0 。
- 4.3 求出图 4.1(a) 所示液压控制阀的稳态响应, 作用在其上的力函数如图 1.83 所示。注意将 $x(t)$ 替换为 $F(t)$, A 替换为 F_0 。
- 4.4 求出图 4.1(a) 所示液压控制阀的稳态响应, 作用在其上的力函数如图 1.84 所示。注意将 $x(t)$ 替换为 $F(t)$, A 替换为 F_0 。
- 4.5 求出单自由度黏性阻尼系统的稳态响应, 作用在其上的力函数如图 1.36(a) 所示。注意将 $x(t)$ 和 A 分别替换为 $F(t)$ 和 F_0 。
- 4.6 在稳定运行条件下, 固定在轴上的从动齿轮的扭转振动 (见图 4.34) 由下列方程控制:

$$J_0 \ddot{\theta} + k_t \theta = M_t$$

这里, k_t 是从动轴的扭转刚度; M_t 是传递的扭矩; J_0 是转动惯量; θ 是从动齿轮的角变形。如果主动齿轮 (共 16 齿) 的一个轮齿发生了损坏, 求从动齿轮的扭转振动。数据如下:

从动齿轮的 $J_0 = 0.1 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$, 转速 1000 r/min; 从动轴为钢质, 横截面直径为 5 cm, 长为 1 m, $M_{t0} = 1000 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。

- 4.7 一曲柄滑块机构用来产生弹簧-质量-阻尼系统基础的运动, 如图 4.35 所示。若将 $y(t)$ 近似为一系列谐波函数, 求质量块的响应。系统参数如下: $m = 1 \text{ kg}$, $c = 10 \text{ N} \cdot \text{s/m}$, $k = 100 \text{ N/m}$, $r = 10 \text{ cm}$, $l = 1 \text{ m}$, $\omega = 100 \text{ rad/s}$ 。
- 4.8 弹簧-质量-阻尼系统的基础作如图 4.36 所示的周期运动, 应用叠加原理确定质量块的响应。

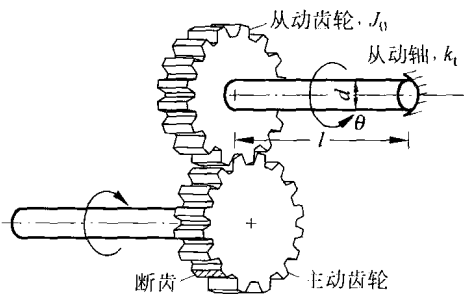


图 4.34 习题 4.6 图

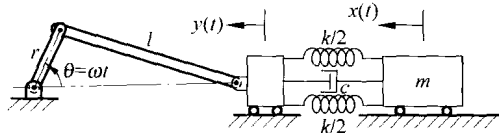


图 4.35 习题 4.7 图

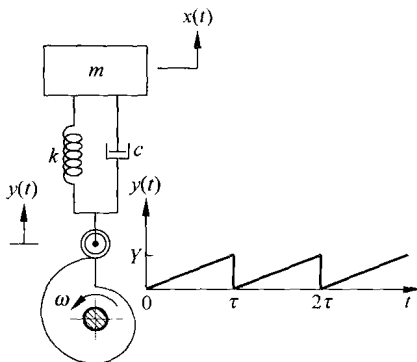


图 4.36 习题 4.8 图

- 4.9 如图 4.37 所示,一个具有库仑阻尼的弹簧-质量系统,左边与一个曲柄滑块机构相连,试确定系统的响应。其中,质量块和接触面间的摩擦系数为 μ , $y(t)$ 近似为一系列谐波函数, $m=1\text{ kg}$, $k=100\text{ N/m}$, $r=10\text{ cm}$, $l=1\text{ m}$, $\mu=0.1$, $\omega=100\text{ rad/s}$ 。并讨论所给解的局限性。
- 4.10 如图 4.38 所示,一个转动凸轮用来给一个弹簧-质量系统的支承提供周期性的运动。如果质量块与接触面间的摩擦系数为 μ ,应用叠加原理确定系统的响应,并讨论结果的有效性。

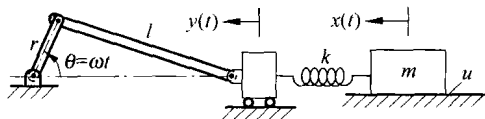


图 4.37 习题 4.9 图

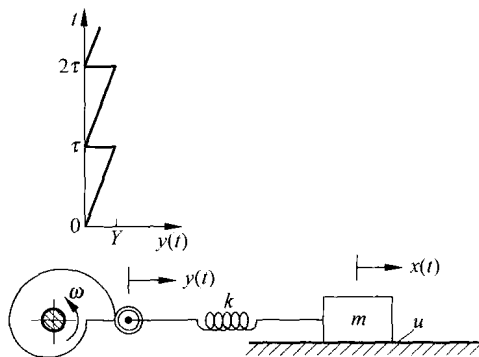


图 4.38 习题 4.10 图

- 4.11 求单自由度黏性阻尼系统的全响应。已知系统受到基础激励的作用,相应数据如下: $m=10\text{ kg}$, $c=20\text{ N} \cdot \text{s/m}$, $k=4000\text{ N/m}$, $y(t)=0.05\cos 5t\text{ m}$, $x_0=0.1\text{ m}$, $\dot{x}_0=1\text{ m/s}$ 。
- 4.12 单自由度黏性阻尼系统受如图 1.86 所示周期性载荷的作用,求系统响应。已知 $m=1\text{ kg}$, $k=15\text{ kN/m}$, $\zeta=0.1$ 。
- 4.13 求黏性阻尼系统在习题 1.74 中所述周期力作用下的响应。假定 M_i 表示在 t_i 时刻的力的大小,单位为 N。其他参数如下: $m=0.5\text{ kg}$, $k=8000\text{ N/m}$, $\zeta=0.06$ 。
- 4.14 利用 4.3 节中的数值方法,求图 4.39(a)中水塔在图 4.39(b)所示周期力作用下的位移。将水塔看作一个无阻尼单自由度系统。

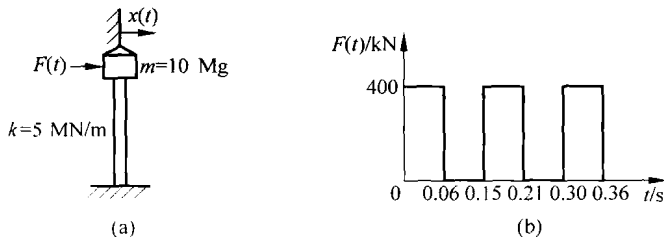


图 4.39 习题 4.14 图

- 4.15 喷砂的过程是将细砂构成喷射流直接喷射到铸件表面,从而达到清洁铸件表面的目的。某喷砂装置是将质量为 m 的铸件固定在如图 4.40(a) 所示的刚度为 k 的弹性支承上。如果喷砂过程中施加在铸件表面上的力随时间的变化如图 4.40(b) 所示,求铸件的响应。

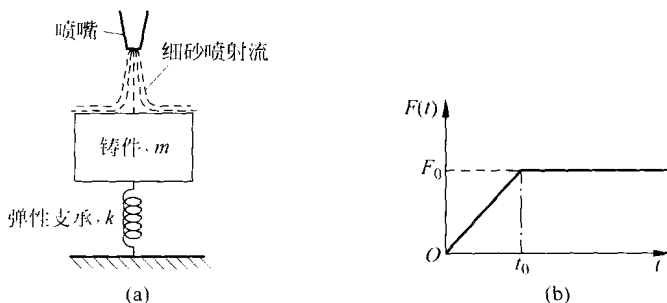


图 4.40 习题 4.15 图

- 4.16 如图 4.41(a) 所示,设框架、砧座、锻锤底座的总质量为 m ,弹性支承垫的刚度为 k ,由锻锤施加的力如图 4.41(b) 所示,求砧座的响应。

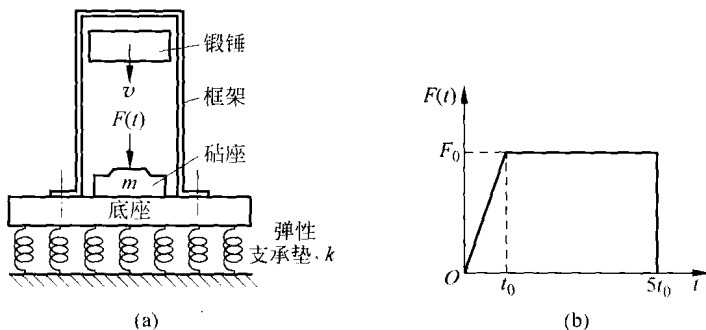


图 4.41 习题 4.16 图

- 4.17 求出在力函数 $F(t) = F_0 e^{-\alpha t}$ 作用下单自由度阻尼系统的位移,这里 α 是常量。
- 4.18 如图 4.42(a) 所示,压缩空气瓶和一个弹簧-质量系统相连。阀门开启后作用在活塞上的压力 $p(t)$ 的变化如图 4.42(b) 所示。根据下列数据求活塞的响应: $m = 10 \text{ kg}$, $k = 1000 \text{ N/m}$, $d = 0.1 \text{ m}$ 。
- 4.19 求当 $t > \omega/\pi$ 时无阻尼弹簧-质量系统的瞬态响应,质量块的受力为

$$F(t) = \begin{cases} \frac{F_0}{2}(1 - \cos \omega t), & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega} \\ F_0, & t > \frac{\pi}{\omega} \end{cases}$$

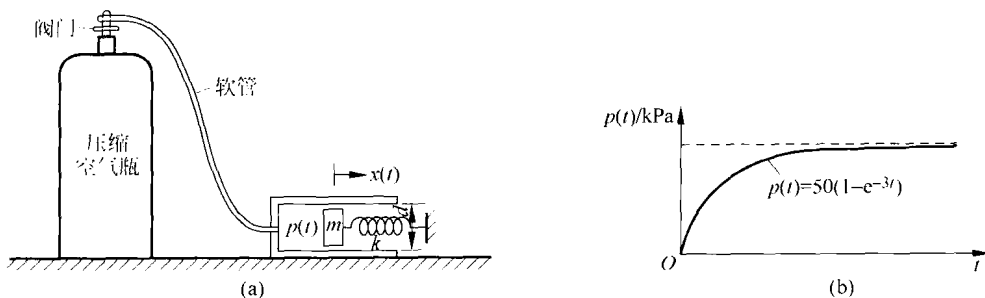


图 4.42 习题 4.18 图

假设质量块的位移和速度在 $t=0$ 时为零。

- 4.20 利用杜哈美积分推导在图 4.43(a)所示的力函数作用下,无阻尼系统响应的表达式。

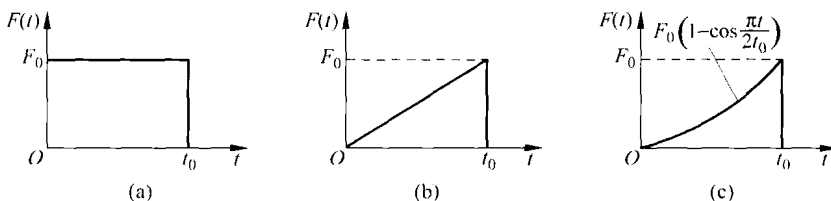


图 4.43 习题 4.20~习题 4.22 图

- 4.21 利用杜哈美积分推导在图 4.43(b)所示的力函数作用下,无阻尼系统响应的表达式。

- 4.22 利用杜哈美积分推导在图 4.43(c)所示的力函数作用下,无阻尼系统响应的表达式。

- 4.23 图 4.44 所示为一在水平方向行驶的摩托车的单自由度模型。试求当车辆通过一个路面凸起时,它的相对位移。该凸起的函数表达为 $y(s) = Y \sin \pi s / \delta$ 。

- 4.24 如图 4.45 所示,一辆在水平方向以速度 v 匀速行驶的车辆经过一个三角形的路面凸起。把该车辆看成是一个无阻尼弹簧-质量系统,求其在垂直方向的响应。

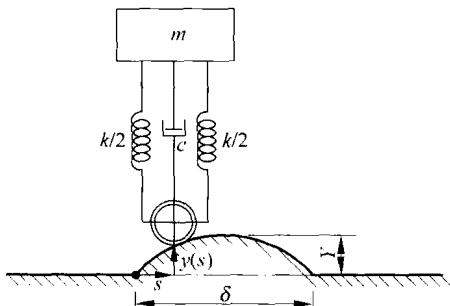


图 4.44 习题 4.23 图

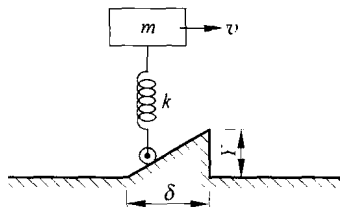


图 4.45 习题 4.24 图

- 4.25 一辆汽车的质量为 1000 kg, 通过一个如图 4.46 所示的路障。汽车的速度为 50 km/h。如果其在垂直方向无阻尼振动的固有周期是 1.0 s, 试求汽车的响应。假设汽车在垂直方向振动时是一个单自由度无阻尼系统。
- 4.26 一台质量为 m 的可携式摄像机置于一个用柔性材料做成的包装箱内。包装材料的刚度和黏性常数分别由 k 和 c 给出, 并且包装箱的质量可以忽略不计。如果包装箱偶然从高 h 处掉落到刚性地面上(如图 4.47 所示), 试求摄像机的运动。

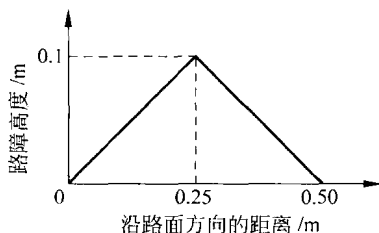


图 4.46 习题 4.25 图

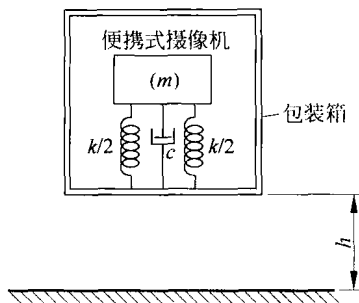


图 4.47 习题 4.26 图

- 4.27 一架在跑道上滑行的飞机遇到了一个障碍后, 引起的机翼根部位移可表示为

$$y(t) = \begin{cases} Y(t^2/t_0^2), & 0 \leq t \leq t_0 \\ 0, & t > t_0 \end{cases}$$

如果机翼的刚度为 k , 求位于机翼端部的质量块的响应(见图 4.48)。

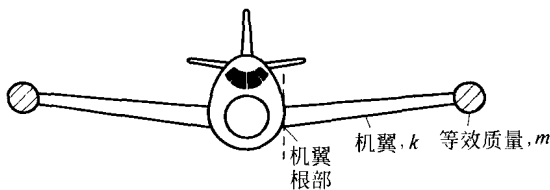


图 4.48 习题 4.27 图

- 4.28 推导例 4.9 中的式(E.1)。
- 4.29 在火箭的静态点火实验中, 将火箭通过弹簧-阻尼系统固定在刚性墙上, 如图 4.49(a) 所示。作用在火箭上的推力在一个极短的时间内达到其最大值 F , 此后保持为一常量, 直到燃料燃尽, 如图 4.49(b) 所示。作用在火箭上的推力可由 $F = m_0 v$ 得到, 这里 m_0 是燃料燃烧的速率, v 是喷射气流的速度。火箭的初始质量是 M , 所以在任意时刻 t 它的质量为 $m = M - m_0 t, 0 \leq t \leq t_0$ 。如果其他参数为 $k = 7.5 \times 10^6$ N/m, $c = 0.1 \times 10^6$ N · s/m, $m_0 = 10$ kg/s, $v = 2000$ m/s, $M = 2000$ kg, $t_0 = 100$ s。(a) 推导火箭的运动微分方程; (b) 假定火箭的平均质量(恒定)为 $\left(M - \frac{1}{2} m_0 t_0\right)$, 求火箭的最

大稳态位移。

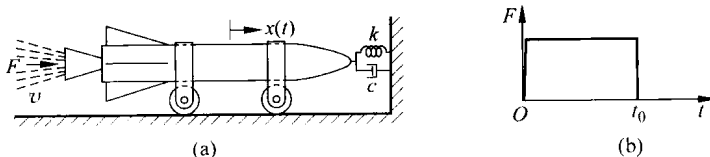


图 4.49 习题 4.29 图

- 4.30 证明单位阶跃函数 $h(t)$ (如图 4.7(b) 所示, 其中 $F_0=1$) 作用下单自由度系统的响应与如式 (4.27) 所示的脉冲响应函数 $g(t)$ 之间的关系为

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}$$

- 4.31 证明式 (4.33) 所示的卷积积分, 也可以利用单位阶跃函数表示为

$$x(t) = F(0)h(t) + \int_0^t \frac{dF(\tau)}{d\tau} h(t-\tau) d\tau$$

- 4.32 用卷积积分求图 4.50 中刚性杆的响应。其中, $k_1=k_2=5000 \text{ N/m}$, $a=0.25 \text{ m}$, $b=0.5 \text{ m}$, $l=1.0 \text{ m}$, $M=50 \text{ kg}$, $m=10 \text{ kg}$, $F_0=500 \text{ N}$ 。
- 4.33 用卷积积分求图 4.51 中刚性杆的响应, 其中 $k=5000 \text{ N/m}$, $l=1 \text{ m}$, $m=10 \text{ kg}$, $M_0=100 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。

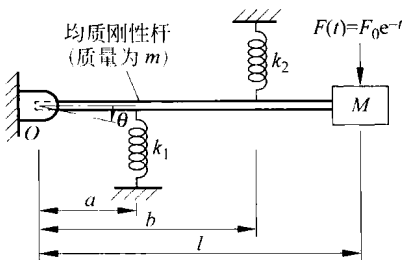


图 4.50 习题 4.32 图

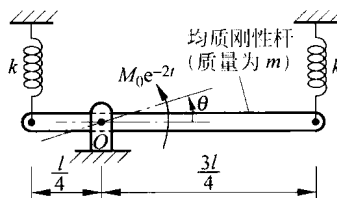


图 4.51 习题 4.33 图

- 4.34 用卷积积分求图 4.52 中刚性杆的响应, 设弹簧 PQ 的 P 端位移为 $x(t)=x_0e^{-t}$, $k=5000 \text{ N/m}$, $l=1 \text{ m}$, $m=10 \text{ kg}$, $x_0=1 \text{ cm}$ 。
- 4.35 用卷积积分求图 4.53 中质量块在力 $F(t)=F_0e^{-t}$ 作用下的响应。其中, $k_1=1000 \text{ N/m}$, $k_2=500 \text{ N/m}$, $r=5 \text{ cm}$, $m=10 \text{ kg}$, $J_0=1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $F_0=50 \text{ N}$ 。
- 4.36 求黏性阻尼弹簧-质量系统在下列情况下的脉冲响应函数:
(a) 无阻尼 ($c=0$); (b) 欠阻尼 ($c < c_c$); (c) 临界阻尼 ($c=c_c$); (d) 过阻尼 ($c > c_c$)
- 4.37 求单自由度系统在一个脉冲 \tilde{F} 作用下的响应。其中, $m=2 \text{ kg}$, $c=4 \text{ N} \cdot \text{s/m}$, $k=32 \text{ N/m}$, $\tilde{F}=4\delta(t)$, $x_0=0.01 \text{ m}$, $\dot{x}_0=1 \text{ m/s}$ 。

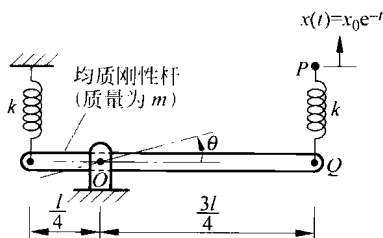


图 4.52 习题 4.34 图

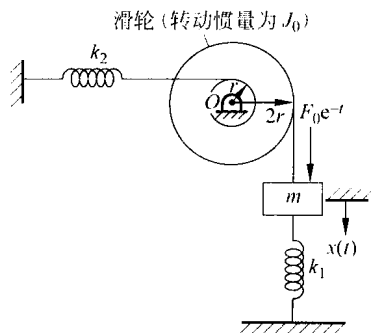


图 4.53 习题 4.35 图

- 4.38 如图 4.54 所示,战斗机机翼的末端载有导弹。在讨论机翼的振动时,可以将其简化为一长为 $l=10\text{ m}$ 、关于竖直方向轴的抗弯刚度为 $EI=15\times 10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2$ 的悬臂梁。假设机翼在末端的等效质量(包括导弹及其支架系统的质量)为 $m=2500\text{ kg}$,求由于导弹发射而引起的机翼(即等效质量 m)的振动响应。假设由于导弹发射而作用在质量 m 上的力可近似为幅值 $F=50\text{ N}\cdot\text{s}$ 的脉冲函数。

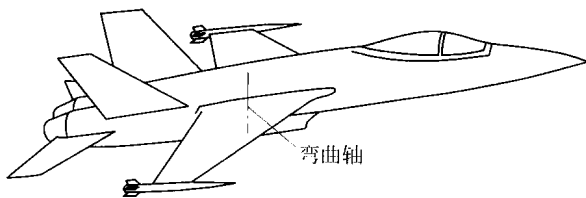


图 4.54 习题 4.38 图

- 4.39 推导无阻尼系统在如图 4.43(a)所示矩形脉冲作用下的响应谱,并画图表示 $(x/\delta_{st})_{\max}$ 和 t_0/τ_n 之间的关系。
- 4.40 求无阻尼系统在如图 4.43(c)所示脉冲作用下的位移响应谱。
- 4.41 一无阻尼弹簧-质量系统的基础承受一加速度激励 $a_0[1-\sin(\pi t/2t_0)]$,求质量块的相对位移 z 。
- 4.42 求例 4.10 中所讨论系统的响应谱,并画图表示 $\left(\frac{kx}{F_0}\right)_{\max}$ 和 $\omega_n t_0$ 之间的关系 ($0\leq\omega_n t_0\leq 15$)。
- 4.43 一建筑物框架受到爆炸载荷的作用,框架和载荷的简化模型如图 4.11 所示。如果 $m=5000\text{ kg}$, $F_0=4\text{ MN}$, $t_0=0.4\text{ s}$,求当位移不超过 10 mm 时所需的最小刚度值。
- 4.44 如图 4.20(a)所示,印刷电路板固定在一铝制的悬臂支架上。对支架进行设计以使其在如图 4.55 所示矩形脉冲作用下引起的加速度不超过 $100g$ (g 是重力加速度)。假设梁单位体积的重量、弹性模量和许用应力分别为 0.1 lbf/in^3 , 10^7 lbf/in^2 和 $26\,000\text{ lbf/in}^2$ 。

- 4.45 如图 4.20(a)所示,印刷电路板固定在一铝制的悬臂支架上。对支架进行设计以使其在如图 4.56 所示三角形脉冲作用下引起的加速度不超过 $100g$ (g 是重力加速度),假设材料性质如习题 4.44 中所述。

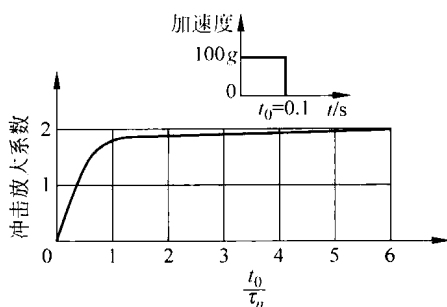


图 4.55 习题 4.44 图

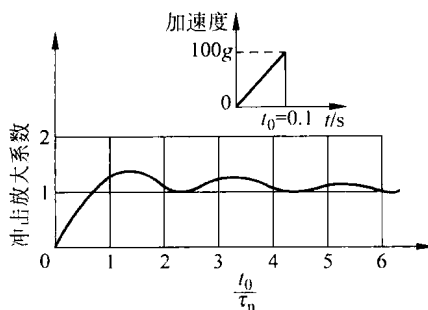


图 4.56 习题 4.45 图

- 4.46 一个电子箱重 1 lbf , 为进行抗振实验, 将其安装在一两端固定梁的中点, 如图 4.57 所示。再将梁放在一个容器内, 并使其承受大小为 0.1 kgf 、作用时间为 0.1 s 的半正弦脉冲。设计此梁使之能承受所述的冲击载荷。假定材料的性能和习题 4.44 中的相同。
- 4.47 图 4.58 所示的水箱承受响应谱如图 4.15 所示的地震。水箱和水共重 $100\,000 \text{ lbf}$ 。设计一个高 50 ft 的等截面空心钢立柱, 使其最大弯曲应力不超过材料的屈服应力。假定阻尼比为 0.05 , 安全系数为 2 。

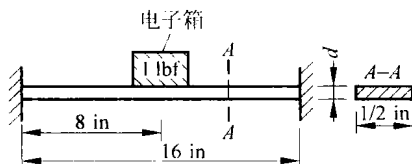
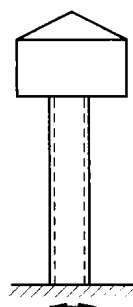


图 4.57 习题 4.46 图



4.58 习题 4.47 图

- 4.48 如图 4.18 所示的桥式起重机中, 假设小车重 5000 lbf , 总的阻尼比为 2% 。确定系统所必需的最小刚度, 使之能在图 4.16 中给出的竖向地震中不致出轨。
- 4.49 利用拉普拉斯变换求一个无阻尼单自由度系统在力 $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$ 作用下的稳态响应。
- 4.50 利用拉普拉斯变换求一个有阻尼弹簧-质量系统在一个大小为 F_0 的阶跃函数作用

下的响应。

- 4.51 利用拉普拉斯变换求一个无阻尼系统在矩形脉冲 $F(t) = F_0 (0 \leq t \leq t_0)$ 作用下的响应。假定初始条件为 0。
- 4.52 根据式(4.64)推导阻尼系统速度响应 \dot{x}_j 的表达式。
- 4.53 推导式(4.68)和式(4.71)。
- 4.54 就例 4.17 的情况,比较式(4.68)和式(4.71)所给出的 \dot{x}_j 值。
- 4.55 根据 4.8 节所述的 3 个插值函数,分别推导在无阻尼情况下 x_j 和 \dot{x}_j 的表达式。并用这些表达式求解例 4.17(假设阻尼为零)。
- 4.56 一台机器受到力锤的冲击作用。如果该机器可以简化为一单自由度系统,各参数分别为 $m=10\text{ kg}$, $k=4000\text{ N/m}$, $c=40\text{ N}\cdot\text{s/m}$, 而冲击作用的大小为 $F=100\text{ N}\cdot\text{s}$ 。求该机器的响应,并用 MATLAB 画图表示。
- 4.57 如果习题 4.56 中的机器受到该冲击锤的双脉冲作用,试求该机器的响应。假定冲击力为 $F(t)=100\delta(t)+50\delta(t-0.5)\text{ N}$, 其中 $\delta(t)$ 为狄拉克 δ 函数。并利用 MATLAB 画图表示该响应。
- 4.58 利用 MATLAB 画图表示黏性阻尼弹簧-质量系统在如图 4.9(a)所示矩形脉冲作用下的响应: (a) $t_0=0.1\text{ s}$; (b) $t_0=1.5\text{ s}$ 。其他参数如下: $m=100\text{ kg}$, $k=1200\text{ N/m}$, $c=50\text{ N}\cdot\text{s/m}$, $F_0=100\text{ N}$ 。
- 4.59 利用程序 Program4. m 求在图 4.59 所示力作用下黏性阻尼系统的稳态响应。其中, $m=1\text{ kg}$, $k=400\text{ N/m}$, $c=5\text{ N}\cdot\text{s/m}$ 。
- 4.60 利用程序 Program5. m 求黏性阻尼系统在力 $F(t)=1000(1-\cos \pi t)\text{ N}$ 作用下的响应。其中, $m=100\text{ kg}$, $k=10^5\text{ N/m}$, $\zeta=0.1$ 。
- 4.61 一单自由度系统的质量为 $m=2$, 弹簧的刚度系数为 $k=50$, 阻尼器的阻尼系数为 $c=2$ 。作用在质量块上的力的大小如下表所示, 作用时间为 1 s。利用程序 Program5. m 基于 4.8 节中的分段线性插值法求该系统的响应。

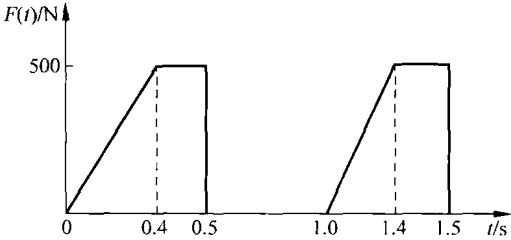


图 4.59 习题 4.59 图

时间 t_i	$F(t_i)$	时间 t_i	$F(t_i)$
0.0	-8.0	0.6	-4.0
0.1	-12.0	0.7	3.0
0.2	-15.0	0.8	10.0
0.3	-13.0	0.9	15.0
0.4	-11.0	1.0	18.0
0.5	-7.0		

- 4.62 一个运动微分方程为 $2\ddot{x} + 1500x = F(t)$ 的无阻尼系统, 其中力如图 4.60 所示, 求当 $0 \leq t \leq 0.5$ 时系统的响应。假定初始条件为 $x_0 = \dot{x}_0 = 0$, 时间步长取 $\Delta t = 0.01$ s。用 MATLAB 中的 ode23 求解。
- 4.63 用 MATLAB 中的 ode23 求解习题 4.62。假设该系统具有黏性阻尼, 运动微分方程为 $2\ddot{x} + 10\dot{x} + 1500x = F(t)$ 。
- 4.64 利用程序 Program4. cpp, 求解习题 4.59。
- 4.65 利用程序 Program5. cpp, 求解习题 4.60。
- 4.66 利用程序 Program4. F, 求解习题 4.59。
- 4.67 利用程序 Program5. F, 求解习题 4.60。
- 4.68 编写一个计算机程序, 用数值方法计算杜哈美积分, 从而求单自由度系统在任意力作用下的稳态响应, 并用此程序求解例 4.17。
- 4.69 利用习题 4.68 中所编程序, 求图 4.39(a) 所示水塔当基础受到如图 1.59 所示的地震加速度时的相对位移。假设图中纵坐标代表的加速度的单位为重力加速度 g 。
- 4.70 一无阻尼系统的运动微分方程为 $2\ddot{x} + 150x = F(t)$, 初始条件为 $x_0 = \dot{x}_0 = 0$, $F(t)$ 如图 4.61 所示。利用习题 4.68 中所编程序求此系统的响应。

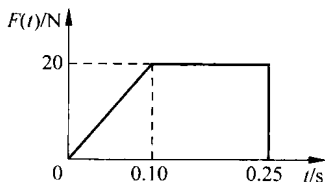


图 4.60 习题 4.62 图

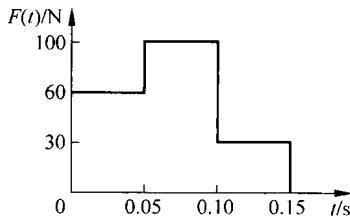


图 4.61 习题 4.70 图

设计题目

- 4.71 设计一个如图 4.62(a) 所示的地震仪, 即确定 a , m 和 k 的大小用来进行地震测量。要求地震仪本身的固有频率为 10 Hz, 当基础承受如图 4.62(b) 所示的位移时, 质量块的最大相对位移至少为 2 cm。

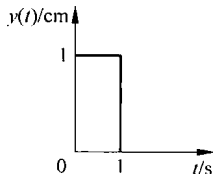
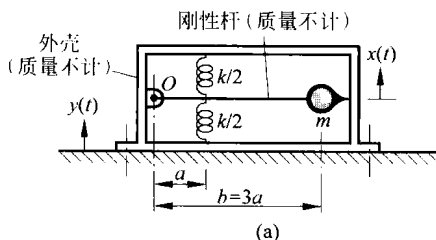


图 4.62 设计题目 4.71 图

- 4.72 在两个不同的加工过程中,切削力的变化分别如图 4.63(a),(b)所示。测量发现,在这两种情况下竖直方向的表面加工误差分别为 0.1 mm 和 0.05 mm。求刀头(见图 4.64)的等效质量和等效刚度,假设其为一单自由度无阻尼系统。

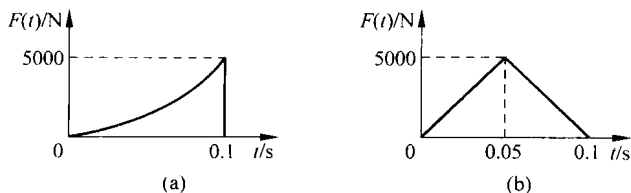


图 4.63 设计题目 4.72 图

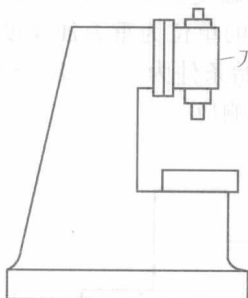


图 4.64 设计题目 4.72 图

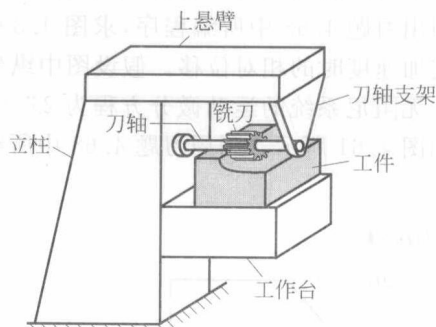


图 4.65 设计题目 4.73 图

- 4.73 如图 4.65 所示,一个铣刀安装在一刀轴的中部,用来对工件表面进行铣削加工。在稳定加工条件下,轴所承受的扭矩为 $500 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。铣刀共有 16 个齿,其中的一个已发生破损。确定刀轴的横截面直径,以限制刀头角位移的幅值不超过 1° 。假设刀轴简化为一两端固定的钢质空心轴。已知数据如下:刀轴长度为 0.5 m,铣刀的惯性矩为 $0.1 \text{ N} \cdot \text{m}^2$,铣刀转速为 1000 r/min。



伯努利(Daniel Bernoulli, 1700—1782), 瑞士人, 1725 年即成为圣彼得堡大学的数学教授, 此前获得了医学博士学位。后来又在瑞士的巴塞尔(Basel)作解剖学和植物学教授。他提出的流体静力学和流体动力学理论以及伯努利定理对工程师来说是非常熟悉的。他得到了梁振动的运动微分方程, 并研究了弦的振动。在研究多自由度系统的自由振动问题时所采用的谐波叠加原理是他首先提出的。

(照片引自: Smith D E. History of Mathematics, Vol. 1—General Survey of the History of Elementary Mathematics. New York: Dover Publications, 1958)

第 5 章 二自由度系统的振动

5.1 引言

二自由度系统(two degree of freedom systems)是指需要用两个独立的坐标描述其运动的系统, 图 1.13 中给出了若干这样的例子。本章只讨论二自由度系统的振动, 为在第 6 章将要讨论的多自由度系统的振动打下必要的基础。

首先考虑图 5.1(a)所示的电动机-抽水机系统。如果只考虑它们在竖直平面内的振动, 则其可理想化为支承在刚度系数分别为 k_1 和 k_2 的两个弹簧上的一个质量为 m 、转动惯量为 J_0 的一个杆, 如图 5.1(b)所示。系统在任意时刻的位移可用 $x(t)$ 和 $\theta(t)$ 完全确定, 它们分别是反映质量 m 重心的竖向线位移和质量 m 绕其重心转动的角位移。除了 $x(t)$ 和 $\theta(t)$ 外, 也可以用另外两个独立坐标 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 来描述系统的运动。所以这个系统是一

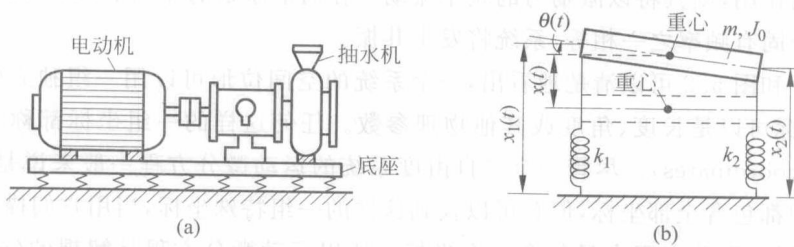


图 5.1 置于弹簧上的电机-水泵系统

个具有2个自由度的振动系统。必须注意:此时这个质量被认为是一个刚体而不是一个质点,所以它有两种可能的运动。否则,对于一个质点来说,没有必要描述其绕着质心的转动。

接下来考虑图 5.2(a)所示的包装后的某个设备。假设约定该设备的运动限制在 xy 平面内,那么这样的—个系统可以模型化为一个支承在沿 x, y 方向的两个弹簧上的一个质量块,如图 5.2(b)所示。所以这个系统可以简化为具有 2 个自由度的一个质点,因为该质量具有在 xy 平面内的两种可能运动,即沿 x 方向和 y 方向的平动。计算一个系统自由度的一般法则可以概括如下:

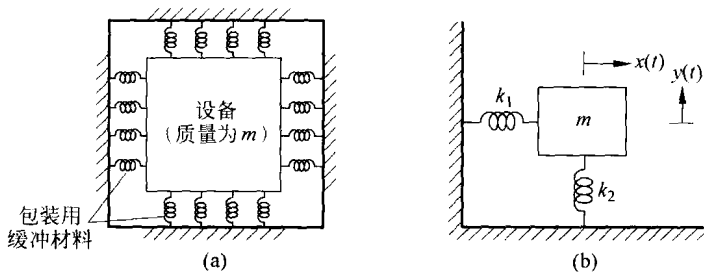


图 5.2 仪器包装的简化

系统的自由度数=系统中质量块的数目 \times 每一个质量块可能具有的运动种类的数目

一个二自由度系统要用两个微分方程描述其运动,每一个运动微分方程分别与每一个质量块对应,或者更准确地说与每一个自由度对应。这两个运动微分方程通常是耦合的,也就是每一个方程中同时含有全部坐标。如果假设每一个坐标随时间变化的规律都是简谐的,那么根据系统的运动微分方程可以得到两个确定系统固有频率的公式。如果给出合适的初始激励,系统将按某一个固有频率振动。此时,这两个自由度(坐标)的振幅具有特殊的关系,二者之间确定的空间位形称为振动的**正则振型**(normal mode)、**主振型**(principal mode)或**固有振型**(natural mode)。一个二自由度振动系统具有两个正交振型,它们分别与每一个固有频率对应。

对于任意的初始激励,系统的响应将是两个正交振型的叠加。然而,如果系统受到一个外界简谐力的作用,则其将以激励力的频率振动。在简谐激励的作用下,如果激励力的频率与系统的两个固有频率之一相等,系统将发生共振。

从图 5.1 和图 5.2 可以清楚地看出,一个系统的空间位形可以用一组独立的坐标完全确定,这些坐标可以是长度、角度或其他物理参数。任何这样的一组坐标都称为**广义坐标**(generalized coordinates)。尽管一个二自由度系统的运动微分方程一般来说是耦合的,即每一个方程中都包含全部坐标,但总可以找到这样的一组特殊坐标,当用它们描述系统的运动时,每一个运动微分方程中只包含一个坐标。所以运动微分方程是**解耦的**(uncoupled),因而可以独立求解。这样的一组坐标称为**主坐标**(principal coordinates)。

5.2 受迫振动的运动微分方程

考虑如图 5.3(a) 所示的一个含黏性阻尼的二自由度弹簧质量系统。系统的运动可以用坐标 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 来描述, 它们分别定义在某一时刻 t 两个质量块离开各自平衡位置的位移。两个外力 $F_1(t)$ 和 $F_2(t)$ 分别作用在 m_1 和 m_2 上, m_1 和 m_2 的受力分析如图 5.3 (b) 所示。对每一个质量块分别应用牛顿第二定律可得如下运动微分方程:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = F_1 \quad (5.1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3) x_2 = F_2 \quad (5.2)$$

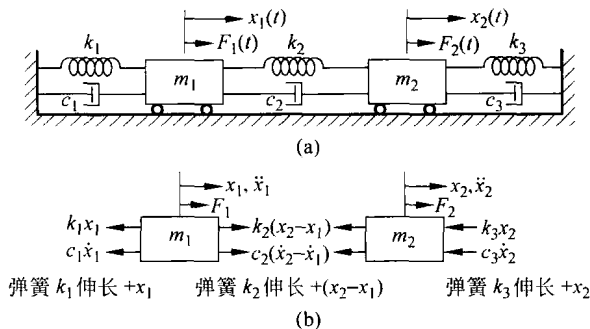


图 5.3 二自由度弹簧-质量-阻尼系统

可以看出, 方程(5.1)中有含 x_2 的项(即 $-c_2 \dot{x}_2$ 和 $-k_2 x_2$), 同时方程(5.2)中有含 x_1 的项(即 $-c_2 \dot{x}_1$ 和 $-k_2 x_1$), 所以它们代表了一个耦合的二元二阶常微分方程组。可以想象, m_1 的运动将会影响 m_2 的运动; 反过来, m_2 的运动将会影响 m_1 的运动。方程(5.1)和方程(5.2)可以写成如下的矩阵形式:

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{c} \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{k} \mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (5.3)$$

式中, \mathbf{m} , \mathbf{c} 和 \mathbf{k} 分别称为质量矩阵(mass matrix)、阻尼矩阵(damping matrix)和刚度矩阵(stiffness matrix), 具体形式如下:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{F}(t)$ 分别称为位移向量(displacement vector)和力向量(force vector), 具体形式如下:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F}(t) = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix}$$

可以看出, 矩阵 \mathbf{m} , \mathbf{c} 和 \mathbf{k} 都是 2×2 的矩阵, 它们的元素分别是系统已知的质量、阻尼系数和刚度。此外, 还可以看出这些矩阵是对称的, 即

$$\mathbf{m}^T = \mathbf{m}, \quad \mathbf{c}^T = \mathbf{c}, \quad \mathbf{k}^T = \mathbf{k}$$

式中,上角标 T 代表矩阵的转置。

只有当 $c_2 = k_2 = 0$ 时,方程(5.1)和方程(5.2)才不是耦合的,这对应着两个质量块 m_1 和 m_2 没有任何物理连接。在这种情况下,矩阵 \mathbf{m} , \mathbf{c} 和 \mathbf{k} 都是对角的。对于 $F_1(t)$ 和 $F_2(t)$ 为任意激励力的情况,方程(5.1)和方程(5.2)的求解是困难的,这主要是因为 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的相互耦合所致。方程(5.1)和方程(5.2)的解中包含 4 个积分常数(每个方程 2 个)。通常两个质量块的初始位移和初始速度用这样的形式描述: $x_1(t=0) = x_1(0)$, $\dot{x}_1(t=0) = \dot{x}_1(0)$, $x_2(t=0) = x_2(0)$, $\dot{x}_2(t=0) = \dot{x}_2(0)$ 。下面首先讨论方程(5.1)和方程(5.2)的自由振动的解。

5.3 无阻尼系统的自由振动分析

分析图 5.3(a)所示系统的自由振动时,取 $F_1(t) = F_2(t) = 0$ 。另外,若不计阻尼,即 $c_1 = c_2 = c_3 = 0$,方程(5.1)和方程(5.2)可以简化成如下形式:

$$m_1 \ddot{x}_1(t) + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2 x_2(t) = 0 \quad (5.4)$$

$$m_2 \ddot{x}_2(t) - k_2 x_1(t) + (k_2 + k_3)x_2(t) = 0 \quad (5.5)$$

我们感兴趣的是 m_1 和 m_2 是否能以相同的频率和相角但不同的振幅作简谐振动。假设这是可能的,即 m_1 和 m_2 以相同的频率 ω 和相角 ϕ 作简谐振动,取方程(5.4)和方程(5.5)的解为如下形式:

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= X_1 \cos(\omega t + \phi) \\ x_2(t) &= X_2 \cos(\omega t + \phi) \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

式中,常量 X_1 和 X_2 分别是 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的最大值,称为 m_1 和 m_2 的振幅; ϕ 称为相角。将式(5.6)代入式(5.4)和式(5.5)后可得

$$\left. \begin{aligned} [-m_1 \omega^2 + (k_1 + k_2)]X_1 - k_2 X_2 &= 0 \\ -k_2 X_1 + [-m_2 \omega^2 + (k_2 + k_3)]X_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

既然方程(5.7)对任何 t 值都成立,所以中括号里面的项必须为零,即

$$\left. \begin{aligned} [-m_1 \omega^2 + (k_1 + k_2)]X_1 - k_2 X_2 &= 0 \\ -k_2 X_1 + [-m_2 \omega^2 + (k_2 + k_3)]X_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

式(5.8)是关于未知量 X_1 和 X_2 的两个联立齐次代数方程。可以看出, $X_1 = 0$ 和 $X_2 = 0$ 能够使方程(5.8)成立,但这意味着系统并没有发生振动。对于 X_1 和 X_2 的非零解,其系数矩阵的行列式必须为零,即

$$\det \begin{bmatrix} -m_1 \omega^2 + (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & m_2 \omega^2 + (k_2 + k_3) \end{bmatrix} = 0$$

也就是

$$(m_1 m_2) \omega^4 - \{(k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1\} \omega^2 + \{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - k_2^2\} = 0 \quad (5.9)$$

方程(5.9)称为频率方程(frequency equation)或特征方程(characteristic equation), 因为据其可求得系统的频率或特征值。方程(5.9)的两个根是

$$\omega_1^2, \omega_2^2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1}{m_1 m_2} \right\} \mp \frac{1}{2} \left[\left\{ \frac{(k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1}{m_1 m_2} \right\}^2 - 4 \left\{ \frac{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - k_2^2}{m_1 m_2} \right\} \right]^{1/2} \quad (5.10)$$

这表明当 ω 等于式(5.10)中的 ω_1 或 ω_2 时, 系统具有形如式(5.6)所示的非零简谐解是可能的。 ω_1 和 ω_2 称为系统的固有频率(natural frequencies)。

方程(5.6)中的 X_1 和 X_2 是待定的, 它们的值依赖于固有频率 ω_1 和 ω_2 。将与 ω_1 对应的 X_1 和 X_2 的值记为 $X_1^{(1)}$ 和 $X_2^{(1)}$, 与 ω_2 对应的 X_1 和 X_2 的值记为 $X_1^{(2)}$ 和 $X_2^{(2)}$ 。此外, 既然方程(5.8)是齐次的, 所以只能求得振幅比 $r_1 = X_2^{(1)}/X_1^{(1)}$ 和 $r_2 = X_2^{(2)}/X_1^{(2)}$ 。分别令方程(5.8)中的 $\omega^2 = \omega_1^2$ 和 $\omega^2 = \omega_2^2$, 可得

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{-m_1 \omega_1^2 + k_1 + k_2}{k_2} = \frac{k_2}{-m_2 \omega_1^2 + k_2 + k_3} \\ r_2 &= \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{-m_1 \omega_2^2 + k_1 + k_2}{k_2} = \frac{k_2}{-m_2 \omega_2^2 + k_2 + k_3} \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

式(5.11)给出的 r_i ($i=1, 2$) 的两个值是一样的。与 ω_1^2 和 ω_2^2 对应的两个振动模式可以分别表示为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{X}^{(1)} &= \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ r_1 X_1^{(1)} \end{Bmatrix} \\ \mathbf{X}^{(2)} &= \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ r_2 X_1^{(2)} \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

向量 $\mathbf{X}^{(1)}$ 和 $\mathbf{X}^{(2)}$ 称为系统的模态向量(modal vectors), 也叫(主)振型、固有振型或(主)模态。根据式(5.6), 系统自由振动的解可以表示为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)}(t) &= \begin{Bmatrix} x_1^{(1)}(t) \\ x_2^{(1)}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ r_1 X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \end{Bmatrix} = \text{第1阶振型} \\ \mathbf{x}^{(2)}(t) &= \begin{Bmatrix} x_1^{(2)}(t) \\ x_2^{(2)}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ r_2 X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{Bmatrix} = \text{第2阶振型} \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

式中, 常量 $X_1^{(1)}, X_1^{(2)}, \phi_1$ 和 ϕ_2 由初始条件确定。

如前所述, 方程(5.1)和方程(5.2)都包含关于时间的二阶导数, 所以确定每一质量块的运动都需要知道两个初始条件。如 5.1 节所述, 在特殊的初始激励下, 系统可能在其第 i 阶正交振型($i=1, 2$)上振动, 即

$$x_1(t=0) = X_1^{(i)} = \text{某一常量}, \quad \dot{x}_1(t=0) = 0$$

$$x_2(t=0) = r_1 X_1^{(i)}, \quad \dot{x}_2(t=0) = 0$$

然而,一般的初始条件将同时激起系统的二阶主振型,所以系统的运动,也就是方程(5.4)和方程(5.5)的一般解可以通过二阶主振型(5.13)的叠加得到:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2 \mathbf{x}^{(2)}(t) \quad (5.14)$$

式中, c_1 和 c_2 是两个常量。既然 $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ 和 $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ 已包含两个未知常量 $X_1^{(1)}$ 和 $X_1^{(2)}$ (见式(5.13)), 不失一般性, 可以取 $c_1 = c_2 = 1$ 。所以根据式(5.13)和式(5.14), 向量 $\mathbf{x}(t)$ 可以表示为

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= x_1^{(1)}(t) + x_1^{(2)}(t) = X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_2(t) &= x_2^{(1)}(t) + x_2^{(2)}(t) = r_1 X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + r_2 X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

式中, 未知常量 $X_1^{(1)}$, $X_1^{(2)}$, ϕ_1 和 ϕ_2 可以由下列初始条件确定:

$$\left. \begin{aligned} x_1(t=0) &= x_1(0), \quad \dot{x}_1(t=0) = \dot{x}_1(0) \\ x_2(t=0) &= x_2(0), \quad \dot{x}_2(t=0) = \dot{x}_2(0) \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

将式(5.16)代入式(5.15)得

$$\left. \begin{aligned} x_1(0) &= X_1^{(1)} \cos \phi_1 + X_1^{(2)} \cos \phi_2 \\ \dot{x}_1(0) &= -\omega_1 X_1^{(1)} \sin \phi_1 - \omega_2 X_1^{(2)} \sin \phi_2 \\ x_2(0) &= r_1 X_1^{(1)} \cos \phi_1 + r_2 X_1^{(2)} \cos \phi_2 \\ \dot{x}_2(0) &= -\omega_1 r_1 X_1^{(1)} \sin \phi_1 - \omega_2 r_2 X_1^{(2)} \sin \phi_2 \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

式(5.17)是关于未知量 $X_1^{(1)} \cos \phi_1$, $X_1^{(2)} \cos \phi_2$, $X_1^{(1)} \sin \phi_1$, $X_1^{(2)} \sin \phi_2$ 的代数方程组, 其解可以表示为

$$\left\{ \begin{aligned} X_1^{(1)} \cos \phi_1 &= \frac{r_2 x_1(0) - x_2(0)}{r_2 - r_1}, \quad X_1^{(2)} \cos \phi_2 = \frac{-r_1 x_1(0) + x_2(0)}{r_2 - r_1} \\ X_1^{(1)} \sin \phi_1 &= \frac{-r_2 \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)}{\omega_1 (r_2 - r_1)}, \quad X_1^{(2)} \sin \phi_2 = \frac{r_1 \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)}{\omega_2 (r_2 - r_1)} \end{aligned} \right.$$

由此得

$$\left. \begin{aligned} X_1^{(1)} &= [\{X_1^{(1)} \cos \phi_1\}^2 + \{X_1^{(1)} \sin \phi_1\}^2]^{1/2} \\ &= \frac{1}{r_2 - r_1} \left[\{r_2 x_1(0) - x_2(0)\}^2 + \frac{\{-r_2 \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)\}^2}{\omega_1^2} \right]^{1/2} \\ X_1^{(2)} &= [\{X_1^{(2)} \cos \phi_2\}^2 + \{X_1^{(2)} \sin \phi_2\}^2]^{1/2} \\ &= \frac{1}{r_2 - r_1} \left[\{-r_1 x_1(0) + x_2(0)\}^2 + \frac{\{r_1 \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)\}^2}{\omega_2^2} \right]^{1/2} \\ \phi_1 &= \arctan \frac{X_1^{(1)} \sin \phi_1}{X_1^{(1)} \cos \phi_1} = \arctan \frac{-r_2 \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)}{\omega_1 [r_2 x_1(0) - x_2(0)]} \\ \phi_2 &= \arctan \frac{X_1^{(2)} \sin \phi_2}{X_1^{(2)} \cos \phi_2} = \arctan \frac{r_1 \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)}{\omega_2 [-r_1 x_1(0) + x_2(0)]} \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

例 5.1 求图 5.4 所示弹簧-质量系统的固有频率和主振型,约定系统只作竖直方向的运动,并取 $n=1$ 。

解: 如果分别取两个质量块 m_1 和 m_2 离开各自平衡位置的距离 x_1 和 x_2 来描述运动过程系统在空间的位形,根据对图 5.3(a)所示系统的讨论,令 $m_1=m_2=m, k_1=k_2=k_3=k$, 运动微分方程(5.4)和方程(5.5)为

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{E. 1})$$

假设谐波解的形式为

$$x_i(t) = X_i \cos(\omega t + \phi), \quad i = 1, 2 \quad (\text{E. 2})$$

将式(E.2)代入式(E.1)可得如下频率方程:

$$\begin{vmatrix} -m\omega^2 + 2k & -k \\ -k & -m\omega^2 + 2k \end{vmatrix} = 0$$

或

$$m^2\omega^4 - 4km\omega^2 + 3k^2 = 0 \quad (\text{E. 3})$$

方程(E.3)的解即系统的固有频率,为

$$\omega_1 = \left\{ \frac{4km - [16k^2m^2 - 12m^2k^2]^{1/2}}{2m^2} \right\}^{1/2} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{E. 4})$$

$$\omega_2 = \left\{ \frac{4km + [16k^2m^2 - 12m^2k^2]^{1/2}}{2m^2} \right\}^{1/2} = \sqrt{\frac{3k}{m}} \quad (\text{E. 5})$$

根据式(5.11),振幅比为

$$r_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{-m\omega_1^2 + 2k}{k} = \frac{k}{-m\omega_1^2 + 2k} = 1 \quad (\text{E. 6})$$

$$r_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{-m\omega_2^2 + 2k}{k} = \frac{k}{-m\omega_2^2 + 2k} = -1 \quad (\text{E. 7})$$

根据式(5.13),主振型为

$$\text{第 1 阶主振型} = \mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_1\right) \\ X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_1\right) \end{Bmatrix} \quad (\text{E. 8})$$

$$\text{第 2 阶主振型} = \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \phi_2\right) \\ -X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \phi_2\right) \end{Bmatrix} \quad (\text{E. 9})$$

由式(E.8)可知,系统按第1阶主振型振动时,两个质量块的振幅总是一样的,所以 m_1 和 m_2 的运动是同相的(见图 5.5(a))。系统按第2阶主振型振动时,式(E.9)表明,两个质量

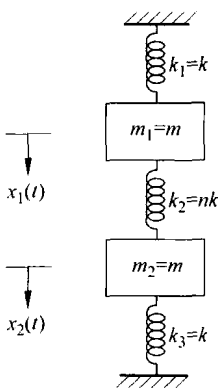


图 5.4 二自由度系统

块的位移总是大小相等,但符号相反,所以 m_1 和 m_2 的运动是反相的(见图 5.5(b))。此时中间弹簧的中点始终保持不动,这样的点称为**结点**(node)。根据式(5.15),系统运动的一般解为

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= X_1^{(1)} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi_1 \right) + X_1^{(2)} \cos \left(\sqrt{\frac{3k}{m}} t + \phi_2 \right) \\ x_2(t) &= X_1^{(1)} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi_1 \right) - X_1^{(2)} \cos \left(\sqrt{\frac{3k}{m}} t + \phi_2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{E. 10})$$

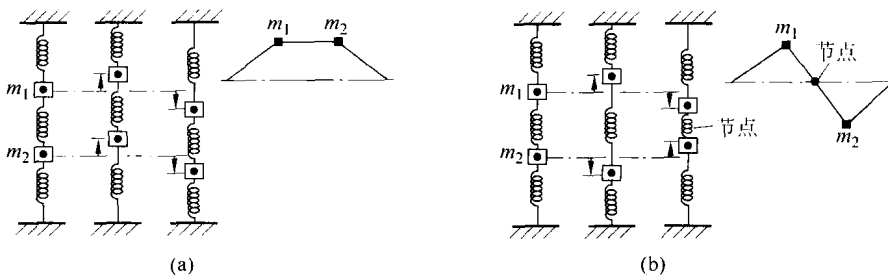


图 5.5 振动振型

(a) 第 1 阶振型; (b) 第 2 阶振型

不难看出,以上计算系统固有频率和确定振型形式的过程冗长繁琐。5.9 节将说明如何利用计算机程序方便地借助于数值方法计算多自由度系统的固有频率和振型形式。

例 5.2 求图 5.4 所示系统分别按第 1 阶主振型和第 2 阶主振型振动时所需的初始条件。

解: 可以根据任意初始条件下系统振动的一般解得到按第 1 阶主振型和第 2 阶主振型振动时的特殊解,再求解相应的方程。

对任意初始条件,两个质量块的运动如式(5.15)所示。例 5.1 中已经求出 $r_1 = 1$, $r_2 = -1$, 所以式(5.15)成为例 5.1 中的式(E.10),即

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= X_1^{(1)} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi_1 \right) + X_1^{(2)} \cos \left(\sqrt{\frac{3k}{m}} t + \phi_2 \right) \\ x_2(t) &= X_1^{(1)} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi_1 \right) - X_1^{(2)} \cos \left(\sqrt{\frac{3k}{m}} t + \phi_2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{E. 1})$$

对形如式(5.16)的初始条件,在式(5.18)中令 $r_1 = 1, r_2 = -1$, 可得

$$X_1^{(1)} = -\frac{1}{2} \left\{ [x_1(0) + x_2(0)]^2 + \frac{m}{k} [\dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)]^2 \right\}^{1/2} \quad (\text{E. 2})$$

$$X_1^{(2)} = -\frac{1}{2} \left\{ [-x_1(0) + x_2(0)]^2 + \frac{m}{3k} [\dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)]^2 \right\}^{1/2} \quad (\text{E. 3})$$

$$\phi_1 = \arctan \frac{-\sqrt{m}[\dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)]}{\sqrt{k}[x_1(0) + x_2(0)]} \quad (\text{E. 4})$$

$$\phi_2 = \arctan \frac{\sqrt{m}[\dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)]}{\sqrt{3k}[-x_1(0) + x_2(0)]} \quad (\text{E. 5})$$

根据例 5.1 中的式(E.8),第 1 阶主振型为

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi_1 \right) \\ X_1^{(1)} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi_1 \right) \end{Bmatrix} \quad (\text{E.6})$$

比较式(E.1)和式(E.6)可知,只有当 $X_1^{(2)}=0$ 时,系统才按第 1 阶主振型振动。由式(E.3)可知,此时应有

$$x_1(0) = x_2(0), \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) \quad (\text{E.7})$$

根据例 5.1 中的式(E.9),第 2 阶主振型为

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \cos \left(\sqrt{\frac{3k}{m}} t + \phi_2 \right) \\ -X_1^{(2)} \cos \left(\sqrt{\frac{3k}{m}} t + \phi_2 \right) \end{Bmatrix} \quad (\text{E.8})$$

比较式(E.1)和式(E.8)可知,只有当 $X_1^{(1)}=0$ 时,系统才按第 2 阶主振型振动。由式(E.2)可知,此时应有

$$x_1(0) = -x_2(0), \quad \dot{x}_1(0) = -\dot{x}_2(0) \quad (\text{E.9})$$

例 5.3 求图 5.3(a)所示系统对初始条件 $x_1(0)=1, x_2(0)=\dot{x}_1(0)=\dot{x}_2(0)=0$ 的响应。已知 $k_1=30, k_2=5, k_3=0, m_1=10, m_2=1, c_1=c_2=c_3=0$ 。

解: 对于给定的物理参数,特征方程(5.8)成为

$$\begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2 + k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

或

$$\begin{bmatrix} -10\omega^2 + 35 & -5 \\ -5 & -\omega^2 + 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{E.1})$$

令式(E.1)中系数矩阵的行列式为零,得如下频率方程(见式(5.9)):

$$10\omega^4 - 85\omega^2 + 150 = 0 \quad (\text{E.2})$$

由此可得两个固有频率为

$$\omega_1^2 = 2.5, \quad \omega_2^2 = 6.0$$

或

$$\omega_1 = 1.5811, \quad \omega_2 = 2.4495 \quad (\text{E.3})$$

将 $\omega^2 = \omega_1^2 = 2.5$ 和 $\omega^2 = \omega_2^2 = 6.0$ 代入式(E.1),分别得 $X_2^{(1)} = 2X_1^{(1)}$ 和 $X_2^{(2)} = -5X_1^{(2)}$ 。所以两个主振型(特征向量)分别为

$$\mathbf{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} X_1^{(1)} \quad (\text{E.4})$$

$$\mathbf{X}^{(2)} = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -5 \end{Bmatrix} X_1^{(2)} \quad (\text{E.5})$$

质量 m_1 和 m_2 的自由振动响应为(见式(5.15))

$$x_1(t) = X_1^{(1)} \cos(1.5811t + \phi_1) + X_1^{(2)} \cos(2.4495t + \phi_2) \quad (\text{E. 6})$$

$$x_2(t) = 2X_1^{(1)} \cos(1.5811t + \phi_1) - 5X_1^{(2)} \cos(2.4495t + \phi_2) \quad (\text{E. 7})$$

式中, 常量 $X_1^{(1)}$, $X_1^{(2)}$, ϕ_1 和 ϕ_2 由初始条件确定。将已知的初始条件代入式(E. 6)和式(E. 7)可得

$$x_1(t=0) = 1 = X_1^{(1)} \cos \phi_1 + X_1^{(2)} \cos \phi_2 \quad (\text{E. 8})$$

$$x_2(t=0) = 0 = 2X_1^{(1)} \cos \phi_1 - 5X_1^{(2)} \cos \phi_2 \quad (\text{E. 9})$$

$$\dot{x}_1(t=0) = 0 = -1.5811X_1^{(1)} \sin \phi_1 - 2.4495X_1^{(2)} \sin \phi_2 \quad (\text{E. 10})$$

$$\dot{x}_2(t=0) = 0 = -3.1622X_1^{(1)} \sin \phi_1 + 12.2475X_1^{(2)} \sin \phi_2^{①} \quad (\text{E. 11})$$

由式(E. 8)和式(E. 9)得

$$X_1^{(1)} \cos \phi_1 = \frac{5}{7}, \quad X_1^{(2)} \cos \phi_2 = \frac{2}{7} \quad (\text{E. 12})$$

由式(E. 10)和式(E. 11)得

$$X_1^{(1)} \sin \phi_1 = 0, \quad X_1^{(2)} \sin \phi_2 = 0 \quad (\text{E. 13})$$

由式(E. 12)和式(E. 13)得

$$X_1^{(1)} = \frac{5}{7}, \quad X_1^{(2)} = \frac{2}{7}, \quad \phi_1 = 0, \quad \phi_2 = 0 \quad (\text{E. 14})$$

所以, 质量 m_1 和 m_2 的自由振动响应为

$$x_1(t) = \frac{5}{7} \cos 1.5811t + \frac{2}{7} \cos 2.4495t \quad (\text{E. 15})$$

$$x_2(t) = \frac{10}{7} \cos 1.5811t - \frac{10}{7} \cos 2.4495t \quad (\text{E. 16})$$

式(E. 15)和式(E. 16)反映的 m_1 和 m_2 的自由振动响应随时间变化的曲线将在例 5.12中给出。

5.4 扭振系统

考虑图 5.6 所示的由固定在一根轴上的两个圆盘组成的扭振系统。轴的每一段的扭转弹簧刚度分别为 k_{11} 、 k_{12} 和 k_{13} 。图中还示出了转动惯量分别为 J_1 和 J_2 的两个圆盘, 它们所受到的力矩分别为 M_{11} 和 M_{12} , 扭转自由度分别为 θ_1 和 θ_2 。二者扭转振动的微分方程为

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\theta}_1 = -k_{11}\theta_1 + k_{12}(\theta_2 - \theta_1) + M_{11} \\ J_2 \ddot{\theta}_2 = -k_{12}(\theta_2 - \theta_1) - k_{13}\theta_2 + M_{12} \end{cases}$$

或重新整理成如下形式:

① 原著此式有误。——译者

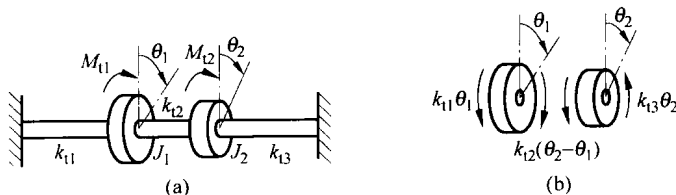


图 5.6 轴盘扭振系统

$$\left. \begin{aligned} J_1 \ddot{\theta}_1 + (k_{11} + k_{12})\theta_1 - k_{12}\theta_2 &= M_{11} \\ J_2 \ddot{\theta}_2 - k_{12}\theta_1 + (k_{12} + k_{13})\theta_2 &= M_{12} \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

当分析自由振动时,式(5.19)成为

$$\left. \begin{aligned} J_1 \ddot{\theta}_1 + (k_{11} + k_{12})\theta_1 - k_{12}\theta_2 &= 0 \\ J_2 \ddot{\theta}_2 - k_{12}\theta_1 + (k_{12} + k_{13})\theta_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

不难看出,方程(5.20)与式(5.4)、式(5.5)在形式上是相似的。事实上,方程(5.20)可以通过将式(5.4)、式(5.5)中的 $x_1, x_2, m_1, m_2, k_1, k_2$ 和 k_3 分别用 $\theta_1, \theta_2, J_1, J_2, k_{11}, k_{12}$ 和 k_{13} 代替得到。所以 5.3 节中的分析方法同样适用于扭振系统,而只需进行适当的替换。下面的两个例子进一步说明自由振动分析的步骤。

例 5.4 求图 5.7 所示扭振系统的固有频率和主振型。已知 $J_1 = J_0, J_2 = 2J_0, k_{11} = k_{12} = k_1, k_{13} = 0$, 得

解: 在运动微分方程(5.20)中令 $J_1 = J_0, J_2 = 2J_0, k_{11} = k_{12} = k_1, k_{13} = 0$, 得

$$\left. \begin{aligned} J_0 \ddot{\theta}_1 + 2k_1\theta_1 - k_1\theta_2 &= 0 \\ 2J_0 \ddot{\theta}_2 - k_1\theta_1 + k_1\theta_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (E.1)$$

设式(E.1)的谐波解形式为

$$\theta_i(t) = \Theta_i \cos(\omega t + \phi), \quad i = 1, 2 \quad (E.2)$$

代入式(E.1)后得下列频率方程:

$$2\omega^4 J_0^2 - 5\omega^2 J_0 k_1 + k_1^2 = 0 \quad (E.3)$$

式(E.3)的解给出如下两个固有频率:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{4J_0}(5 - \sqrt{17})}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_1}{4J_0}(5 + \sqrt{17})} \quad (E.4)$$

两质量块的振幅比为

$$r_1 = \frac{\Theta_2^{(1)}}{\Theta_1^{(1)}} = 2 - \frac{5 - \sqrt{17}}{4}, \quad r_2 = \frac{\Theta_2^{(2)}}{\Theta_1^{(2)}} = 2 - \frac{5 + \sqrt{17}}{4} \quad (E.5)$$

式(E.4)和式(E.5)也可以通过式(5.10)和式(5.11)得到,即令其中的 $k_1 = k_{11} = k_1$,

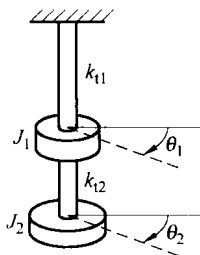


图 5.7 扭振系统

$$k_2 = k_{12} = k_1, k_3 = 0, m_1 = J_1 = J_0, m_2 = J_2 = 2J_0。$$

注意: 对于一个二自由度系统来说, 它的两个固有频率与任何一个由它的元件组成的两个单自由度系统的固有频率都不相等。在例 5.4 中, 由 k_{t1} 和 J_1 所确定的单自由度系统的固有频率为

$$\bar{\omega}_1 = \sqrt{\frac{k_{t1}}{J_1}} = \sqrt{\frac{k_1}{J_0}}$$

由 k_{12} 和 J_2 所确定的单自由度系统的固有频率为

$$\bar{\omega}_2 = \sqrt{\frac{k_{12}}{J_2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{k_1}{J_0}}$$

刚度分别为 k_{t1} , k_{12} 的元件和转动惯量分别为 J_1 , J_2 的元件共同组成了图 5.7 所示的系统。显然, $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$ 与 ω_1, ω_2 是不同的。

例 5.5 船舶发动机通过齿轮与推进器相连, 如图 5.8(a) 所示。飞轮、发动机、齿轮 1、齿轮 2 和推进器的转动惯量分别为 9000, 1000, 250, 150 和 2000 (单位为 $\text{kg} \cdot \text{m}^2$)。求此系统扭振的固有频率和主振型。

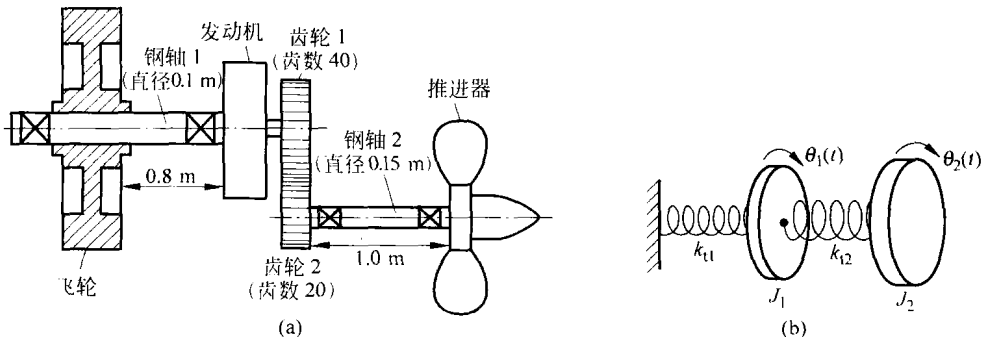


图 5.8 船舶发动机推进器系统

解: 应首先以某一个回转件为参考, 求出其余全部回转件的等效转动惯量。本系统可以简化为一个二自由度模型。

假设:

- (1) 由于与其他回转件相比, 飞轮的转动惯量很大, 所以可以认为其是固定不动的;
- (2) 发动机和齿轮可以用一个等效回转件代替。

既然齿轮 1 和齿轮 2 的齿数分别为 40 和 20, 所以钢轴 2 的转速是钢轴 1 转速的 2 倍。故齿轮 2 和推进器的转动惯量折算到发动机的轴线上时分别为

$$\begin{cases} (J_{G2})_{\text{eq}} = 2^2 \times 150 = 600 (\text{kg} \cdot \text{m}^2) \\ (J_P)_{\text{eq}} = 2^2 \times 2000 = 8000 (\text{kg} \cdot \text{m}^2) \end{cases}$$

由于发动机到齿轮的距离很小, 所以发动机和两个齿轮可以用一个回转件来代替, 且其转动

惯量

$$J_1 = J_E + J_{G1} + (J_{G2})_{eq} = 1000 + 250 + 600 = 1850 \text{ (kg} \cdot \text{m}^2\text{)}$$

假设钢的剪切弹性模量为 80 GPa, 轴 1 和轴 2 的扭转刚度可以计算如下:

$$\begin{cases} k_{t1} = \frac{GI_{01}}{l_1} = \frac{G}{l_1} \frac{\pi d_1^4}{32} = \frac{80 \times 10^9 \times \pi \times 0.10^4}{0.8 \times 32} = 98.1750 \times 10^4 \text{ (N} \cdot \text{m/rad)} \\ k_{t2} = \frac{GI_{02}}{l_2} = \frac{G}{l_2} \frac{\pi d_2^4}{32} = \frac{80 \times 10^9 \times \pi \times 0.15^4}{1.0 \times 32} = 397.60875 \times 10^4 \text{ (N} \cdot \text{m/rad)} \end{cases}$$

由于钢轴 2 的长度是不能忽略的, 推进器可以看成是一个与钢轴 2 的端部固接的回转件, 所以此系统是一个二自由度系统, 如图 5.8(b) 所示。

在式(5.10)中令 $m_1 = J_1, m_2 = J_2, k_1 = k_{t1}, k_2 = k_{t2}, k_3 = 0$, 可得

$$\begin{aligned} \omega_1^2, \omega_2^2 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{(k_{t1} + k_{t2})J_2 + k_{t2}J_1}{J_1J_2} \right\} \\ &\quad \pm \left[\left\{ \frac{(k_{t1} + k_{t2})J_2 + k_{t2}J_1}{J_1J_2} \right\}^2 - 4 \left\{ \frac{(k_{t1} + k_{t2})k_{t2} - k_{t2}^2}{J_1J_2} \right\} \right]^{1/2} \\ &= \left\{ \frac{k_{t1} + k_{t2}}{2J_1} + \frac{k_{t2}}{2J_2} \right\} \pm \left[\left\{ \frac{k_{t1} + k_{t2}}{2J_1} + \frac{k_{t2}}{2J_2} \right\} - \frac{k_{t1}k_{t2}}{J_1J_2} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{E. 1})$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{k_{t1} + k_{t2}}{2J_1} + \frac{k_{t2}}{2J_2} &= \frac{(98.1750 + 397.6087) \times 10^4}{2 \times 1850} + \frac{397.6087 \times 10^4}{2 \times 8000} = 1588.46 \\ \frac{k_{t1}k_{t2}}{J_1J_2} &= \frac{98.1750 \times 10^4 \times 397.6087 \times 10^4}{1850 \times 8000} = 26.3750 \times 10^4 \end{aligned}$$

所以由式(E.1)得

$$\omega_1^2, \omega_2^2 = 1588.46 \pm (1588.46^2 - 26.3750 \times 10^4)^{1/2} = 1588.46 \pm 1503.1483$$

故

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= 85.3117 \quad \text{或} \quad \omega_1 = 9.2364 \text{ rad/s} \\ \omega_2^2 &= 3091.6083 \quad \text{或} \quad \omega_2 = 55.6022 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

为求主振型, 在式(5.11)中令 $m_1 = J_1, m_2 = J_2, k_1 = k_{t1}, k_2 = k_{t2}, k_3 = 0$, 可得

$$\begin{cases} r_1 = \frac{-J_1\omega_1^2 + k_{t1} + k_{t2}}{k_{t2}} = \frac{-1850 \times 85.3117 + 495.7837 \times 10^4}{397.6087 \times 10^4} = 1.2072 \\ r_2 = \frac{-J_1\omega_2^2 + k_{t1} + k_{t2}}{k_{t2}} = \frac{-1850 \times 3091.6083 + 495.7837 \times 10^4}{397.6087 \times 10^4} = -0.1916 \end{cases}$$

与式(5.12)类似, 扭振的主振型如下:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{Bmatrix}^{(1)} &= \begin{Bmatrix} 1 \\ r_1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{1.2072} \\ \begin{Bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{Bmatrix}^{(2)} &= \begin{Bmatrix} 1 \\ r_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{-0.1916} \end{aligned}$$

5.5 坐标耦合与主坐标

如前所述,一个具有 n 个自由度的系统需要 n 个独立的坐标来描述其空间构形。通常情况下,这些坐标是从系统平衡位置量起的几何量,往往是互相联系的。然而找到另外一组坐标来描述系统的空间构形也是可行的。后面的这一组坐标与所选的第一组坐标的不同之处在于它们的坐标原点不在系统的平衡位置处。还可能另外一组坐标也能用来描述系统的空间构形。这样的每一组坐标都称为广义坐标(generalized coordinates)。

作为一个例子,考虑图 5.9(a)所示的车床。此物理系统的准确模型应把床身看成是一个支承在弹性柱上的弹性梁且附有一个集中质量,如图 5.9(b)所示。然而,对于简化的振动分析,却可以把它看成是一个具有质量和转动惯量的刚性体,主轴箱和尾架都用集中质量代替,整个床身可以看成是支承在两端的弹簧上。所以后面的这个模型是一个刚体模型,其质量是 m ,绕重心的转动惯量是 J ,支承在刚度系数分别为 k_1 和 k_2 的两个弹簧上,如图 5.10(a)所示。对于这个二自由度系统,下列几组坐标都可以描述其运动:

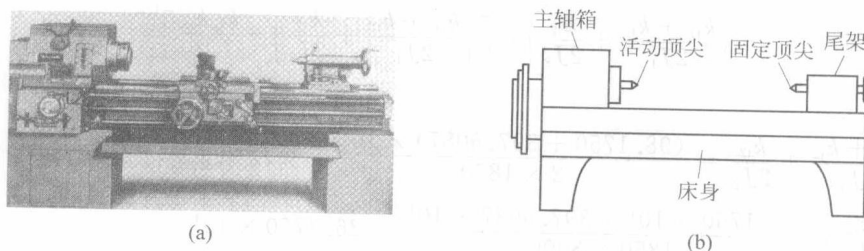


图 5.9 车床

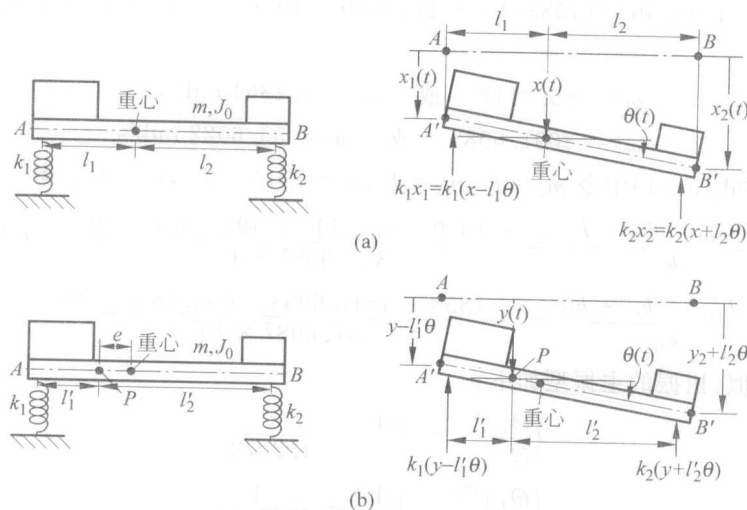


图 5.10 车床的简化模型

- (1) AB 两个端点的偏移量 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$;
- (2) AB 重心的偏移量 $x(t)$ 和相应的转角 $\theta(t)$;
- (3) 端点 A 的偏移量 $x_1(t)$ 和相应的转角 $\theta(t)$;
- (4) 重心左侧距重心为 e 的点 P 的偏移量 $y(t)$ 和相应的转角 $\theta(t)$ 。

所以 $(x_1, x_2), (x, \theta), (x_1, \theta), (y, \theta)$ 中的任意一组坐标都代表了系统的广义坐标。下面用两组不同的坐标来推导车床的运动微分方程, 并说明坐标耦合的概念。

1. 用 $x(t)$ 和 $\theta(t)$ 表示的运动微分方程

根据图 5.10(a) 所示的受力分析和选定的正方向, 可知竖直方向力的平衡方程为

$$m\ddot{x} = -k_1(x - l_1\theta) - k_2(x + l_2\theta) \quad (5.21)$$

绕重心的转动运动微分方程为

$$J_0\ddot{\theta} = k_1(x - l_1\theta)l_1 - k_2(x + l_2\theta)l_2 \quad (5.22)$$

式(5.21)和式(5.22)可以重新写成如下矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -(k_1l_1 - k_2l_2) \\ -(k_1l_1 - k_2l_2) & k_1l_1^2 + k_2l_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.23)$$

可以看出, 每一个方程中都同时包含 x 和 θ 。如果耦合项的系数 $k_1l_1 - k_2l_2$ 为零, 即 $k_1l_1 = k_2l_2$, 则 x 和 θ 将互相独立。如果 $k_1l_1 \neq k_2l_2$, 则当有一个线位移或角位移作为初始条件作用在其重心上时, 车床 AB 的运动既有平动成分又有转动成分。换句话说, 车床在竖直平面内转动的同时又有竖直方向的平动, 除非 $k_1l_1 = k_2l_2$ 。这种情况称为弹性耦合 (elastic coupling) 或静力耦合 (static coupling)。

2. 用 $y(t)$ 和 $\theta(t)$ 表示的运动微分方程

图 5.10(b) 中, 用 $y(t)$ 和 $\theta(t)$ 作为广义坐标, 平动和转动成分的运动微分方程分别为

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{y} &= -k_1(y - l'_1\theta) - k_2(y + l'_2\theta) - me\ddot{\theta} \\ J_0\ddot{\theta} &= k_1(y - l'_1\theta)l'_1 - k_2(y + l'_2\theta)l'_2 - me\ddot{y} \end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

这两个方程可以重新写成如下矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} m & me \\ me & J_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2l'_2 - k_1l'_1 \\ -k_1l'_1 + k_2l'_2 & k_1l'^2_1 + k_2l'^2_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.25)$$

式(5.25)中的每一个方程都同时包含 y 和 θ , 所以它们是耦合的。除了静力(弹性)耦合项外还有动力(质量)耦合项。如果 $k_1l'_1 = k_2l'_2$, 系统将只有动力(或叫惯性)耦合。在这种情况下, 如果车床在 y 方向作上下运动, 作用在刚体重心的惯性力 $m\ddot{y}$ 将由于力矩 $me\ddot{y}$ 引起 θ 方向的运动。与此类似, θ 方向的运动也将由于力 $me\ddot{\theta}$ 引起 y 方向的运动。

注意这些方程的下列特性:

(1) 在大多数情况下,含黏性阻尼的二自由度系统具有如下形式的运动微分方程,即

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.26)$$

由方程(5.26)可以看出一个方程中可能包含的耦合种类。如果刚度矩阵不是对角的,系统就含有弹性(或叫静力)耦合。如果阻尼矩阵不是对角的,系统就含有阻尼(或叫速度)耦合。如果质量矩阵不是对角的,系统就含有质量(或叫惯性)耦合。速度耦合和质量耦合都叫动力耦合。

(2) 系统按其固有方式所作的振动与选取的坐标没有关系。选用不同的坐标只是为了研究问题的方便。

(3) 从方程(5.23)和方程(5.25)可以看出,耦合项的出现与选取的坐标有关并不是系统本身的固有特性。找到这样一组坐标 $q_1(t)$ 和 $q_2(t)$ 是可能的,它们可以使系统的运动微分方程既不含静力耦合也不含动力耦合。这样的坐标称为主坐标(principal coordinate)或自然坐标(natural coordinate)。采用主坐标的主要优点是得到的非耦合运动微分方程彼此可以独立求解。下面的例子说明了根据几何坐标寻求主坐标的方法。

例 5.6 求图 5.4 所示弹簧-质量系统的主坐标。

解: 可以定义两个独立的解作为主坐标,并将它们用 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 表示。图 5.4 所示系统的一般运动由例 5.1 中的式(E.10)给出,即

$$\begin{cases} x_1(t) = B_1 \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi_1 \right) + B_2 \cos \left(\sqrt{\frac{3k}{m}} t + \phi_2 \right) \\ x_2(t) = B_1 \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi_1 \right) - B_2 \cos \left(\sqrt{\frac{3k}{m}} t + \phi_2 \right) \end{cases} \quad (E.1)$$

式中, $B_1 = X_1^{(1)}$, $B_2 = X_1^{(2)}$; ϕ_1, ϕ_2 是待定常量。定义新的坐标 $q_1(t)$ 和 $q_2(t)$,使之满足

$$\begin{cases} q_1(t) = B_1 \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi_1 \right) \\ q_2(t) = B_2 \cos \left(\sqrt{\frac{3k}{m}} t + \phi_2 \right) \end{cases} \quad (E.2)$$

既然 $q_1(t)$ 和 $q_2(t)$ 是简谐函数,则相应的运动微分方程为^①

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + \left(\frac{k}{m} \right) q_1 = 0 \\ \ddot{q}_2 + \left(\frac{3k}{m} \right) q_2 = 0 \end{cases} \quad (E.3)$$

① 注意:与解 $q = B \cos(\omega t + \phi)$ 对应的运动微分方程的形式为 $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$ 。

这样的两个方程代表了固有频率分别为 $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 和 $\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$ 的一个二自由度系统。由于式(E.3)中既没有静力耦合也没有动力耦合,所以 $q_1(t)$ 和 $q_2(t)$ 就是主坐标。根据式(E.1)和式(E.2)有

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= q_1(t) + q_2(t) \\ x_2(t) &= q_1(t) - q_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (\text{E.4})$$

式(E.4)的解给出如下的主坐标:

$$\left. \begin{aligned} q_1(t) &= \frac{1}{2}[x_1(t) + x_2(t)] \\ q_2(t) &= \frac{1}{2}[x_1(t) - x_2(t)] \end{aligned} \right\} \quad (\text{E.5})$$

例 5.7 求汽车俯仰振动(角运动)和跳动(上下垂直振动)的频率以及振动中心(结点)的位置(见图 5.11)。参数如下:质量 $m=1000 \text{ kg}$, 回转半径 $r=0.9 \text{ m}$, 前轴距重心的距离 $l_1=1.0 \text{ m}$, 后轴距重心的距离 $l_2=1.5 \text{ m}$, 前弹簧刚度 $k_f=18 \text{ kN/m}$, 后弹簧刚度 $k_r=22 \text{ kN/m}$ 。

解: 如果选择 x 和 θ 作为两个独立的坐标,系统的运动微分方程可以通过在式(5.23)中令 $k_1=k_f, k_2=k_r$ 和 $J_0=mr^2$ 得到。对于自由振动,设有如下形式的简谐解:

$$x(t) = X \cos(\omega t + \phi), \quad \theta(t) = \Theta \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{E.1})$$

利用式(E.1)和式(5.23)可得

$$\begin{bmatrix} -m\omega^2 + k_1 + k_2 & -k_1 l_1 + k_2 l_2 \\ -k_1 l_1 + k_2 l_2 & -J_0 \omega^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ \Theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{E.2})$$

代入已知数据,式(E.2)为

$$\begin{bmatrix} -1000\omega^2 + 40\,000 & 15\,000 \\ 15\,000 & -810\omega^2 + 67\,500 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ \Theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{E.3})$$

据此可得如下频率方程:

$$8.1\omega^4 - 999\omega^2 + 24\,750 = 0 \quad (\text{E.4})$$

式(E.4)的解给出如下两个固有频率:

$$\omega_1 = 5.8593 \text{ rad/s}, \quad \omega_2 = 9.4341 \text{ rad/s} \quad (\text{E.5})$$

根据式(E.3),与这两个频率对应的振幅比为

$$\frac{X^{(1)}}{\Theta^{(1)}} = -2.6461, \quad \frac{X^{(2)}}{\Theta^{(2)}} = 0.3061 \quad (\text{E.6})$$

由于结点的位置可以通过一个小角度的正切近似等于这个角度本身来确定,所以根据图 5.12 可以确定与 ω_1 和 ω_2 对应的两个结点距重心的距离分别为 -2.6461 m 和 0.3061 m 。主振型在图 5.12 中用虚线表示。

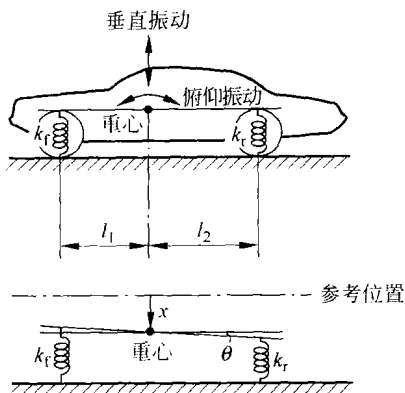


图 5.11 汽车的俯仰振动和上下垂直振动

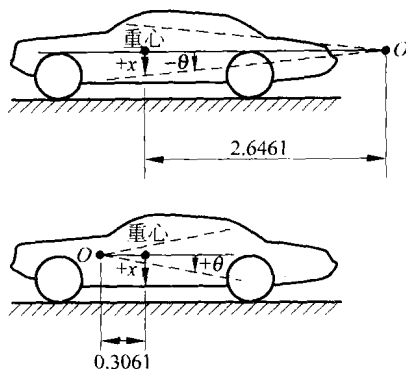


图 5.12 汽车俯仰振动和上下垂直振动的主振型

5.6 受迫振动分析

通常情况下,一个受外部激励的二自由度系统的运动微分方程为

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (5.27)$$

方程(5.1)和方程(5.2)可以看成是方程(5.27)在 $m_{11}=m_1, m_{22}=m_2$ 和 $m_{12}=0$ 时的特例。下面考虑外部激励为下列形式简谐力的情况:

$$F_j(t) = F_{j0} e^{i\omega t}, \quad j = 1, 2 \quad (5.28)$$

式中, ω 是外部激励的频率。式(5.27)的稳态解为

$$x_j(t) = X_j e^{i\omega t}, \quad j = 1, 2 \quad (5.29)$$

一般地说,式中 X_1 和 X_2 是复数,并且取决于激励频率 ω 和系统参数。将式(5.28)和式(5.29)代入式(5.27)可得

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 m_{11} + i\omega c_{11} + k_{11} & -\omega^2 m_{12} + i\omega c_{12} + k_{12} \\ -\omega^2 m_{12} + i\omega c_{12} + k_{12} & -\omega^2 m_{22} + i\omega c_{22} + k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix} \quad (5.30)$$

与在 3.5 节类似,定义机械阻抗 $Z_{rs}(i\omega)$ 如下

$$Z_{rs}(i\omega) = -\omega^2 m_{rs} + i\omega c_{rs} + k_{rs}, \quad r, s = 1, 2 \quad (5.31)$$

并把式(5.30)写成如下形式:

$$[Z(i\omega)] \mathbf{X} = \mathbf{F}_0 \quad (5.32)$$

其中

$$[Z(i\omega)] = \begin{bmatrix} Z_{11}(i\omega) & Z_{12}(i\omega) \\ Z_{12}(i\omega) & Z_{22}(i\omega) \end{bmatrix} = \text{阻抗矩阵}, \quad \mathbf{X} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F}_0 = \begin{Bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix}$$

式(5.32)的解可以写成如下形式:

$$\mathbf{X} = [\mathbf{Z}(i\omega)]^{-1} \mathbf{F}_0 \quad (5.33)$$

式中,阻抗矩阵的逆矩阵为

$$[\mathbf{Z}(i\omega)]^{-1} = \frac{1}{Z_{11}(i\omega)Z_{22}(i\omega) - Z_{12}^2(i\omega)} \begin{bmatrix} Z_{22}(i\omega) & -Z_{12}(i\omega) \\ -Z_{12}(i\omega) & Z_{11}(i\omega) \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

由式(5.33)和式(5.34)可得如下形式的解:

$$\left. \begin{aligned} X_1(i\omega) &= \frac{Z_{22}(i\omega)F_{10} - Z_{12}(i\omega)F_{20}}{Z_{11}(i\omega)Z_{22}(i\omega) - Z_{12}^2(i\omega)} \\ X_2(i\omega) &= \frac{-Z_{12}(i\omega)F_{10} + Z_{11}(i\omega)F_{20}}{Z_{11}(i\omega)Z_{22}(i\omega) - Z_{12}^2(i\omega)} \end{aligned} \right\} \quad (5.35)$$

把式(5.35)代入式(5.29)后就可得解 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的完整形式。

在 9.11 节,我们将把一个二自由度系统作为一个吸振器的例子来讨论。参考文献[5.4]讨论了一个二自由度系统的冲击响应问题,参考文献[5.5]讨论了一个二自由度系统在简谐激励下的稳态响应问题。

例 5.8 求图 5.13 所示系统当质量 m_1 受到激励力 $F_1(t) = F_{10} \cos \omega t$ 作用时的稳态响应,并画出频响曲线。

解: 系统的运动微分方程为

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{10} \cos \omega t \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{E.1})$$

比较式(E.1)和式(5.27)可知

$$m_{11} = m_{22} = m, \quad m_{12} = 0, \quad c_{11} = c_{12} = c_{22} = 0$$

$$k_{11} = k_{22} = 2k, \quad k_{12} = -k, \quad F_1 = F_{10} \cos \omega t, \quad F_2 = 0$$

假设式(E.1)的解为^①

$$x_j(t) = X_j \cos \omega t, \quad j = 1, 2 \quad (\text{E.2})$$

由式(5.31)得

$$Z_{11}(\omega) = Z_{22}(\omega) = -m\omega^2 + 2k, \quad Z_{12}(\omega) = -k \quad (\text{E.3})$$

所以由式(5.35)得

$$X_1(\omega) = \frac{(-\omega^2 m + 2k)F_{10}}{(-\omega^2 m + 2k)^2 - k^2} = \frac{(-\omega^2 m + 2k)F_{10}}{(-\omega^2 m + 3k)(-\omega^2 m + k)} \quad (\text{E.4})$$

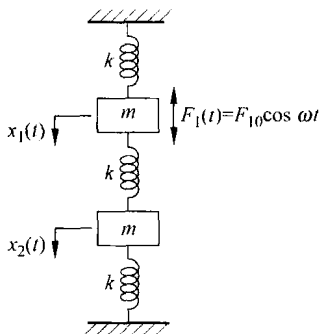


图 5.13 受简谐激励的弹簧-质量系统

① 既然 $F_{10} \cos \omega t$ 是 $F_{10} e^{i\omega t}$ 的实部,我们将假设解也是 $X_j e^{i\omega t}$ 的实部,即可以证明,对无阻尼系统, X_j 为实数。

$$X_2(\omega) = \frac{kF_{10}}{(-\omega^2 m + 2k)^2 - k^2} = \frac{kF_{10}}{(-\omega^2 m + 3k)(-\omega^2 m + k)} \quad (\text{E. 5})$$

令 $\omega_1^2 = k/m, \omega_2^2 = 3k/m$, 代入式(E. 4)和式(E. 5)得

$$X_1(\omega) = \frac{\left\{2 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right\} F_{10}}{k \left[\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 \right]} \quad (\text{E. 6})$$

$$X_2(\omega) = \frac{F_{10}}{k \left[\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 \right]} \quad (\text{E. 7})$$

无量纲振幅 $X_1 k/F_{10}$ 和 $X_2 k/F_{10}$ 与无量纲参数 ω/ω_1 的关系如图 5.14 所示。无量纲参数 ω/ω_1 中的 ω_1 是任选的, 也可以选 ω_2 对 ω 进行无量纲化。不难看出, 当 $\omega^2 = \omega_1^2$ 或 $\omega^2 = \omega_2^2$ 时, 振幅 X_1 和 X_2 将趋于无穷大。所以系统有两个发生共振的条件: 一个发生在 ω_1 处, 另一个发生在 ω_2 处。对于其他的 ω , 振幅值是有限的。从图 5.14 还可以看出, 存在一个特殊的 ω 值, 使受激的质量 m_1 的振动为零。这个现象就是要在第 9 章讨论的动力吸振器的原理。

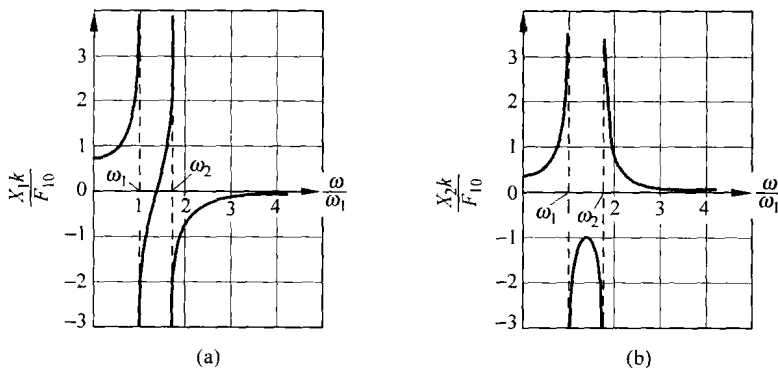


图 5.14 例 5.8 的频响曲线

5.7 半正定系统

半正定系统(semidefinite systems)也叫非约束系统(unrestrained systems)或退化系统(degenerate systems)。图 5.15 中给出了两个这样的例子。图 5.15(a)可以看成是行驶在铁轨上质量分别为 m_1 和 m_2 的两节车厢由刚度系数为 k 的弹簧连接在一起的情况。图 5.15(b)可以看成是转动惯量分别为 J_1 和 J_2 的两个圆盘由抗扭刚度系数为 k_t 的一根轴连接在一起的情况。图 5.15(a) 所示系统的运动微分方程为

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = 0 \end{cases} \quad (5.36)$$

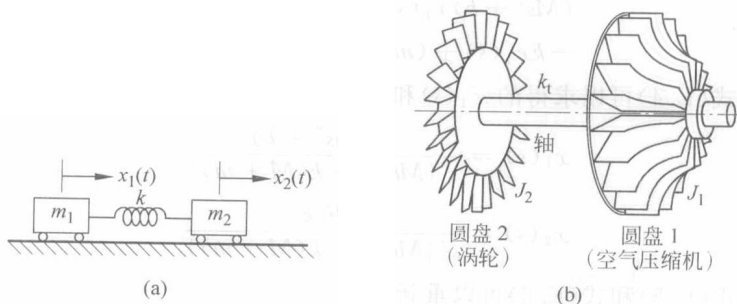


图 5.15 半正定系统

对于自由振动,设解是简谐的,即

$$x_j(t) = X_j \cos(\omega t + \phi_j), \quad j = 1, 2 \quad (5.37)$$

将式(5.37)代入式(5.36)可得

$$\left. \begin{aligned} (-m_1\omega^2 + k)X_1 - kX_2 &= 0 \\ -kX_1 + (-m_2\omega^2 + k)X_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.38)$$

在式(5.38)中令关于 X_1 和 X_2 的系数矩阵的行列式为零,得

$$\omega^2 [m_1 m_2 \omega^2 - k(m_1 + m_2)] = 0 \quad (5.39)$$

由频率方程(5.39)可求得系统的两个固有频率为

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}} \quad (5.40)$$

可见该系统的一个固有频率为零,这表明系统并没有振动。换句话说,系统运动时两个质量块并没有任何相对运动,而是作刚性平动。这样的具有一个零固有频率的系统称为半正定系统。将 ω_2 代入式(5.38)可以证明,当系统以 ω_2 作自由振动时, $X_1^{(1)}$ 和 $X_2^{(2)}$ 符号相反,两个质量块的运动是反相的。因此在连接弹簧上存在一个结点。

例 5.9 设图 5.15(a) 连接弹簧的刚度为 k , 质量分别为 $m_1 = M, m_2 = m$ 。若 m_1 受到一个瞬时冲击力 $F_0 \delta(t)$ 的作用,用拉普拉斯变换方法求系统的响应。

解: 可以用下列两种方法之一求质量块的响应。

(a) 按系统作自由振动考虑,此时 M 受到一个脉冲的作用而获得一个初始速度。

(b) 按系统作受迫振动考虑,此时 M 受到力 $F(t) = F_0 \delta(t)$ 的作用(认为 M 和 m 的初始位移和初始速度均为零)。

根据第二种方法,系统的运动微分方程为

$$M \ddot{x}_1 + kx_1 - kx_2 = F_0 \delta(t) \quad (E.1)$$

$$m \ddot{x}_2 - kx_1 + kx_2 = 0 \quad (E.2)$$

利用拉普拉斯变换,式(E.1)和式(E.2)可以重新写为

$$(Ms^2 + k)\bar{x}_1(s) - kx_2(s) = F_0 \quad (\text{E. 3})$$

$$-kx_1(s) + (ms^2 + k)x_2(s) = 0 \quad (\text{E. 4})$$

根据式(E. 3)和式(E. 4)可以求得的 $x_1(s)$ 和 $\bar{x}_2(s)$ 为

$$\bar{x}_1(s) = \frac{F_0(ms^2 + k)}{s^2\{Mms^2 + k(M+m)\}} \quad (\text{E. 5})$$

$$x_2(s) = \frac{F_0k}{s^2\{Mms^2 + k(M+m)\}} \quad (\text{E. 6})$$

利用部分分式, 式(E. 5)和式(E. 6)可以重新写成

$$\bar{x}_1(s) = \frac{F_0}{M+m} \left(\frac{1}{s^2} + \frac{m}{\omega M} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right) \quad (\text{E. 7})$$

$$\bar{x}_2(s) = \frac{F_0}{M+m} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{\omega} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right) \quad (\text{E. 8})$$

式中

$$\omega^2 = k \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) \quad (\text{E. 9})$$

式(E. 7)和式(E. 8)的逆变换如下, 它们给出了两个质量块的响应随时间的变化规律:

$$x_1(t) = \frac{F_0}{M+m} \left(t + \frac{m}{\omega M} \sin \omega t \right) \quad (\text{E. 10})$$

$$x_2(t) = \frac{F_0}{M+m} \left(t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right) \quad (\text{E. 11})$$

注: 式(E. 10)和式(E. 11)反映的 x_1 和 x_2 随时间的变化关系绘于例 5.13 中。

5.8 自激振动与稳定性分析

在 3.11 节讲过, 一个单自由度系统的稳定条件可以用系统的物理常数表示。本节把这样的问题推广到二自由度系统。一个受自激力的系统, 其激励力可能是与阻尼项或刚度项联系在一起的。系统的运动微分方程可以写成如下形式:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.41)$$

令其解的形式为

$$x_j(t) = X_j e^{it}, \quad j = 1, 2 \quad (5.42)$$

代入式(5.41)后令系数矩阵的行列式为零, 得如下形式的频率方程:

$$a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0 \quad (5.43)$$

系数 a_0, a_1, a_2, a_3 和 a_4 均为实数, 因为它们都是由系统的物理参数推得的。如果 s_1, s_2, s_3 和 s_4 是式(5.43)的根, 则

$$(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)(s-s_4)=0$$

或

$$\begin{aligned} & s^4 - (s_1 + s_2 + s_3 + s_4)s^3 + (s_1s_2 + s_1s_3 + s_1s_4 + s_2s_3 + s_2s_4 + s_3s_4)s^2 \\ & - (s_1s_2s_3 + s_1s_2s_4 + s_1s_3s_4 + s_2s_3s_4)s + s_1s_2s_3s_4 = 0 \end{aligned} \quad (5.44)$$

比较式(5.43)和式(5.44)可得

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= -(s_1 + s_2 + s_3 + s_4) \\ a_2 &= s_1s_2 + s_1s_3 + s_1s_4 + s_2s_3 + s_2s_4 + s_3s_4 \\ a_3 &= -(s_1s_2s_3 + s_1s_2s_4 + s_1s_3s_4 + s_2s_3s_4) \\ a_4 &= s_1s_2s_3s_4 \end{aligned} \right\} \quad (5.45)$$

稳定性准则是 $s_i (i=1, 2, 3, 4)$ 的实部必须是负的, 从而避免式(5.42)中出现随时间增加的幂指数。根据四次代数方程的特性, 可以得出稳定的充分与必要条件是方程的全部系数 (a_0, a_1, \dots, a_4) 均为正数且满足如下条件(见参考文献[5.8]和[5.9]):

$$a_1a_2a_3 > a_0a_3^2 + a_4a_1^2 \quad (5.46)$$

一个可用于讨论 n 自由度系统稳定性的更一般方法称为罗斯-霍尔威茨(Routh-Hurwitz)准则(见参考文献[5.10])。对于现在考虑的系统即式(5.43), 根据罗斯-霍尔威茨准则, 稳定的条件是全部系数 a_0, a_1, \dots, a_4 均为正数且下列行列式的值为正:

$$T_1 = |a_1| > 0 \quad (5.47)$$

$$T_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_0a_3 > 0 \quad (5.48)$$

$$T_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - a_0a_3^2 > 0 \quad (5.49)$$

式(5.47)说明 a_1 必须为正, 但式(5.49)与 $a_3 > 0, a_4 > 0$ 可以保证式(5.48)成立。所以系统稳定的充分与必要条件是系数 a_0, a_1, a_2, a_3 和 a_4 均为正, 且满足不等式(5.46)。

5.9 利用 MATLAB 求解的例子

例 5.10 利用 MATLAB 求下列问题的固有频率和主振型:

$$\left[-\omega^2 m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right] \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (\text{E. } 1)$$

解: 特征值问题(E.1)可以重新写成

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{X} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X} \quad (\text{E. } 2)$$

其中, $\lambda = m\omega^2/k$ 是特征值; ω 是固有频率; \mathbf{X} 是特征向量或主振型。所以式(E. 2)的解可以借助于 MATLAB 得到, 形式如下:

```
>>A=[2 -1; -1 2]
A=
    2    -1
   -1     2

>>[V,D]=eig(A)

V=
   -0.7071   -0.7071
    0.7071   -0.7071

D=
    3.0000     0
     0         1.0000
```

所以特征值是 $\lambda_1 = 1.0$ 和 $\lambda_2 = 3.0$, 相应的特征向量是

$$\mathbf{X}_1 = \begin{Bmatrix} -0.7071 \\ -0.7071 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{Bmatrix} -0.7071 \\ 0.7071 \end{Bmatrix}$$

例 5.11 利用 MATLAB 求如下四次代数方程的根:

$$f(x) = x^4 - 8x + 12 = 0$$

解: 利用 MATLAB 指令 roots 可以得到四阶多项式的根为

$$x_{1,2} = -1.37091 \pm 1.82709i$$

$$x_{3,4} = 1.37091 \pm 0.648457i$$

```
>>roots ([1 0 0 -8 12])

ans=
   -1.3709+1.8271i
   -1.3709-1.8271i
    1.3709+0.6485i
    1.3709-0.6485i

>>
```

例 5.12 利用 MATLAB 作图表示例 5.3 中 m_1 和 m_2 的自由振动响应。

解: 例 5.3 中 m_1 和 m_2 的自由振动响应由式(E. 15)和式(E. 16)给出。作图表示响应(E. 15)和(E. 16)的 MATLAB 程序如下:

```

% E5_3.m
for i=1: 501
    t(i)=20 * (i-1)/500;
    x1(i)=(5/7) * cos(1.5811 * t(i)) + (2/7) * cos(2.4495 * t(i));
    x2(i)=(10/7) * cos(1.5811 * t(i)) - (10/7) * cos(2.4495 * t(i));
end
subplot(211);
plot(t, x1);
xlabel('t');
ylabel('x1(t)');
subplot(212);
plot(t, x2);
xlabel('t');
ylabel('x2(t)');

```

所绘图形如图 5.16 所示。

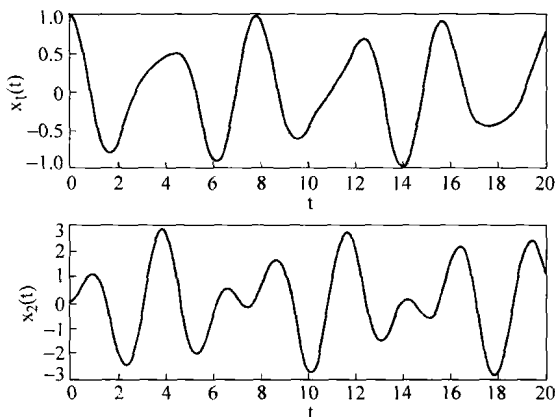


图 5.16 例 5.12 图

例 5.13 利用 MATLAB 作图表示例 5.9 中两个车厢的响应, 参数取 $F_0 = 1500 \text{ N}$, $M = 5000 \text{ kg}$, $m = 2500 \text{ kg}$, $k = 10^4 \text{ N/m}$ 。

解: 根据 5.9 中的式(E.10)和式(E.11), 代入已知数据, 两车厢的响应为

$$x_1(t) = 0.2(t + 0.204124\sin 2.44949t) \quad (\text{E.1})$$

$$x_2(t) = 0.2(t - 0.408248\sin 2.44949t) \quad (\text{E.2})$$

式中

$$\omega^2 = 10^4 \left(\frac{1}{5000} + \frac{1}{2500} \right) \quad \text{或} \quad \omega = 2.44949 \text{ rad/s} \quad (\text{E.3})$$

作图表示式(E.1)和式(E.2)的 MATLAB 程序如下:

```

%Ex5_13.m
for i=1:101
    t(i)=6*(i-1)/100;
    x1(i)=0.2*(t(i)+0.204124*sin(2.44949*t(i)));
    x2(i)=0.2*(t(i)-0.408248*sin(2.44949*t(i)));
end
plot(t, x1);
xlabel('t');
ylabel('x1(t), x2(t)');
hold on;
plot(t, x2, '--');
gtext('x1:Solid line');
gtext('x2:Dotted line');

```

所绘曲线如图 5.17 所示。

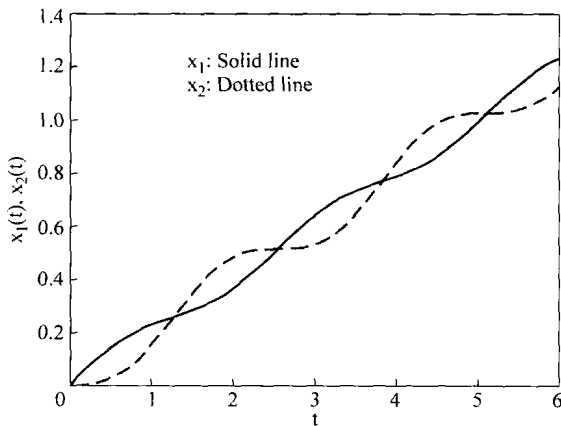


图 5.17 例 5.13 图

例 5.14 利用 MATLAB 作图表示例 5.8 中系统的频响函数。

解：例 5.8 中，频响函数 $X_1(\omega)$ 和 $X_2(\omega)$ 由式 (E.6) 和式 (E.7) 给出，形式如下：

$$\frac{X_1(\omega)k}{F_{10}} = \frac{2 - \lambda^2}{(\lambda_2^2 - \lambda^2)(1 - \lambda^2)} \quad (\text{E. 1})$$

$$\frac{X_2(\omega)k}{F_{10}} = \frac{1}{(\lambda_2^2 - \lambda^2)(1 - \lambda^2)} \quad (\text{E. 2})$$

式中， $\lambda = \omega/\omega_1$ ， $\lambda_2 = \omega_2/\omega_1$ 。根据例 5.8 中的结果， $\lambda_2 = \omega_2/\omega_1 = (3k/m)/(k/m) = 3$ 。作图表示式 (E.1) 和式 (E.2) 的 MATLAB 程序如下：

```

%Ex5_14.m
for i=1:101
    w_w1(i)=5*(i-1)/100;%0 to 5
    x1(i)=(2-w_w1(i)^2)/((3-w_w1(i)^2)*(1-w_w1(i)^2));
    x2(i)=1/((3-w_w1(i)^2)*(1-w_w1(i)^2));
end
subplot(211);
plot(w_w1, x1);
xlabel('w/w_1');
ylabel('x_1 * k/F_1_0');
grid on;
subplot(212);
plot(w_w1, x2);
xlabel('w/w_1');
ylabel('x_2 * k/F_1_0');
grid on

```

所绘曲线如图 5.18 所示。

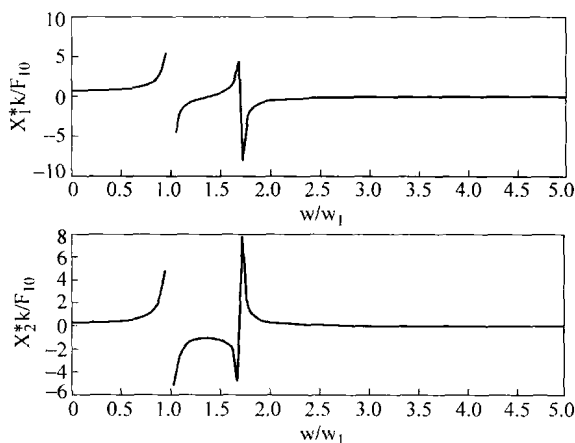


图 5.18 例 5.14 图

例 5.15 求下列运动微分方程所代表的系统的响应,并作图表示。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \cos 3t \quad (\text{E. 1})$$

初始条件为

$$x_1(0) = 0.2, \quad \dot{x}_1(0) = 1.0, \quad x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \quad (\text{E. 2})$$

解: 为了利用 MATLAB 指令 ode23, 两个耦合的二阶微分方程(E.1)应改写为一个耦

合的一阶常微分方程组。为此引入如下新的变量:

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = \dot{x}_1, \quad y_3 = x_2, \quad y_4 = \dot{x}_2$$

据此,式(E.1)重写为

$$\ddot{x}_1 + 4\dot{x}_1 - \dot{x}_2 + 5x_1 - 2x_2 = \cos 3t \quad (\text{E.3})$$

或

$$\dot{y}_2 = \cos 3t - 4y_2 + y_4 - 5y_1 + 2y_3 \quad (\text{E.4})$$

和

$$2\ddot{x}_2 - \dot{x}_1 + 2\dot{x}_2 - 2x_1 + 3x_2 = 2\cos 3t \quad (\text{E.5})$$

或

$$\dot{y}_4 = \cos 3t + \frac{1}{2}y_2 - y_4 + y_1 - \frac{3}{2}y_3 \quad (\text{E.6})$$

所以式(E.1)可以重写为

$$\begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_2 \\ \cos 3t - 4y_2 + y_4 - 5y_1 + 2y_3 \\ y_4 \\ \cos 3t + \frac{1}{2}y_2 - y_4 + y_1 - \frac{3}{2}y_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{E.7})$$

初始条件为

$$\mathbf{y}(0) = \begin{Bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \\ y_4(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.2 \\ 1.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix} \quad (\text{E.8})$$

求解方程(E.7)(初始条件为式(E.8))的 MATLAB 程序如下:

```
%Ex5_15.m
tspan=[0:0.01:20];
y0=[0.2;1.0;0.0;0.0]
[t,y]=ode23('dfunc5_15',tspan,y0);
subplot(211)
plot(t,y(:,1));
xlabel('t');
ylabel('x1(t)');
subplot(212)
plot(t,y(:,3));
xlabel('t');
```

```

ylabel('x2(t)');

%dfunc5_15.m
function f=dfunc5_15(t,y)
f=zeros(4,1);
f(1)=y(2);
f(2)=cos(3*t)-4*y(2)+y(4)-5*y(1)+2*y(3);
f(3)=y(4);
f(4)=cos(3*t)+0.5*y(2)-y(4)+y(1)-1.5*y(3);

```

所绘曲线如图 5.19 所示。

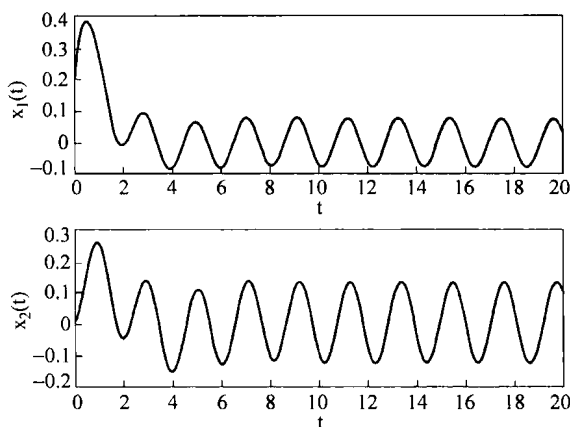


图 5.19 例 5.15 图

例 5.16 编写一个文件名为 Program6.m 的通用程序求四次代数方程的根。利用这个程序求解如下方程：

$$f(x) = x^4 - 8x + 12 = 0$$

解：编写程序 Program6.m 以求解方程 $a_1 * (x^4) + a_2 * (x^3) + a_3 * (x^2) + a_4 * x + a_5 = 0$ ，其中 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 作为输入数据。程序执行后输出多项式的系数和方程的根。

```

>>program6
Solution of a quartic equation
Data:
a(1)=1.000000e+000
a(2)=0.000000e+000
a(3)=0.000000e+000
a(4)=-8.000000e+000
a(5)=1.200000e+001

```

Roots:

Root No.	Real part	Imaginary part
1	-1.370907e+000	1.827094e+000
2	-1.370907e+000	-1.827094e+000
3	1.370907e+000	6.484572e-001
4	1.370907e+000	-6.484572e-001

5.10 C++ 程序

也可以利用一个交互式的 C++ 程序求高次代数方程的根。编写程序时可以把方程中各次项的系数作为输入数据。

例 5.17 编写一个命名为 Program6. cpp 的程序求四次代数方程 $f(x) = x^4 - 8x + 12 = 0$ 的根。

解：程序执行后从键盘键入需要输入的数据。程序的输入和输出如下：

```
Please input the coefficient array a (a[0] is the coefficient of x^4 and nonzero):1.
0 0.0 0.0 -8.0 12.0
SOLUTION OF QUARTIC EQUATION
DATA:
A[0]=1.000000
A[1]=0.000000
A[2]=0.000000
A[3]=-8.000000
A[4]=12.000000

ROOTS:
ROOT NO.      REAL PART      IMAGINARY PART
1             -1.37090672    1.82709433
2             -1.37090672    -1.82709433
3             1.37090672    0.64845723
4             1.37090672    -0.64845723
```

5.11 Fortran 程序

同样可以利用 Fortran 程序求高次代数方程的根。编写程序时也把方程中各次项的系数作为输入数据。

例 5.18 编写一个命名为 QUART. F 的 Fortran 程序求四次代数方程 $f(x) = x^4 - 8x + 12 = 0$ 的根。

解：调用子程序 QUART.F 的主程序名为 PROGRAM6.F。执行后从键盘键入需要输入的数据。程序的输入和输出如下：

```
SOLUTION OF A QUARTIC EQUATION
DATA:
A[1]=0.100000E+01
A[2]=0.000000E+00
A[3]=0.000000E+00
A[4]=-0.800000E+01
A[5]=0.120000E+02

ROOTS:
ROOT NO.      REAL PART      IMAGINARY PART
1             -0.137091E+01      0.182709E+01
2             -0.137091E+01     -0.182709E+01
3              0.137091E+01      0.648457E+00
4              0.137091E+01     -0.648457E+00
```

参 考 文 献

- 5.1 H. Sato, Y. Kuroda, and M. Sagara, "Development of the finite element method for vibration analysis of machine tool structure and its application," *Proceedings of the Fourteenth International Machine Tool Design and Research Conference*, Macmillan, London, 1974, pp. 545-552.
- 5.2 F. Koenigsberger and J. Tlustý, *Machine Tool Structures*, Pergamon Press, Oxford, 1970.
- 5.3 C. P. Reddy and S. S. Rao, "Automated optimum design of machine tool structures for static rigidity, natural frequencies and regenerative chatter stability," *Journal of Engineering for Industry*, Vol. 100, 1978, pp. 137-146.
- 5.4 M. S. Hundal, "Effect of damping on impact response of a two degree of freedom system," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 68, 1980, pp. 407-412.
- 5.5 J. A. Linnett, "The effect of rotation on the steady-state response of a spring-mass system under harmonic excitation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 35, 1974, pp. 1-11.
- 5.6 A. Hurwitz, "On the conditions under which an equation has only roots with negative real parts," in *Selected Papers on Mathematical Trends in Control Theory*, Dover Publications, New York, 1964, pp. 70-82.
- 5.7 R. C. Dorf, *Modern Control Systems* (6th ed.), Addison-Wesley, Reading, Mass., 1992.
- 5.8 J. P. Den Hartog, *Mechanical Vibrations* (4th ed.), McGraw-Hill, New York, 1956.
- 5.9 R. H. Scanlan and R. Rosenbaum, *Introduction to the Study of Aircraft Vibration and Flutter*, Macmillan, New York, 1951.
- 5.10 L. A. Pipes and L. R. Harvill, *Applied Mathematics for Engineers and Physicists* (3rd ed.), McGraw-Hill, New York, 1970.

思考题

5.1 简答题

1. 怎样确定一个集中质量系统的自由度数?
2. 名词解释: 质量耦合, 速度耦合, 弹性耦合。
3. 耦合的特点取决于使用的坐标吗?
4. 如果把一架飞行中的飞机看作(a)刚体, (b)弹性体, 那么它分别有几个自由度?
5. 什么是主坐标? 它们有什么用处?
6. 为什么质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵都是对称的?
7. 什么是结点?
8. 什么是静力耦合和动力耦合? 怎样对运动微分方程进行解耦?
9. 什么是阻抗矩阵?
10. 怎样使一个系统以它的某一阶固有振型振动?
11. 什么是退化系统? 举出两个退化物理系统的例子。
12. 一个振动系统可以有多少个退化振型?

5.2 判断题

1. 主模态也叫主振型。 ()
2. 广义坐标是线性相关的。 ()
3. 主坐标也可以看作是广义坐标。 ()
4. 系统的振动形式随所选坐标系而定。 ()
5. 耦合的特性随所选坐标系而定。 ()
6. 使用主坐标既可以避免静力耦合可以避免动力耦合。 ()
7. 主坐标的使用有助于求解系统的响应。 ()
8. 二自由度系统的质量矩阵、刚度矩阵和阻尼矩阵都是对称的。 ()
9. 二自由度系统的特性可以用于动力吸振器的设计。 ()
10. 半正定系统也称为退化系统。 ()
11. 半正定系统没有非零的固有频率。 ()
12. 广义坐标总是从系统的平衡位置量起。 ()
13. 对于自由振动, 不同的自由度的以不同的相位振动。 ()
14. 对于自由振动, 不同的自由度的以不同的频率振动。 ()

15. 对于自由振动,不同的自由度以不同的振幅振动。 ()
16. 二自由度系统中不同自由度的相对振幅是由固有频率决定的。 ()
17. 系统的模态向量指的是振动的主振型。 ()

5.3 填空题

1. 二自由度系统,在任意初始激励下的自由振动响应可以由两个_____的叠加得到。
2. 二自由度系统的运动是由两个_____坐标来描述的。
3. 当激励频率等于系统的某一阶固有频率时,发生的现象称为_____。
4. 振幅和相角取决于系统的_____条件。
5. 扭转系统中,_____和_____分别类似于弹簧-质量系统中的质量和产生直线变形的弹簧。
6. 选取不同的广义坐标会得到不同类型的_____。
7. 半正定系统至少有一种_____运动。
8. 弹性耦合也称为_____耦合。
9. 惯性耦合也称为_____耦合。
10. 阻尼耦合也称为_____耦合。
11. 选用主坐标后,系统的运动微分方程会_____。
12. 罗斯-霍尔威茨准则可以用来讨论系统的_____。
13. 二自由度系统的运动微分方程只有在两个质量不_____时才不会耦合。
14. 振动系统只在初始条件作用下的振动称为_____振动。
15. 振动系统在外部激励作用下的振动称为_____振动。

5.4 选择题

1. 当一个二自由度系统受到简谐激励时,系统以_____振动。
(a) 外部激励的频率 (b) 较小的固有频率 (c) 较大的固有频率
2. 振动系统的自由度数取决于_____。
(a) 质量块的数目
(b) 质量块的数目和每个质量块的自由度数
(c) 描述每个质量块位置所使用的坐标数目
3. 二自由度系统具有_____。
(a) 一个主振型 (b) 两个主振型 (c) 多个主振型
4. 一般情况下,二自由度系统的运动微分方程是_____。
(a) 耦合的 (b) 非耦合的 (c) 线性的

5. 机械阻抗 $Z_{rs}(i\omega)$ 是_____。

(a) $m_{rs}\ddot{x} + c_{rs}\dot{x} + k_{rs}x$ (b) $\begin{Bmatrix} X_r(i\omega) \\ X_s(i\omega) \end{Bmatrix}$ (c) $-\omega^2 m_{rs} + i\omega c_{rs} + k_{rs}$

6. 阻抗矩阵 $[Z(i\omega)]$ 可以用于求如下形式的解_____。

(a) $\mathbf{X} = [Z(i\omega)]^{-1} \mathbf{F}_0$ (b) $\mathbf{X} = [Z(i\omega)] \mathbf{F}_0$ (c) $\mathbf{X} = [Z(i\omega)] \mathbf{X}_0$

7. 系统以其某一固有频率振动时的形态称为_____。

(a) 固有振型 (b) 固有频率 (c) 解

8. 二自由度系统的运动微分方程的一般形式为_____。

(a) 耦合的微分方程组 (b) 耦合的代数方程组 (c) 非耦合的方程组

5.5 连线题

- | | |
|---------|--------------------|
| 1. 静力耦合 | (a) 只有质量矩阵为非对角阵 |
| 2. 惯性耦合 | (b) 质量矩阵和阻尼矩阵为非对角阵 |
| 3. 速度耦合 | (c) 只有刚度矩阵为非对角阵 |
| 4. 动力耦合 | (d) 只有阻尼矩阵为非对角阵 |

5.6 连线题

将左侧的数据和右侧的频率方程相连, 频率方程是由下面的二自由度运动微分方程确定的:

$$J_0 \ddot{\theta}_1 - 2k_1 \theta_1 - k_1 \theta_2 = 0$$

$$2J_0 \ddot{\theta}_2 - k_1 \theta_1 + k_1 \theta_2 = 0$$

- | | |
|-----------------------|---------------------------------------|
| 1. $J_0 = 1, k_1 = 2$ | (a) $32\omega^4 - 20\omega^2 + 1 = 0$ |
| 2. $J_0 = 2, k_1 = 1$ | (b) $\omega^4 - 5\omega^2 + 2 = 0$ |
| 3. $J_0 = 2, k_1 = 2$ | (c) $\omega^4 - 10\omega^2 + 8 = 0$ |
| 4. $J_0 = 1, k_1 = 4$ | (d) $8\omega^4 - 10\omega^2 + 1 = 0$ |
| 5. $J_0 = 4, k_1 = 1$ | (e) $2\omega^4 - 5\omega^2 + 1 = 0$ |

习 题

- 5.1 求图 5.20 所示系统的固有频率。其中, $m_1 = m, m_2 = 2m, k_1 = k, k_2 = 2k$ 。如果 $k = 1000 \text{ N/m}, m = 20 \text{ kg}$, 质量块 m_1 和 m_2 的初始位移分别是 1 和 -1, 求系统的响应。
- 5.2 假定振幅非常小, 以 x_1 和 x_2 广义为坐标, 列出图 5.21 所示双摆的运动微分方程。如果 $m_1 = m_2 = m, l_1 = l_2 = l$, 求系统的固有频率、振幅比和两个主振型中结点的位置。
- 5.3 若 $k_1 = k_2 = k_3 = k$, 求图 5.22 所示系统的主振型。

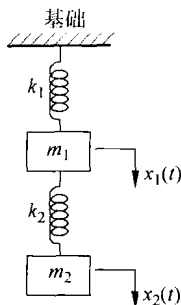


图 5.20 习题 5.1 图

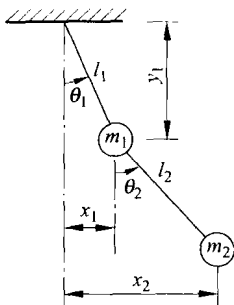


图 5.21 习题 5.2 图

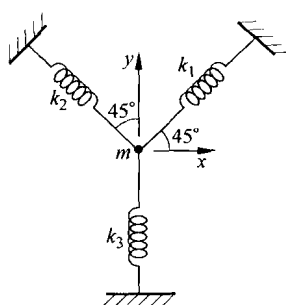


图 5.22 习题 5.3 图

- 5.4 图 5.23 中,一台机床的质量为 $m=1000 \text{ kg}$,转动惯量为 $J_0=300 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$,放置在弹性支承上。如果支承的刚度分别是 $k_1=3000 \text{ N/mm}$, $k_2=2000 \text{ N/mm}$,且有 $l_1=0.5 \text{ m}$, $l_2=0.8 \text{ m}$,求系统的固有频率和主振型。
- 5.5 电动桥式起重机,包括大梁、横行小车和缆绳,如图 5.24 所示。大梁的抗弯刚度为 $EI=6 \times 10^{12} \text{ lbf} \cdot \text{in}^2$,跨度为 $L=30 \text{ ft}$ 。钢丝绳的长度为 $l=20 \text{ ft}$ 。横行小车和所吊重物的重量分别是 8000 lbf 和 2000 lbf 。如果第 1 阶固有频率大于 20 Hz ,求钢丝绳的横截面积。

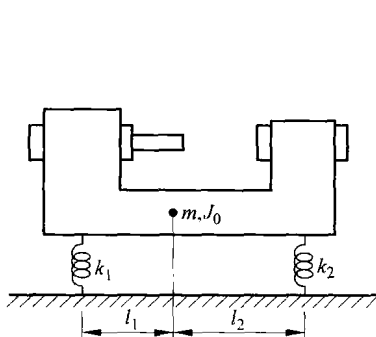
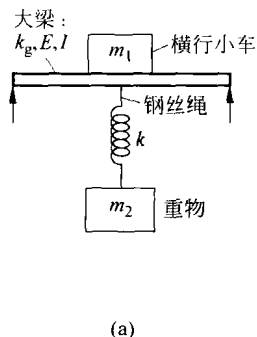
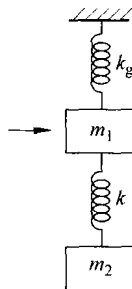


图 5.23 习题 5.4 图



(a)



(b)

图 5.24 习题 5.5 图

- 5.6 桥式起重机可以简化成图 5.24 中的形式。假定大梁的跨度为 40 m ,横截面的惯性矩为 $I=0.02 \text{ m}^4$,弹性模量 $E=2.06 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$,横行小车的质量为 $m_1=1000 \text{ kg}$,所吊重物的质量为 $m_2=5000 \text{ kg}$,钢丝绳的刚度为 $k=3.0 \times 10^5 \text{ N/m}$,求系统的固有频率和主振型。
- 5.7 图 5.25(a)所示的钻床,可以简化成一个二自由度系统,见图 5.25(b)。由于质量块 m_1 或 m_2 受到一个横向力时会使它们产生位置改变,因此系统表现出弹性耦合。支柱的弯曲刚度(见 6.4 节中刚度影响系数的定义)为

$$k_{11} = \frac{768}{7} \frac{EI}{l^3}, \quad k_{12} = k_{21} = -\frac{240}{7} \frac{EI}{l^3}, \quad k_{22} = \frac{96}{7} \frac{EI}{l^3}$$

求钻床的固有频率。

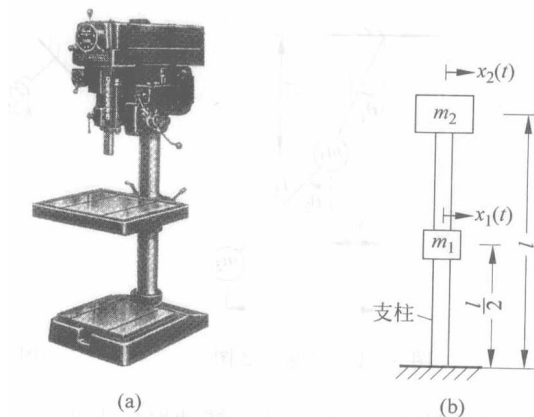


图 5.25 习题 5.7 图

- 5.8 图 5.26 是一辆行驶在不平路面上的汽车的一个车轮和板簧的示意图。为简单起见,假定所有的车轮完全相同,系统被理想化为图 5.27 的形式。汽车的质量为 $m_1 = 1000 \text{ kg}$,板簧的总刚度为 $k_1 = 400 \text{ kN/m}$,汽车车轮和轮轴的质量为 $m_2 = 300 \text{ kg}$,轮胎的刚度 $k_2 = 500 \text{ kN/m}$ 。如果路面按正弦曲线变化,且幅值为 $Y = 0.1 \text{ m}$,周期长度为 $l = 6 \text{ m}$,求汽车的临界速度。

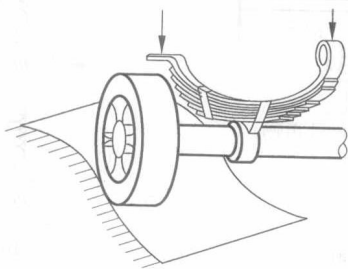


图 5.26 行驶在不平路面上的汽车

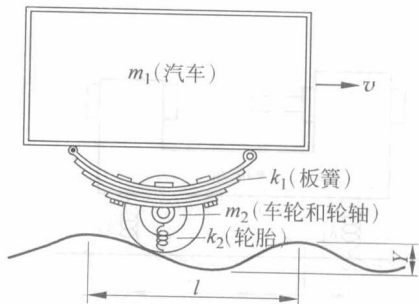


图 5.27 汽车振动模型

- 5.9 以坐标 θ_1, θ_2 为广义坐标,推导图 5.21 所示双摆的运动微分方程。如果 $m_1 = m_2 = m$, $l_1 = l_2 = l$,求系统的固有频率和主振型。
- 5.10 如果有 $m_1 = m_2 = m, k_1 = k_2 = k$,求图 5.20 所示系统的固有频率和主振型。
- 5.11 如果 $\mathbf{X}^{(1)\text{T}}[\mathbf{m}]\mathbf{X}^{(2)} = 0$,则称二自由度系统的主振型是正交的。试证明图 5.3(a)中系统的主振型是正交的。
- 5.12 如果有 $k_1 = 300 \text{ N/m}, k_2 = 500 \text{ N/m}, k_3 = 200 \text{ N/m}, m_1 = 2 \text{ kg}, m_2 = 1 \text{ kg}$,求图 5.4 所示系统的固有频率。
- 5.13 当 $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}, k_1 = 2000 \text{ N/m}, k_2 = 6000 \text{ N/m}$ 时,求图 5.20 所示系统的固有频率和主振型。

- 5.14 对于图 5.4 所示系统,如果有 $m_i = 25 \text{ lbf} \cdot \text{s}^2/\text{in}$, $i=1,2$, $k_i = 50\,000 \text{ lbf/in}$, $i=1,2,3$ 。试推导各质量块的位移表达式。
- 5.15 对于图 5.4 所示系统,有 $m_1 = 1 \text{ kg}$, $m_2 = 2 \text{ kg}$, $k_1 = 2000 \text{ N/m}$, $k_2 = 1000 \text{ N/m}$, $k_3 = 3000 \text{ N/m}$ 。质量块 m_1 的初速度为 20 m/s 。求两个质量块的运动。
- 5.16 对于习题 5.13,有如下初始条件时,求 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 。
- (a) $x_1(0) = 0.2$, $\dot{x}_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0$
- (b) $x_1(0) = 0.2$, $\dot{x}_1(0) = x_2(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = 5.0$
- 5.17 二层建筑框架可简化成如图 5.28 所示的模型。假定楼板为刚体,柱子的抗弯刚度分别是 EI_1 和 EI_2 ,柱子的质量忽略不计。每段柱子的刚度可以按下式计算:

$$\frac{24EI_i}{h_i^3}, \quad i = 1, 2$$

如果有 $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, $h_1 = h_2 = h$, $EI_1 = EI_2 = EI$, 求系统的固有频率和主振型。

- 5.18 如图 5.29 所示,一根张紧的绳子两端固定,其上有两个附加质量。如果有 $m_1 = m_2 = m$, $l_1 = l_2 = l_3 = l$, 求系统的固有频率和主振型。

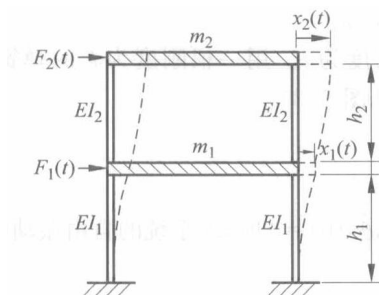


图 5.28 习题 5.17 图

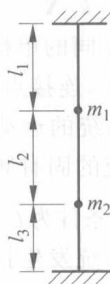
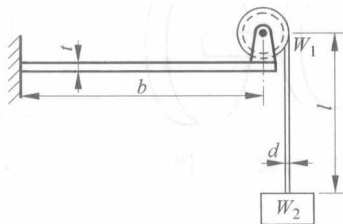
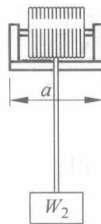


图 5.29 习题 5.18 图

- 5.19 求图 5.28 所示二层建筑的主振型, $m_1 = 3m$, $m_2 = m$, $k_1 = 3k$, $k_2 = k$, 其中 k_1 和 k_2 分别表示一楼和二楼柱子的刚度。
- 5.20 起重卷扬机重 W , 安装在钢悬臂梁的一端, 梁的长度为 b , 横截面的厚度为 t , 宽度为 a , 如图 5.30 所示。钢丝绳的直径是 d , 悬挂长度为 l , 若所提升的载荷为 W_2 , 试推导系统固有频率的表达式。



(a)



(b)

图 5.30 习题 5.20 图

- 5.21 对于图 5.20 中的系统,如果有 $k_1=k, k_2=2k, m_1=m, m_2=2m$,试确定在什么初始条件下系统只以其最低阶固有频率振动。
- 5.22 对于图 5.20 所示系统,保持质量块 m_1 不动,将 m_2 向下移动 0.1 m。讨论系统的运动规律。
- 5.23 对于习题 5.20,如果有 $W_1=1000 \text{ lbf}, W_2=500 \text{ lbf}, b=30 \text{ in}, l=60 \text{ in}$,对悬臂梁和钢丝绳进行设计,使得系统的固有频率大于 10 Hz 。
- 5.24 求图 5.4 中二自由度系统的自由振动响应,取 $n=1, k=8, m=2$,初始条件为 $x_1(0)=1, x_2(0)=\dot{x}_1(0)=0, \dot{x}_2(0)=1$ 。
- 5.25 求图 5.4 中二自由度系统的自由振动响应,取 $n=1, k=8, m=2$,初始条件为 $x_1(0)=1, x_2(0)=\dot{x}_1(0)=\dot{x}_2(0)=0$ 。
- 5.26 应用例 5.1 的结论,证明主振型满足下面的正交关系:

$$\mathbf{X}^{(1)T} \mathbf{X}^{(2)} = 0, \quad \mathbf{X}^{(1)T} [\mathbf{m}] \mathbf{X}^{(2)} = 0, \quad \mathbf{X}^{(1)T} [\mathbf{m}] \mathbf{X}^{(1)} = c_1 = \text{常数}$$

$$\mathbf{X}^{(2)T} [\mathbf{m}] \mathbf{X}^{(2)} = c_2 = \text{常数}$$

$$\mathbf{X}^{(1)T} [\mathbf{k}] \mathbf{X}^{(1)} = c_1 \omega_1^2, \quad \mathbf{X}^{(2)T} [\mathbf{k}] \mathbf{X}^{(2)} = c_2 \omega_2^2$$

- 5.27 两个完全相同的单摆,摆锤质量为 m ,摆绳的长度为 l 。用一根刚度为 k 的弹簧,将两个单摆相连,连接点在到悬挂端距离为 d 处,见图 5.31。
- (a) 推导系统的运动微分方程。
- (b) 求系统的固有频率和主振型。
- (c) 当初始条件为 $\theta_1(0)=a, \theta_2(0)=0, \dot{\theta}_1(0)=0, \dot{\theta}_2(0)=0$ 时,求系统的自由振动响应。
- (d) 确定系统发生拍振的条件。
- 5.28 图 5.32 所示扭振系统,有 $k_{t2}=2k_{t1}, J_2=2J_1$,求系统的固有频率和主振型。
- 5.29 图 5.33 中,假定绕过卷筒的绳子不发生滑动,求系统的固有频率。

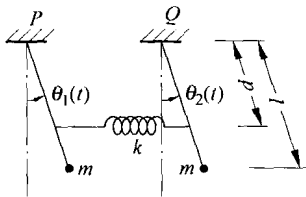


图 5.31 习题 5.27 图

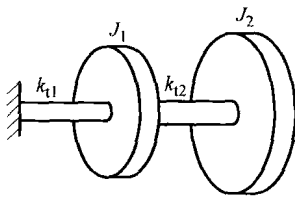


图 5.32 习题 5.28 图

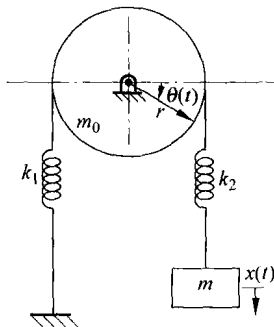


图 5.33 习题 5.29 图

- 5.30 求图 5.6(a) 所示系统的固有频率和主振型, 其中 $J_1 = J_0$, $J_2 = 2J_0$, $k_{t1} = k_{t2} = k_{t3} = k_t$ 。
- 5.31 求图 5.7 中扭振系统的主振型, 取 $k_{t1} = k_t$, $k_{t2} = 5k_t$, $J_1 = J_0$, $J_2 = 5J_0$ 。
- 5.32 图 5.34(b) 所示的坦克简化模型可以用来研究坦克竖直方向的振动和俯仰运动的性质。已知车身的质量为 m , 对其质心轴的转动惯量为 J_0 , 根据 5.5 节的内容, 用两种不同的坐标推导其运动微分方程。

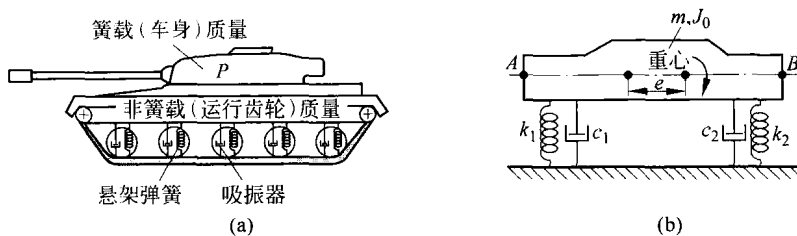


图 5.34 习题 5.32 图

(a) 坦克; (b) 简化模型

- 5.33 求图 5.35 所示系统的固有频率和振幅比。
- 5.34 一根不计质量的刚性杆, 中间铰支, 受到弹簧和质量块的约束, 只能在竖直平面内运动, 如图 5.36 所示。求系统的固有频率和主振型。

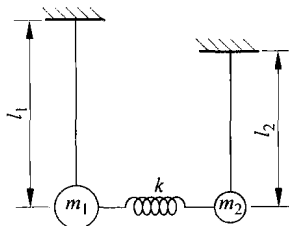


图 5.35 习题 5.33 图

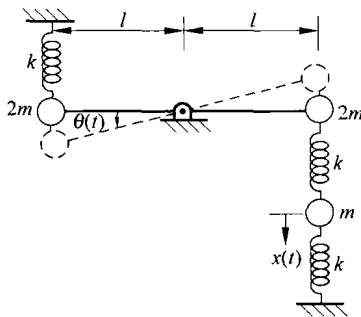


图 5.36 习题 5.34 图

- 5.35 机翼自重 m , 用一根刚度为 k 的弹簧和刚度为 k_t 的扭簧悬挂在风洞中 (见图 5.37)。机翼的质心距悬挂点 O 的距离为 e 。机翼关于过 O 点的水平轴的转动惯量为 J_0 。求系统的固有频率。
- 5.36 混凝土公路上每隔 15 m 就设置一个伸缩缝, 它们对匀速行驶的汽车会形成一系列的脉冲激励。问车速为多少时最容易引起例 5.7 所述汽车产生上下垂直振动和俯仰振动。
- 5.37 习题 5.5 中所述的桥式起重机 (参见图 5.24), 如果大梁两边的轨道表面高度如

图 5.38 所示沿 z 方向(与纸面垂直)按正弦规律变化,建立求解被提升重物(m_2)沿竖直方向振动响应的运动微分方程以及初始条件。假设起重机沿 z 方向的速度为 30 ft/min。

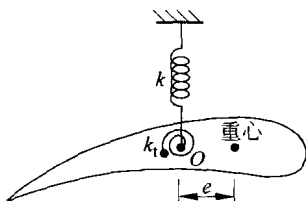


图 5.37 习题 5.35 图

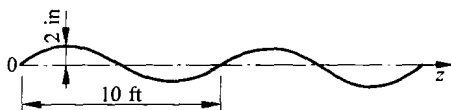
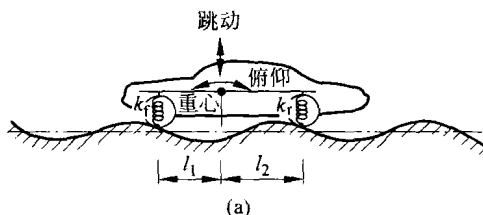
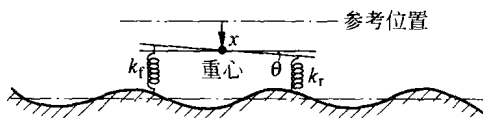


图 5.38 习题 5.37 图

- 5.38 图 5.39 所示为一描述汽车俯仰运动和竖直方向跳动的简化模型。假设汽车沿起伏按正弦规律(振幅为 0.05 m, 波长为 10 m)变化的某粗糙路面行驶,推导其运动微分方程。数据如下: 汽车的质量为 1000 kg, 回转半径为 0.9 m, $l_1 = 1$ m, $l_2 = 1.5$ m, $k_t = 18$ kN/m, $k_r = 22$ kN/m, 行驶速度为 50 km/h。



(a)



(b)

图 5.39 习题 5.38 图

- 5.39 一根钢质轴, 直径为 2 in, 安装在两个轴承上。轴上面安装有一个滑轮和一个转子, 如图 5.40 所示。滑轮和转子的重量分别是 200 lbf 和 500 lbf。作用在轴上任意一点的横向载荷都会导致轴上所有点的位置改变, 从而导致系统存在弹性耦合。刚度系数的计算公式为(见 6.4 节刚度影响系数的定义)

$$k_{11} = \frac{1296}{5} \frac{EI}{l^3}, \quad k_{12} = k_{21} = \frac{324}{5} \frac{EI}{l^3},$$

$$k_{22} = \frac{216}{5} \frac{EI}{l^3}$$

如果 $l = 90$ in, 求系统弯曲振动的固有频率。

- 5.40 图 5.41 是山地车和骑车人的简化模型, 由于路面不平会造成系统的振动。利用二自由度模型, 讨论求解山地车响应的方法。

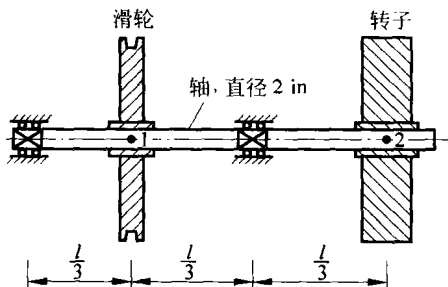


图 5.40 习题 5.39 图

- 5.41 一根等截面刚性梁长度为 l , 质量为 m , 由两根弹簧支承, 受到一个激励力 $F(t) = F_0 \sin \omega t$, 如图 5.42 所示。(a) 在小位移的情况下推导梁的运动微分方程, (b) 讨论系统耦合的性质。



图 5.41 习题 5.40 图

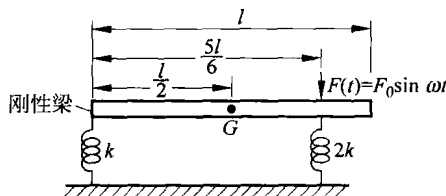


图 5.42 习题 5.41 图

- 5.42 拖车质量为 M , 通过一根刚度为 k 的弹簧和一个阻尼系数为 c 的阻尼器连在墙上。拖车在无阻尼的平面上运动, 见图 5.43。一根均质刚性杆与拖车铰接, 并可绕 O 点振动。对上述系统施加如图所示的 $F(t)$ 和 $M_t(t)$, 推导系统的运动微分方程。

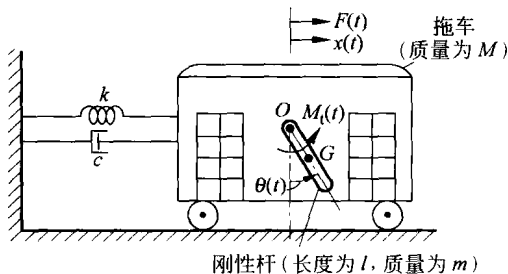


图 5.43 习题 5.42 图

- 5.43 拖车质量为 M , 通过一根刚度为 k_1 的弹簧和一个阻尼系数为 c 的阻尼器连在墙上, 在无摩擦的水平表面上运动, 见图 5.44。一个质量为 m 的均质圆柱, 通过刚度为 k_2 的弹簧与拖车壁相连, 并可在拖车地板上作纯滚动。推导系统的运动方程, 讨论系统耦合的性质。
- 5.44 如图 5.45 所示, 锻锤、框架、铁砧(包括工件)以及基础的重量分别是 5000 lbf, 40 000 lbf, 60 000 lbf, 140 000 lbf。放在铁砧和基础之间的弹性垫以及放在基础下面的隔振垫(包括弹性的土壤)的刚度分别是 6×10^6 lbf/in, 3×10^6 lbf/in。如果锻锤在撞击铁砧之前的速度是 15 ft/s, 求(a)系统的固有频率; (b)在恢复系数为 0.5 并且忽略系统阻尼的情况下, 铁砧和基础位移的振幅。

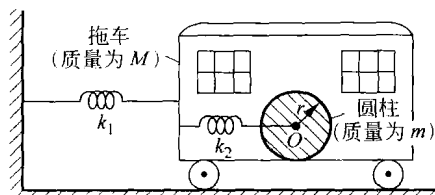


图 5.44 习题 5.43 图

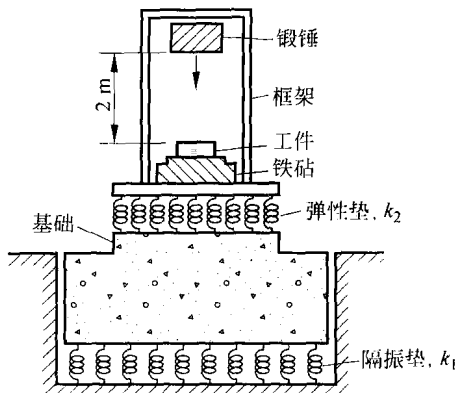


图 5.45 习题 5.44 图

- 5.45 对图 5.45 所示系统,求:(a)系统的固有频率;(b)铁砧和混凝土基础的响应,作用在铁砧上的力 $F(t)$ 如图 5.46 所示。数据如下:铁砧和框架的总质量为 200 Mg,混凝土基础的质量为 250 Mg,弹性垫刚度 150 MN/m,土壤刚度 75 MN/m, $F_0 = 10^5$ N, $T = 0.5$ s。
- 5.46 推导图 5.47 所示自由振动系统的运动微分方程。假设解的形式为 $x_i(t) = C_i e^{s_i t}$, $i = 1, 2$, 并将特征方程写成如下形式:

$$a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0$$

讨论解 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的性质。

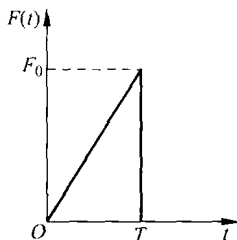


图 5.46 习题 5.45 图

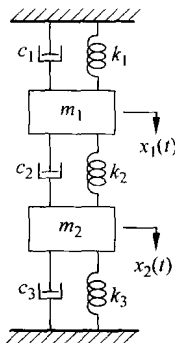


图 5.47 习题 5.46 图

- 5.47 图 5.47 中, $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg, $k_1 = k_2 = k_3 = 10\,000$ N/m, $c_1 = c_2 = c_3 = 2000$ N·s/m, 初始条件 $x_1(0) = 0.2$ m, $x_2(0) = 0.1$ m, $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$, 求位移 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 。
- 5.48 一台离心泵的不平衡量为 me , 通过刚度为 k_1 的隔振弹簧安装在一个质量为 m_2 的刚性基础上, 见图 5.48。如果土壤的刚度和阻尼分别是 k_2 和 c_2 , 求泵和基础的位移。

所需数据如下: $mg=0.5 \text{ lbf}$, $e=6 \text{ in}$, $m_1g=800 \text{ lbf}$, $k_1=2000 \text{ lbf/in}$, $m_2g=2000 \text{ lbf}$, $k_2=1000 \text{ lbf/in}$, $c_2=200 \text{ lbf} \cdot \text{s/in}$, 泵的转速 $=1200 \text{ r/min}$ 。

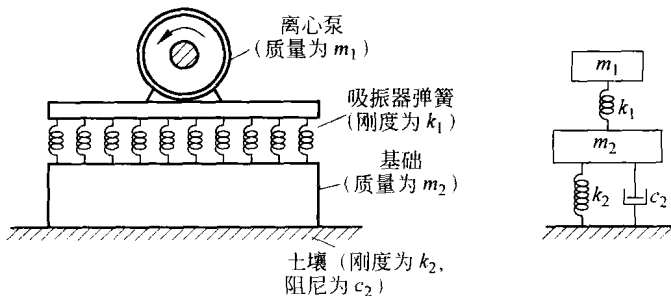


图 5.48 习题 5.48 图

5.49 活塞式发动机的质量为 m_1 , 安装在两端固定的梁上。梁的长度为 l , 横截面宽度为 a , 厚度为 t , 弹性模量为 E 。一个弹簧-质量 (k_2, m_2) 系统悬挂在梁上, 如图 5.49 所示。系统工作时, 受到一个简谐激励 $F_1(t) = F_0 \cos \omega t$, 求当 m_2 和 k_2 满足什么关系时梁不会出现稳态振动。^①

5.50 当质量块 m_1 受到一个沿 $x_1(t)$ 方向的激励 $F(t) = F_0 \sin \omega t$ 时, 利用机械阻抗法求解图 5.20 中系统的稳态响应。

5.51 图 5.20 所示系统的基础承受一个位移激励 $y(t) = Y_0 \cos \omega t$ 时, 求其稳态响应。

5.52 图 5.20 所示二自由度系统中的质量块 m_1 承受一个激励 $F_0 \cos \omega t$ 。假定周围的空气阻尼为 $c =$

$200 \text{ N} \cdot \text{s/m}$, 求两个质量块的稳态响应。假定 $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$, $k_1 = k_2 = 500 \text{ N/m}$, $\omega = 1 \text{ rad/s}$ 。

5.53 对于图 5.3(a) 所示系统, 若 $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, $F_1(t) = F_{10} \cos \omega t$, $F_2(t) = F_{20} \cos \omega t$, 求系统的稳态振动。

5.54 图 5.20 所示系统中, 质量块 m_1 受到一个幅值为 50 N 、频率为 2 Hz 的简谐激励力的作用。已知 $m_1 = 10 \text{ kg}$, $m_2 = 5 \text{ kg}$, $k_1 = 8000 \text{ N/m}$, $k_2 = 2000 \text{ N/m}$ 。求各质量块受迫振动的振幅。

5.55 假设图 5.28 中的二层房屋框架承受一个来自地面的位移激励 $y(t) = 0.2 \sin \pi t \text{ m}$,

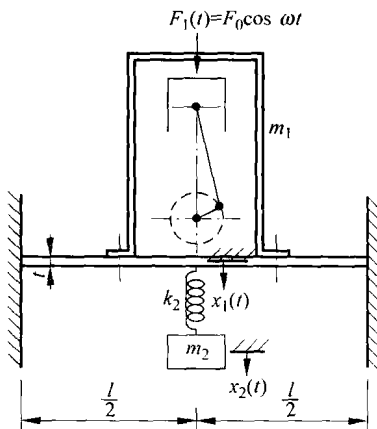


图 5.49 习题 5.49 图

① 使第一个质量的振幅为零的弹簧-质量系统 (k_2, m_2) 称为吸振器。关于吸振器的详细讨论见 9.11 节。

上、下两层柱子的刚度分别是 600 N/m 和 800 N/m , 且 $m_1 = m_2 = 50 \text{ kg}$, 求系统的响应。

- 5.56 对于图 5.13 所示系统, 若 $F_1(t)$ 是大小为 5 N 的阶跃力, 且有 $m = 1 \text{ kg}$, $k = 100 \text{ N/m}$, $x_1(0) = \dot{x}_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ 。利用拉普拉斯变换求系统的受迫响应。
- 5.57 列出图 5.50 中系统的运动微分方程, 并求出系统的固有频率。
- 5.58 两个完全相同的滚子, 半径为 r , 质量为 m , 通过弹簧相连, 如图 5.51 所示。求系统的固有振动频率。

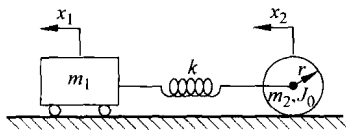


图 5.50 习题 5.57 图

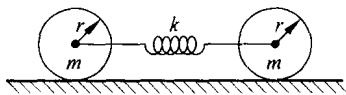


图 5.51 习题 5.58 图

- 5.59 二自由度系统的运动微分方程为

$$a_1 \ddot{x}_1 + b_1 x_1 + c_1 x_2 = 0$$

$$a_2 \ddot{x}_2 + b_2 x_1 + c_2 x_2 = 0$$

如果系统是退化的, 推导所需的条件。

- 5.60 对于图 5.52 所示系统, 若初始条件为 $\theta_1(t=0) = \theta_1(0)$, $\theta_2(t=0) = \theta_2(0)$, $\dot{\theta}_1(t=0) = \dot{\theta}_2(t=0) = 0$ 。求系统的角位移 $\theta_1(t)$ 和 $\theta_2(t)$ 。

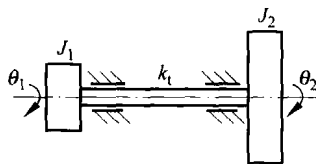


图 5.52 习题 5.60 图

- 5.61 图 5.7 中, 若 $k_{11} = 0$, 求系统的主振型, 并证明当 $k_{11} = 0$ 时, 以 $\alpha = \theta_1 - \theta_2$ 为广义坐标, 该系统可以看作一个单自由度系统。

- 5.62 如图 5.53 所示, 汽轮机通过齿轮与发电机相连。汽轮机、发电机、齿轮 1 和齿轮 2 的转动惯量分别是 $3000 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $2000 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $500 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 和 $1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。轴 1 和轴 2 均由钢材制成, 直径分别为 30 cm 和 10 cm , 长度分别为 2 m 和 1.0 m 。计算系统的固有频率。
- 5.63 一个用来提升重物的热气球的, 质量为 m , 提升重物的重量为 Mg 。重物通过 12 根绳子悬挂在气球上, 每根绳子的刚度都是 k (见图 5.54)。求气球在竖直方向振动的固有频率, 指出所作假设, 并讨论其有效性。
- 5.64 一台汽轮机的转动惯量为 $4 \text{ lbf} \cdot \text{in} \cdot \text{s}^2$, 通过一根钢质圆管轴与发电机相连。发电机的转动惯量为 $2 \text{ lbf} \cdot \text{in} \cdot \text{s}^2$, 轴的外径为 2 in , 内径为 1 in , 长度为 15 in (与图 5.15(b) 所示系统类似)。如果当汽轮机的输出功率为 100 hp 、转速为 6000 r/min 时突然停下来, 传递的转矩变为零, 求随后汽轮机和发电机的角位移, 假定系统阻尼忽略不计。

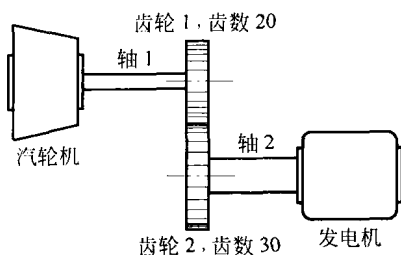


图 5.53 习题 5.62 图

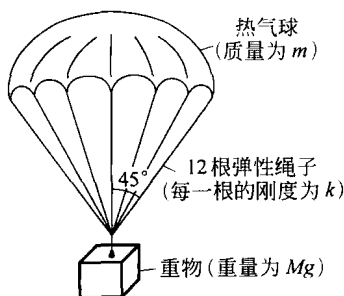


图 5.54 习题 5.63 图

- 5.65 使用锥体(摩擦)离合器时,驱动轴的瞬态振动会产生严重噪声。为了减少噪声,可以将一个转动惯量为 J_2 的飞轮通过一个扭转弹簧 k_{12} 和一个黏性阻尼减振器 c_{12} 连接到驱动轴上,如图 5.55 所示。如果锥体离合器的转动惯量是 J_1 ,刚度和阻尼系数分别是 k_{11} 和 c_{11} ,为使系统稳定运行,各个物理量之间应满足什么关系?

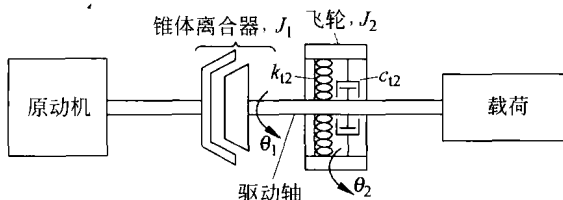


图 5.55 习题 5.65 图

- 5.66 一根等截面的刚性杆质量为 m ,通过刚度为 k 的弹簧与拖车相连(见图 5.56)。拖车质量为 $5m$,通过一根刚度为 $2k$ 的弹簧与墙体相连,假设拖车在无阻尼的表面上运动。推导系统运动的稳定条件。
- 5.67 当 $k_1=k, k_2=2k, k_3=k, m_1=2m, m_2=m, F_2(t)=0, F_1(t)$ 是大小为 500 N 、持续时间为 0.5 s 的矩形脉冲时,利用数值方法,求图 5.3(a)所示系统的响应。假定 $m=10\text{ kg}, c_1=c_2=c_3=0, k=2000\text{ N/m}$,且初始条件为零。

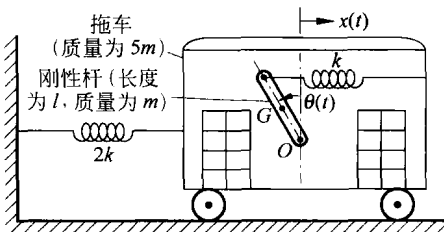


图 5.56 习题 5.66 图

- 5.68 (a)利用子程序 QUART.F 求图 5.3 所示系统的频率方程的根。所用数据如下: $m_1=m_2=0.2\text{ lbf} \cdot \text{s}^2/\text{in}, k_1=k_2=18\text{ lbf/in}, k_3=0, c_1=c_2=c_3=0$ 。(b)如果初始条件为 $x_1(0)=x_2(0)=2\text{ in}, \dot{x}_1(0)=\dot{x}_2(0)=0$,求质量块的位移 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 。

- 5.69 根据式(5.29)和式(5.35),编写计算机程序求解二自由度系统在简谐激励 $F_j(t) = F_{j0} e^{i\omega t}$, $j=1,2$ 作用下的稳态响应。计算所需数据如下: $m_{11} = m_{22} = 0.1 \text{ lbf} \cdot \text{s}^2/\text{in}$, $m_{12} = 0$, $c_{11} = 1.0 \text{ lbf} \cdot \text{s}/\text{in}$, $c_{12} = c_{22} = 0$, $k_{11} = 40 \text{ lbf}/\text{in}$, $k_{22} = 20 \text{ lbf}/\text{in}$, $k_{12} = -20 \text{ lbf}/\text{in}$, $F_{10} = 1 \text{ lbf}$, $F_{20} = 2 \text{ lbf}$, $\omega = 5 \text{ rad/s}$ 。
- 5.70 利用下面的数据求解图 5.20 所示系统的自由振动响应,并绘图: $k_1 = 1000 \text{ N/m}$, $k_2 = 500 \text{ N/m}$, $m_1 = 2 \text{ kg}$, $m_2 = 1 \text{ kg}$, $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ 。
- 5.71 利用下面的数据求解图 5.20 所示系统的自由振动响应,并绘图: $k_1 = 1000 \text{ N/m}$, $k_2 = 500 \text{ N/m}$, $m_1 = 2 \text{ kg}$, $m_2 = 1 \text{ kg}$, $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$, $\dot{x}_1(0) = 1$, $\dot{x}_2(0) = -2$ 。
- 5.72 利用 MATLAB 求解下面的特征值问题:

$$\begin{bmatrix} 25 \times 10^6 & -5 \times 10^6 \\ -5 \times 10^6 & 5 \times 10^6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} 10\,000 & 0 \\ 0 & 5000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

- 5.73 利用 MATLAB,求下面的二自由度系统的响应,并绘图:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 50 & -10 \\ -10 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \sin 3t \\ 5 \cos 5t \end{Bmatrix}$$

初始条件为 $x_1(0) = 1$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $x_2(0) = -1$, $\dot{x}_2(0) = 0$ 。

- 5.74 利用 MATLAB,求解习题 5.67。使用 MATLAB 函数 stepfun 表示矩形脉冲。
- 5.75 利用 MATLAB,求解习题 5.68(a)。
- 5.76 利用 MATLAB,求解习题 5.69。并绘制 m_{11} 和 m_{22} 的稳态响应。
- 5.77 利用 MATLAB,求方程 $x^4 - 32x^3 + 244x^2 - 20x - 1200 = 0$ 的解。
- 5.78 利用 Program6.cpp,求解习题 5.68(a)。
- 5.79 利用 Program6.cpp,求解习题 5.77 中四次方程的根。
- 5.80 利用 PROGRAM6.F,求解习题 5.68(a)。
- 5.81 利用 PROGRAM6.F,求解习题 5.77 中四次方程的根。

设计题目

- 5.82 如图 5.57 所示,皮带驱动的宝塔轮用来改变车床的切削速度。已知驱动轴的转速为 350 r/min,输出轴的转速分别为 150 r/min, 250 r/min, 450 r/min 和 750 r/min。与 150 r/min 的输出转速对应的主动轮和被动轮的直径分别为 250 mm 和 1000 mm,两轴之间的中心距为 5 m。主动轮和被动轮的转动惯量分别为 $0.1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 和 $0.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$,求皮带的横截面面积,以避免与输入或输出转速发生共振。假设皮带材料的弹性模量为 10^{10} N/m^2 。

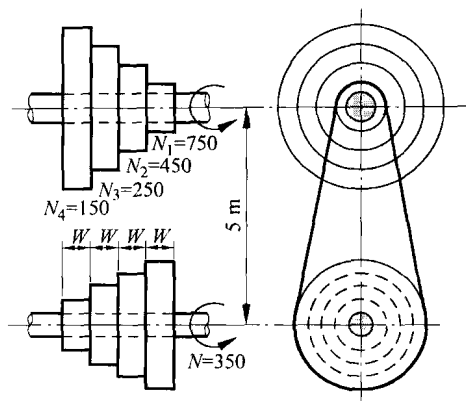
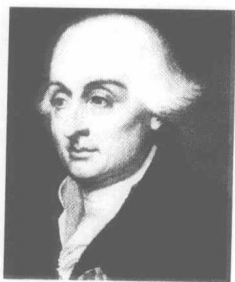


图 5.57 设计题图 5.82 图

- 5.83 在图 5.45 所示的锻床中,锻锤、框架(包括铁砧和工件)和混凝土基础的质量分别是 1000 kg, 5000 kg 和 25 000 kg。锻锤落下的高度为 2 m。根据下列条件设计弹簧刚度系数 k_1 和 k_2 : (a) 冲击是塑性的, 即锻锤与工件发生撞击后不反弹; (b) 锻床的固有频率应大于 5 Hz; (c) 弹簧中的应力应比其材料的屈服应力小, 且安全系数至少为 1.5。忽略土壤的弹性。



拉格朗日 (Joseph Louis Lagrange, 1736—1813), 意大利数学家, 由于其在理论力学方面的贡献而享誉世界。他于 1755 年成为都灵炮兵学校的数学教授。拉格朗日的名著 *Mécanique* 中包含了现今著名的“拉格朗日方程”, 在振动的研究中非常有用。他也曾从事过材料的弹性与强度方面的研究, 并讨论了受压杆的强度与变形, 但鲜为人知。

(照片引自: Struik D J. A Concise History of Mathematics, 2nd ed. New York: Dover Publications, 1948)

第 6 章 多自由度系统

6.1 引言

如第 1 章所述, 大多数实际系统都是连续的, 具有无限多个自由度。连续系统的振动分析要求解偏微分方程, 这是非常困难的。实际上, 对许多偏微分方程并不存在解析解。另一方面, 多自由度系统的振动分析只要求解一组常微分方程, 这相对来说要简单得多。因此, 为了分析的简化, 连续系统经常近似为多自由度系统。

在前面各章中的所有概念都可以直接推广到多自由度系统的情形。例如, 每个自由度对应一个运动微分方程。如果应用广义坐标, 则每个自由度对应一个广义坐标。可通过牛顿第二运动定律或使用 6.4 节定义的影响系数得到运动微分方程。但一般来说, 通过拉格朗日方程更易于推导出多自由度系统的运动微分方程。

对于一个 n 自由度的系统, 有 n 个固有频率, 每个频率对应一个固有振型。通过令行列式为零得到的特征方程来确定固有频率的方法, 也可应用于多自由度系统。然而, 随着自由度数目的增加, 特征方程的求解越来越复杂。可利用固有振型的正交性简化多自由度系统的分析。

6.2 连续系统模型化为多自由度系统

有多种不同的方法可以将连续系统近似为多自由度系统。一个简单的方法是用有限数目的集中质量或刚体代替分布质量或系统的惯性。该集中质量可假设与一无质量的弹性且

具有阻尼的元素相连;可采用线性(或角度)坐标来描述集中质量(或刚体)的运动,这些模型称为集中参数或集中质量或离散质量系统。用来描述集中质量或刚体的运动所需的坐标的最小数目即为系统的自由度数。显然,模型中使用的集中质量的数量越多,分析结果的精度就越高。

有些问题本身就能说明所使用的集中参数模型的类型。例如,图 6.1(a)中所示的 3 层建筑物可采用一个带 3 个集中质量的模型,如图 6.1(b)所示,在该模型中,系统的惯性可假定为集中于各层的 3 个点质量,柱子的弹性可用弹簧来代替。类似地,图 6.2(a)所示的钻床可使用 4 个集中质量与 4 个弹簧来模拟,如图 6.2(b)所示。

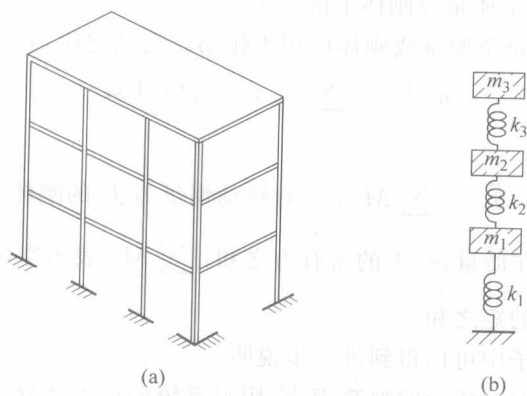


图 6.1 3 层建筑物

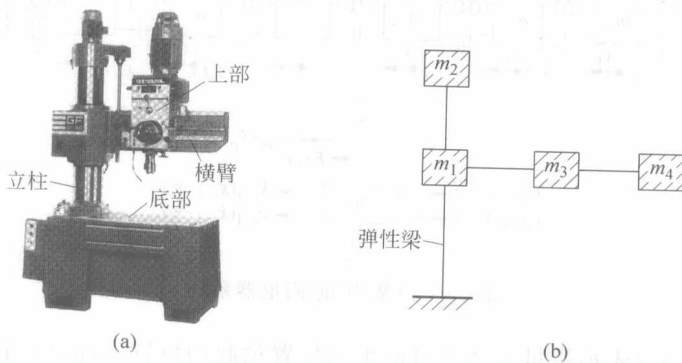


图 6.2 钻床

另一个将连续系统近似为多自由度系统的常用方法是用大量的微小单元来逼近系统的几何形状和尺寸。通过假设每个单元的某一简单解,运用协调与平衡关系来求解原系统的某一近似解。这种方法就是熟知的有限单元法,这在原著的第 12 章中有详细讨论。由于本书中略去了这部分内容,读者可以查阅有限元法方面的专著。

6.3 运用牛顿第二定律推导运动微分方程

运用牛顿第二运动定律,可以按下面的步骤推导多自由度系统的运动微分方程:

(1) 选择适当的坐标来描述系统中各个点质量或刚体的位置。并指定质量或刚体的位移、速度和加速度的正方向。

(2) 确定系统的静平衡位置,并使每一质量或刚体有一个从各平衡位置量起的位移。

(3) 作系统中每个质量或刚体的受力图,当给定质量或刚体的正位移和速度后,指出弹簧力、阻尼力和作用在每个质量或刚体上的外力。

(4) 根据受力图,对每个质量或刚体应用牛顿第二运动定律,有

$$m_i \ddot{x}_i = \sum_j F_{ij}, \quad \text{对质量 } m_i \quad (6.1)$$

或

$$J_i \ddot{\theta}_i = \sum_j M_{ij}, \quad \text{对转动惯量为 } J_i \text{ 的刚体} \quad (6.2)$$

其中, $\sum_j F_{ij}$ 表示作用在质量 m_i 上的所有力之和; $\sum_j M_{ij}$ 表示作用在转动惯量为 J_i 的刚体上的所有力对某一轴的矩之和。

该步骤在下面的例子中可以得到进一步说明。

例 6.1 推导图 6.3(a) 所示的弹簧-质量-阻尼系统的运动微分方程。

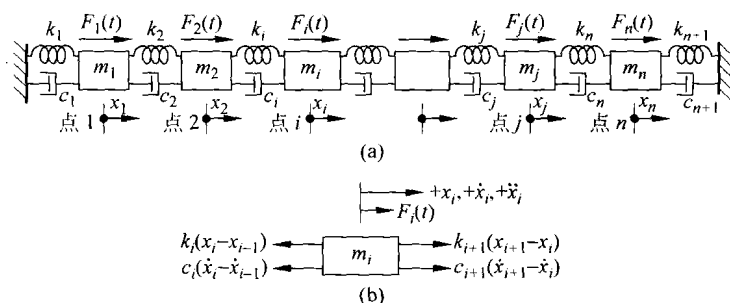


图 6.3 弹簧-质量-阻尼器系统

解: 用坐标 $x_i(t)$ 表示质量块从各自静平衡位置量起的位置坐标,如图 6.3(a)所示。该系统中的一个代表性质量 m_i 的受力图如图 6.3(b)所示包括位移、速度和加速度的正方向。对质量 m_i 运用牛顿第二运动定律,有:

$$\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i = & -k_i(x_i - x_{i-1}) + k_{i+1}(x_{i+1} - x_i) - c_i(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) \\ & + c_{i+1}(\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i) + F_i, \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \end{aligned}$$

或

$$m_i \ddot{x}_i - c_i \dot{x}_{i-1} + (c_i + c_{i+1}) \dot{x}_i - c_{i+1} \dot{x}_{i+1} - k_i x_{i-1} + (k_i + k_{i+1}) x_i - k_{i+1} x_{i+1} = F_i; \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (\text{E. } 1)$$

在上式中分别令 $i=1, x_0=0$ 以及 $i=n, x_{n+1}=0$, 可推导出质量 m_1 和 m_n 的运动微分方程:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = F_1 \quad (\text{E. } 2)$$

$$m_n \ddot{x}_n - c_n \dot{x}_{n-1} + (c_n + c_{n+1}) \dot{x}_n - k_n x_{n-1} + (k_n + k_{n+1}) x_n = F_n \quad (\text{E. } 3)$$

注意:

(1) 例 6.1 中的运动微分方程(E. 1)~(E. 3)可表示成矩阵的形式, 即

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{c} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{k} \mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (6.3)$$

其中, \mathbf{m} , \mathbf{c} 和 \mathbf{k} 分别表示质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵, 即

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & m_n \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -c_n & c_n + c_{n+1} \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_n & k_n + k_{n+1} \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

\mathbf{x} , $\dot{\mathbf{x}}$, $\ddot{\mathbf{x}}$ 和 \mathbf{F} 分别表示位移、速度、加速度和力矢量, 即

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{Bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{Bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{x}} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{x}_n(t) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \vdots \\ F_n(t) \end{Bmatrix} \quad (6.7)$$

(2) 对一非阻尼系统(即 $c_i=0, i=1, 2, \dots, n+1$), 运动微分方程可简化为

$$m \ddot{x} + kx = F \quad (6.8)$$

(3) 上面讨论的系统是具有 n 个自由度的弹簧-质量-阻尼器系统的特例。质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵的一般形式为

$$m = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1n} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{1n} & m_{2n} & m_{3n} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

$$c = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & c_{3n} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

$$k = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \cdots & k_{1n} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{1n} & k_{2n} & k_{3n} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

(4) 可以看出, 例 6.1 中(见图 6.3(a))所讨论的弹簧-质量-阻尼器系统的微分方程是互相耦合的, 即每一个方程中包含的坐标多于一个。这表明方程不能逐个单独求解, 只能同时求解。此外, 由于刚度项是耦合的, 故称系统是静力耦合的, 即刚度矩阵至少在非对角线上有一个非零元素。另一方面, 如果质量矩阵在非对角线上至少有一个非零元素, 则称系统是动力耦合的。如果在刚度矩阵和质量矩阵的非对角线上都有非零元素, 则系统同时具有静力耦合与动力耦合。

例 6.2 推导图 6.4(a)所示的拖车-复摆系统的运动微分方程。

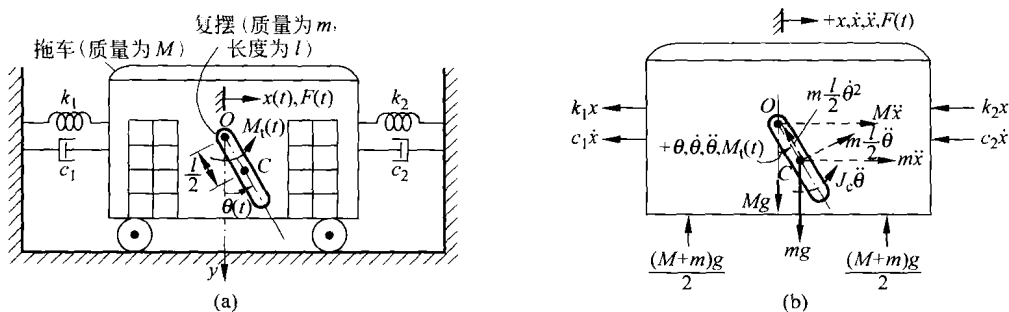


图 6.4 拖车-复摆系统

解: 采用坐标 $x(t)$ 和 $\theta(t)$ 分别描述拖车距静平衡位置的线位移与复摆距静平衡位置的角位移。若规定图 6.4(b)所示的位移 $x(t)$ 和 $\theta(t)$ 、速度 $\dot{x}(t)$ 和 $\dot{\theta}(t)$ 以及加速度 $\ddot{x}(t)$ 和

$\ddot{\theta}(t)$ 的正方向,则作用在拖车上的外力 $F(t)$ 、弹簧力 k_1x 和 k_2x 、阻尼力 $c_1\dot{x}$ 和 $c_2\dot{x}$ 以及作用在复摆上的外力矩 $M_1(t)$ 、重力 mg 分别如图 6.4(b)所示。作用在拖车和复摆上的惯性力用虚线表示在图 6.4(b)中。注意:复摆绕铰支点 O 的转动将引起指向 O 点的径向力 $m \frac{l}{2} \dot{\theta}^2$ 和垂直于 OC 的切向力 $m \frac{l}{2} \ddot{\theta}$ 。应用牛顿第二运动定律,对沿水平方向的平动,有

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + m\ddot{x} + m \frac{l}{2} \ddot{\theta} \cos \theta - m \frac{l}{2} \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ = -k_1x - k_2x - c_1\dot{x} - c_2\dot{x} + F(t) \end{aligned} \quad (\text{E. 1})$$

类似地,对绕铰支点 O 的转动,应用牛顿第二运动定律,有

$$\left(m \frac{l}{2} \ddot{\theta}\right) \frac{l}{2} + \left(m \frac{l^2}{12}\right) \ddot{\theta} + (m\ddot{x}) \frac{l}{2} \cos \theta = -(mg) \frac{l}{2} \sin \theta + M_1(t) \quad (\text{E. 2})$$

注意:

(1) 由于包含 $\sin \theta$, $\cos \theta$ 和 $\dot{\theta}^2 \sin \theta$ 项,运动微分方程(E. 1)和(E. 2)都是非线性的。

(2) 如果 $\dot{\theta}^2 \sin \theta$ 为可忽略的小量,且角位移非常小,即 $\cos \theta \approx 1$ 和 $\sin \theta \approx 0$,则方程(E. 1)和(E. 2)可以线性化,则线性化后的方程为

$$(M+m)\ddot{x} + \left(m \frac{l}{2}\right) \ddot{\theta} + (k_1+k_2)x + (c_1+c_2)\dot{x} = F(t) \quad (\text{E. 3})$$

和

$$\left(\frac{ml}{2}\right) \ddot{x} + \left(\frac{ml^2}{3}\right) \ddot{\theta} + \left(\frac{mgl}{2}\right) \theta = M_1(t) \quad (\text{E. 4})$$

6.4 影响系数

多自由度系统的运动微分方程也可根据影响系数(influence coefficient)法来推导,这在结构工程中广泛使用。一般地说,一组影响系数可以与运动微分方程中的每一个矩阵建立联系。与刚度矩阵与质量矩阵相关的影响系数分别称为刚度影响系数(stiffness influence coefficient)和惯性影响系数(inertia influence coefficient)。在某些情况下,使用刚度矩阵的逆矩阵即熟知的柔度矩阵(flexibility matrix)或质量矩阵的逆矩阵,可更方便地表示运动微分方程。与刚度矩阵的逆矩阵相对应的影响系数称为柔度影响系数(flexibility influence coefficient)。相应地,与质量矩阵的逆矩阵对应的系数称为逆惯性系数(inverse inertia coefficient)。

6.4.1 刚度影响系数

对一简单的产生线位移的弹簧,产生单位轴向变形的力称为弹簧的刚度系数。可用刚度影响系数表示系统上某点的位移与作用在系统其他点上的力之间的关系。刚度影

响系数 k_{ij} 可定义为除 j 点以外的其他点固定, j 点产生单位位移时在 i 点所要施加的力。根据这种定义, 对图 6.5 中的弹簧-质量系统, 在 i 点的总力 F_i 等于导致全部位移 $x_j (j=1, 2, \dots, n)$ 的所有力的和, 即

$$F_i = \sum_{j=1}^n k_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.12)$$

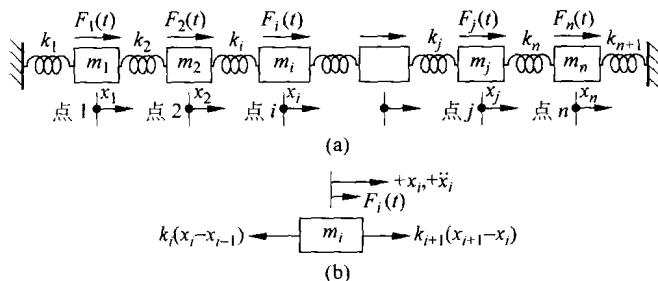


图 6.5 多自由度弹簧-质量系统

式(6.12)可以用矩阵的形式表示为

$$\mathbf{F} = \mathbf{k}\mathbf{x} \quad (6.13)$$

其中, \mathbf{x} 和 \mathbf{F} 是式(6.7)定义的位移和力矢量; \mathbf{k} 为刚度矩阵, 即

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

下面对刚度影响系数作几点说明:

(1) 根据 Maxwell 互易定理, 即使 j 点产生单位变形而其他点的变形为零时在 i 点所需施加的力, 与使 i 点产生单位变形而其他各点产生的变形为零时, 在 j 点所需施加的力相等, 故有 $k_{ij} = k_{ji}$ 。

(2) 也可应用静力学与固体力学的原理计算刚度影响系数。

(3) 对扭转系统的刚度影响系数, 可按照单位角位移与产生此角位移所需的扭矩来定义。例如, 在一个多盘扭转系统中, k_{ij} 可以定义为在 j 点产生单位角位移而在其他各点的角位移均为零时, 在 i 点所需施加的力矩。

多自由度系统的刚度影响系数可以按如下步骤确定:

(1) 假设 x_j 的值等于 1 (从 $j=1$ 开始), 而在其他全部各点 ($j=1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, n$) 的位移 $x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$ 均为零。根据定义, 一系列的力 $k_{ij} (i=1, 2, \dots, n)$ 应使系统保持为这一假定的构型 ($x_j=1, x_1=x_2=\dots=x_{j-1}=x_{j+1}=\dots=x_n=0$)。那么根据每个质量的全部 n 个静力学平衡方程, 可得 n 个影响系数 $k_{ij} (i=1, 2, \dots, n)$ 。

(2) 对 $j=1$, 完成第 1 步后, 对 $j=2, 3, \dots, n$, 重复上述步骤。

例 6.3 求图 6.6(a) 所示系统的刚度影响系数。

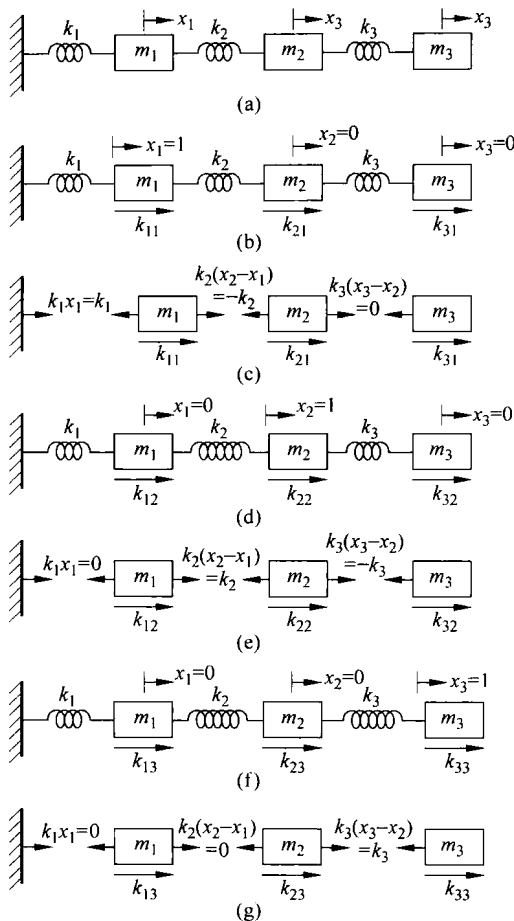


图 6.6 刚度影响系数的确定

解: 令 x_1, x_2 和 x_3 分别表示质量 m_1, m_2 和 m_3 的位移。刚度影响系数 k_{ij} 可根据弹簧刚度 k_1, k_2 和 k_3 求得。

首先令 m_1 的位移 $x_1=1, m_2$ 和 m_3 的位移 $x_2=x_3=0$, 一系列的力 $k_{i1} (i=1, 2, 3)$ 可使系统处于图 6.6(b) 所示的位置, 则该系统各质量块的受力如图 6.6(c) 所示。根据 m_1, m_2 和 m_3 沿水平方向的力的平衡方程得

$$\text{质量 } m_1: k_1 = -k_2 + k_{11} \quad (\text{E. 1})$$

$$\text{质量 } m_2: k_{21} = -k_2 \quad (\text{E. 2})$$

$$\text{质量 } m_3: k_{31} = 0 \quad (\text{E. 3})$$

由(E.1)~(E.3)得

$$k_{11} = k_1 + k_2, \quad k_{21} = -k_2, \quad k_{31} = 0 \quad (\text{E.4})$$

如图 6.6(d)所示,令各质量的位移分别为 $x_1=0, x_2=1$ 和 $x_3=0$ 。由于 $k_{i2} (i=1,2,3)$ 要求系统处于该构型,则物体的受力如图 6.6(e)所示,各质量的力的平衡方程为

$$\text{质量 } m_1: k_{12} + k_2 = 0 \quad (\text{E.5})$$

$$\text{质量 } m_2: k_{22} - k_3 = k_2 \quad (\text{E.6})$$

$$\text{质量 } m_3: k_{32} = -k_3 \quad (\text{E.7})$$

由式(E.5)~式(E.7)得

$$k_{12} = -k_2, \quad k_{22} = k_2 + k_3, \quad k_{32} = -k_3 \quad (\text{E.8})$$

最后,一系列力的 $k_{i3} (i=1,2,3)$ 使系统保持 $x_1=0, x_2=0$ 和 $x_3=1$ (见图 6.6(f)),该构型中各物体的受力如图 6.6(g)所示,力的平衡方程变为

$$\text{质量 } m_1: k_{13} = 0 \quad (\text{E.9})$$

$$\text{质量 } m_2: k_{23} + k_3 = 0 \quad (\text{E.10})$$

$$\text{质量 } m_3: k_{33} = k_3 \quad (\text{E.11})$$

由式(E.9)~式(E.11)得

$$k_{13} = 0, \quad k_{23} = -k_3, \quad k_{33} = k_3 \quad (\text{E.12})$$

于是系统的刚度矩阵为

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \quad (\text{E.13})$$

例 6.4 确定图 6.7(a)所示刚架的刚度矩阵,忽略 AB 和 CD 段轴向刚度的影响。

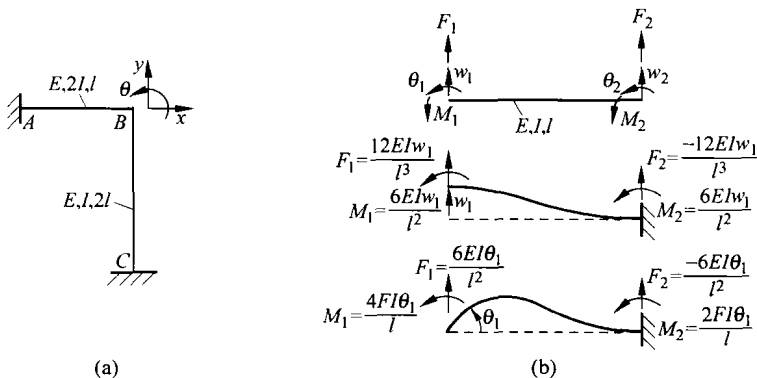


图 6.7 框架的刚度矩阵

解: 由于框架的 AB 和 CD 段可以视为梁,因此可以利用梁的力-变形公式来确定框架的刚度矩阵。使梁沿某一坐标方向产生位移,而沿其他坐标方向保持零位移所需的各力如

图 6.7(b)所示。在图 6.7(a)中, A 与 C 为固定端, 因此 B 点可能会产生 3 个方向的位移即 x, y 与 θ 。根据图 6.7(b), 使 B 点沿 x 方向产生单位位移, 而沿 y 和 θ 方向产生零位移所需施加的力为

$$F_x = \left(\frac{12EI}{l^3} \right)_{BC} = \frac{3EI}{2l^3}, \quad F_y = 0, \quad M_\theta = \left(\frac{6EI}{l^2} \right)_{BC} = \frac{3EI}{2l^2}$$

同理, 使点 B 沿 y 方向产生单位位移, 而沿 x 和 θ 方向产生零位移所需的力为

$$F_x = 0, \quad F_y = \left(\frac{12EI}{l^3} \right)_{BA} = \frac{24EI}{l^3}, \quad M_\theta = - \left(\frac{6EI}{l^2} \right)_{BA} = - \frac{12EI}{l^2}$$

最后, 使点 B 沿 θ 方向产生单位位移, 而沿 x 与 y 方向产生零位移所需的力为

$$F_x = \left(\frac{6EI}{l^2} \right)_{BC} = \frac{3EI}{2l^2}, \quad F_y = - \left(\frac{6EI}{l^2} \right)_{BA} = - \frac{12EI}{l^3}$$

$$M_\theta = \left(\frac{4EI}{l} \right)_{BC} + \left(\frac{4EI}{l} \right)_{BA} = \frac{2EI}{l} + \frac{8EI}{l} = \frac{10EI}{l}$$

于是, 可以根据下式确定刚度矩阵:

$$\mathbf{F} = \mathbf{k}\mathbf{x}$$

其中

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_\theta \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{k} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{3l}{2} \\ 0 & 24 & -12l \\ \frac{3l}{2} & -12l & 10l^2 \end{bmatrix}$$

6.4.2 柔度影响系数

从例 6.3 和例 6.4 中可知, 刚度影响系数的计算要用到静力学平衡方程, 并要进行代数处理。实际上, 对任意指定的 j 点的 n 个刚度影响系数 $k_{1j}, k_{2j}, \dots, k_{nj}$, 需要同时解 n 个线性方程以获得 n 个自由度系统的全部刚度影响系数。当 n 较大时, 这意味着很大的计算量。然而柔度影响系数的计算却较简单与方便得多。为说明该概念, 再次考虑图 6.5 所示的弹簧-质量系统。

令该系统只受一个力 F_j 的作用时, 由 F_j 导致 i 点(即质量 m_i)的位移为 x_{ij} 。以 a_{ij} 表示的柔度影响系数可以定义为 j 点上作用的单位载荷所引起的 i 点的位移。对于线性系统, 由于位移与载荷成正比例, 故有

$$x_{ij} = a_{ij}F_j \quad (6.15)$$

如果 n 个力 $F_j (j=1, 2, \dots, n)$ 作用在系统的不同点上, 则任意 i 点的总变形可以通过对所有力 F_j 的贡献求和得到, 即

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij}F_j, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.16)$$

式(6.16)可以用矩阵的形式表示为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{F} \quad (6.17)$$

其中, \boldsymbol{x} 与 \boldsymbol{F} 是式(6.7)中定义的位移与力矢量; \boldsymbol{a} 是柔度矩阵, 形式为

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

柔度影响系数的特点可总结如下:

(1) 式(6.17)与式(6.13)表明, 柔度矩阵与刚度矩阵是相关的。如果将式(6.13)代入式(6.17), 则有

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{k}\boldsymbol{x} \quad (6.19)$$

从而得到

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{I} \quad (6.20)$$

其中, \boldsymbol{I} 为单位矩阵。式(6.20)等价于

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{a}^{-1}, \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{k}^{-1} \quad (6.21)$$

即刚度矩阵与柔度矩阵互为逆矩阵。

(2) 由于 j 点上的单位力导致的 i 点位移, 与 i 点上作用的单位力在 j 点上产生的变形相等(Maxwell 互易定理), 故有 $a_{ij} = a_{ji}$ 。

(3) 扭振系统的柔度影响系数可以根据单位力矩与由其产生的角位移来定义。例如, 在一多圆盘扭振系统中, a_{ij} 定义为 j 点(圆盘 j)上的单位力矩在 i 点(圆盘 i)上产生的角位移。

多自由度系统的柔度影响系数的求解过程如下:

(1) 假定在 j 点(从 $j=1$ 开始)作用一单位载荷, 根据定义, 在其他各点 $i(i=1, 2, \dots, n)$ 产生的位移即为柔度影响系数 $a_{ij}(i=1, 2, \dots, n)$, 于是 a_{ij} 能用静力学与固体力学中的简单原理求得。

(2) 在完成对 $j=1$ 的第 1 步后, 对 $j=2, 3, \dots, n$, 重复以上步骤。

(3) 不利用第 1 步与第 2 步, 如果刚度矩阵已知, 柔度矩阵 \boldsymbol{a} 也可以通过求刚度矩阵 \boldsymbol{k} 的逆矩阵求得。

下面的例子可进一步说明这些步骤。

例 6.5 求图 6.8(a)所示系统的柔度影响系数。

解: 令 x_1, x_2 和 x_3 分别表示质量 m_1, m_2 和 m_3 的位移。系统的柔度影响系数 a_{ij} 可以根据弹簧的刚度 k_1, k_2 和 k_3 求得。方法是在质量 m_1 上作用单位力而在其他质量上不作用力(即 $F_1=1, F_2=F_3=0$), 如图 6.8(b)所示。根据定义, 质量 m_1, m_2 和 m_3 的变形 x_1, x_2 和 x_3 分别等于 a_{11}, a_{21} 和 a_{31} (见图 6.8(b)), 图 6.8(c)为各质量的受力分析图。各质量沿水平方向的力平衡可表示如下:

$$\text{质量 } m_1: k_1 a_{11} = k_2(a_{21} - a_{11}) + 1 \quad (\text{E.1})$$

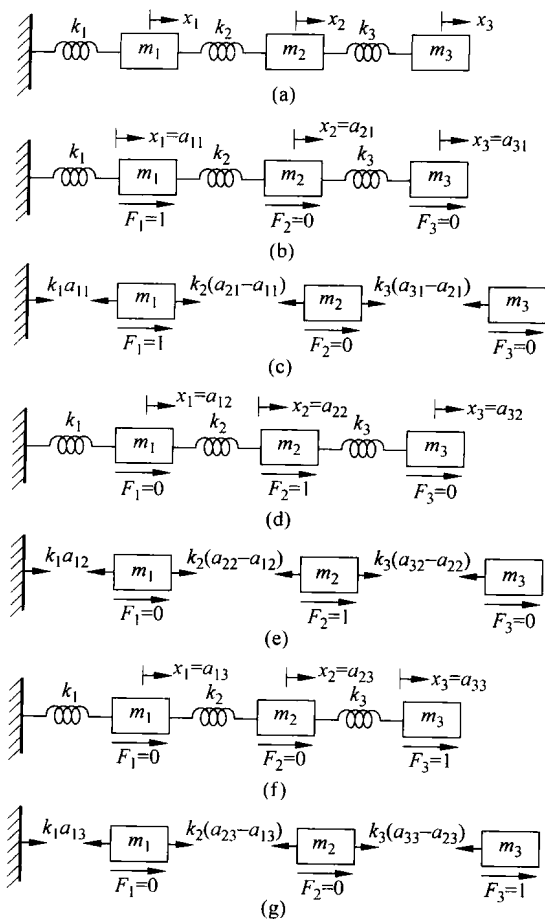


图 6.8 柔度影响系数的确定

$$\text{质量 } m_2: k_2(a_{21} - a_{11}) = k_3(a_{31} - a_{21}) \quad (\text{E. 2})$$

$$\text{质量 } m_3: k_3(a_{31} - a_{21}) = 0 \quad (\text{E. 3})$$

式(E. 1)~式(E. 3)的解为

$$a_{11} = \frac{1}{k_1}, \quad a_{21} = \frac{1}{k_1}, \quad a_{31} = \frac{1}{k_1} \quad (\text{E. 4})$$

接下来,如图 6.8(d)所示,在质量 m_2 上作用一单位力,在 m_1 与 m_3 上不施加作用力。这些力导致质量 m_1, m_2 和 m_3 的变形分别为 $x_1 = a_{12}, x_2 = a_{22}$ 和 $x_3 = a_{32}$ (根据 a_{12} 的定义) (见图 6.8(d)),各质量的受力分析如图 6.8(e)所示,根据平衡方程得

$$\text{质量 } m_1: k_1 a_{12} = k_2(a_{22} - a_{12}) \quad (\text{E. 5})$$

$$\text{质量 } m_2: k_2(a_{22} - a_{12}) = k_3(a_{32} - a_{22}) + 1 \quad (\text{E. 6})$$

$$\text{质量 } m_3: k_3(a_{32} - a_{22}) = 0 \quad (\text{E. 7})$$

式(E. 5)~式(E. 7)的解为

$$a_{12} = \frac{1}{k_1}, \quad a_{22} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}, \quad a_{32} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad (\text{E. 8})$$

最后,当质量 m_3 上作用一单位力,质量 m_1 与 m_2 上不受作用力时(如图 6.8(f)所示),各质量的变形分别为 $x_1 = a_{13}$, $x_2 = a_{23}$ 与 $x_3 = a_{33}$ 。由各质量的受力分析图(见图 6.8(g))得下列平衡方程:

$$\text{质量 } m_1: k_1 a_{13} = k_2(a_{23} - a_{13}) \quad (\text{E. 9})$$

$$\text{质量 } m_2: k_2(a_{23} - a_{13}) = k_3(a_{33} - a_{23}) \quad (\text{E. 10})$$

$$\text{质量 } m_3: k_3(a_{33} - a_{23}) = 1 \quad (\text{E. 11})$$

式(E. 9)~式(E. 11)的解给出了柔度影响系数 a_{13} , 即

$$a_{13} = \frac{1}{k_1}, \quad a_{23} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}, \quad a_{33} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \quad (\text{E. 12})$$

可以验证,根据例 6.3 中的式(E. 13)确定的刚度矩阵,也可以利用关系 $k = a^{-1}$ 来求得。

例 6.6 推导图 6.9(a)中无重梁的柔度矩阵。该梁的两端为简支端,3 个质量块等间距地放置。假定梁为等截面刚度为 EI 。

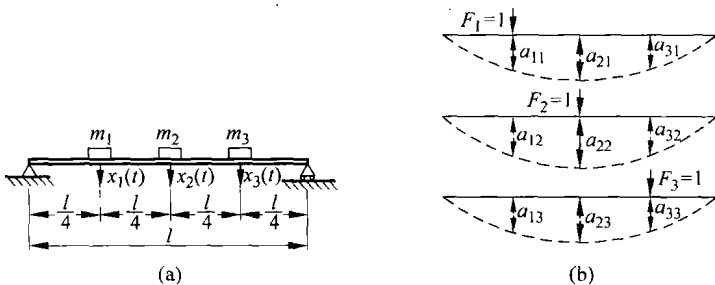


图 6.9 梁的变形

解: 令 x_1, x_2 和 x_3 分别表示质量块 m_1, m_2 和 m_3 的横向位移。根据简支梁的变形公式,通过在 m_1 处作用单位载荷,在 m_2 和 m_3 处作用零载荷求得的影响系数 a_{1j} ($j=1, 2, 3$) (见图 6.9(b))为

$$a_{11} = \frac{9}{768} \frac{l^3}{EI}, \quad a_{12} = \frac{11}{768} \frac{l^3}{EI}, \quad a_{13} = \frac{7}{768} \frac{l^3}{EI} \quad (\text{E. 1})$$

类似地,通过单独在 m_2 和 m_3 处作用单位载荷(其他位置处载荷为零),则得

$$a_{21} = a_{12} = \frac{11}{768} \frac{l^3}{EI}, \quad a_{22} = \frac{1}{48} \frac{l^3}{EI}, \quad a_{23} = \frac{11}{768} \frac{l^3}{EI} \quad (\text{E. 2})$$

与

$$a_{31} = a_{13} = \frac{7}{768} \frac{l^3}{EI}, \quad a_{32} = a_{23} = \frac{11}{768} \frac{l^3}{EI}, \quad a_{33} = \frac{9}{768} \frac{l^3}{EI} \quad (\text{E. 3})$$

于是系统的柔度矩阵为

$$\mathbf{a} = \frac{l^3}{768EI} \begin{bmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{bmatrix} \quad (\text{E. 4})$$

6.4.3 惯性影响系数

质量矩阵的元素 m_{ij} 即为所说的惯性影响系数。虽然从系统的动能表达式可以方便地得到惯性影响系数,但是系数 m_{ij} 也能借助冲量-动量关系计算。惯性影响系数 $m_{1j}, m_{2j}, \dots, m_{nj}$ 可以分别定义为作用在 $1, 2, \dots, n$ 点的冲量,以使 j 点产生单位速度,而在其他各点产生的速度为零(即 $\dot{x}_j = 1, \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dots = \dot{x}_{j-1} = \dot{x}_{j+1} = \dots = \dot{x}_n = 0$)。于是,对一个多自由度系统而言,作用在 i 点的总冲量 \tilde{F}_i 可以通过对引起速度 \dot{x}_j ($j=1, 2, \dots, n$) 的各冲量求和而得到:

$$\tilde{F}_i = \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{x}_j \quad (6.22)$$

式(6.22)的矩阵形式为

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{m} \dot{\mathbf{x}} \quad (6.23)$$

其中, $\dot{\mathbf{x}}$ 与 $\tilde{\mathbf{F}}$ 分别为速度矢量和冲量矢量,即

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{Bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{F}} = \begin{Bmatrix} \tilde{F}_1 \\ \tilde{F}_2 \\ \vdots \\ \tilde{F}_n \end{Bmatrix} \quad (6.24)$$

\mathbf{m} 为质量矩阵,可以表示为

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

容易验证,对一线性系统而言,惯性影响系数是对称的,即 $m_{ij} = m_{ji}$ 。可以按下面的步骤来推导多自由度系统的惯性影响系数:

(1) 假设一组作用在各个点 i ($i=1, 2, \dots, n$) 上的冲量 \tilde{f}_{ij} , 使得引起 j 点的速度为单位速度($\dot{x}_j=1$, 从 $j=1$ 开始), 而其他各点的速度为零($\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dots = \dot{x}_{j-1} = \dot{x}_{j+1} = \dots = \dot{x}_n = 0$)。根据定义, 这组冲量 \tilde{f}_{ij} ($i=1, 2, \dots, n$) 就表示惯性影响系数 m_{ij} ($i=1, 2, \dots, n$)。

(2) 在完成对 $j=1$ 的计算后, 对 $j=2, 3, \dots, n$, 分别重复以上计算。

注意: 若 x_j 表示角坐标, 则 \dot{x}_j 与 F_j 分别表示角速度和角冲量。下面的例子可以进一步说明惯性影响系数 m_{ij} 的计算过程。

例 6.7 求图 6.4(a) 所示系统的惯性影响系数。

解: 令 $x(t)$ 与 $\theta(t)$ 分别表示定义拖车 (M) 与复摆 (m) 的直线位置与角位置的坐标。为推导惯性影响系数, 作用大小为 m_{11} 和 m_{21} 、分别沿 $x(t)$ 与 $\theta(t)$ 方向的冲量, 使得速度 $\dot{x}=1$, $\dot{\theta}=0$ 。则由线冲量-线动量方程可以得

$$m_{11} = (M+m)(1) \quad (\text{E. } 1)$$

由对 O 点的角冲量-角动量方程得

$$m_{21} = m(1) \frac{l}{2} \quad (\text{E. } 2)$$

接下来, 作用大小为 m_{12} 与 m_{22} 、分别沿 $x(t)$ 与 $\theta(t)$ 方向的冲量, 使得速度 $\dot{x}=0$, $\dot{\theta}=1$ 。则由线冲量-线动量关系得

$$m_{12} = m(1) \left(\frac{l}{2} \right) \quad (\text{E. } 3)$$

由对 O 点的角冲量-角动量方程得

$$m_{22} = \left(\frac{ml^2}{3} \right) (1) \quad (\text{E. } 4)$$

于是系统的质量矩阵或惯性矩阵为

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} M+m & \frac{ml}{2} \\ \frac{ml}{2} & \frac{ml^2}{3} \end{bmatrix} \quad (\text{E. } 5)$$

6.5 以矩阵形式表示的势能与动能

在类似于图 6.5 所示的 n 自由度系统中, 令 x_i 表示质量 m_i 的位移, F_i 为作用在质量 m_i 上沿 x_i 方向上的力。

第 i 个弹簧的弹性势能 (也称为应变能或变形能) 为

$$V_i = \frac{1}{2} F_i x_i \quad (6.26)$$

系统的总势能可以表示为

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i x_i \quad (6.27)$$

由于

$$F_i = \sum_{j=1}^n k_{ij} x_j \quad (6.28)$$

式(6.27)变为

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n k_{ij} x_j \right) x_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} x_i x_j \quad (6.29)$$

式(6.29)可以用矩阵的形式表示为^①

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{k} \mathbf{x} \quad (6.30)$$

其中,位移向量如式(6.7)所示,刚度矩阵可以表示为

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

根据定义,质量 m_i 的动能为

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \quad (6.32)$$

故系统的总动能为

$$T = \sum_{i=1}^n T_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{x}_i^2 \quad (6.33)$$

以矩阵形式表示则为

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{x}} \quad (6.34)$$

其中,速度矢量 $\dot{\mathbf{x}}$ 为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{Bmatrix}$$

质量矩阵 \mathbf{m} 为对角阵,即

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 & & 0 \\ & m_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & m_n \end{bmatrix} \quad (6.35)$$

如果用广义坐标 q_i 代替物理坐标 x_i ,则动能为

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{q}} \quad (6.36)$$

① 由于在式(6.29)中下标 i 与 j 可以互换,从而有关系 $k_{ij} = k_{ji}$ 。

其中, $\dot{\mathbf{q}}$ 为广义速度矢量

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{Bmatrix} \quad (6.37)$$

\mathbf{m} 为广义质量矩阵

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

并有 $m_{ij} = m_{ji}$ 。由式(6.35)不同, (6.38)确定的广义质量矩阵不是对角阵。

由于势能是位移的二次函数, 动能是速度的二次函数, 因此它们能用二次型来表示。根据定义, 动能不能为负, 仅当速度全部为零时, 动能才能取零。式(6.34)与式(6.36)叫做正定二次型, 质量矩阵 \mathbf{m} 称为正定矩阵。另一方面, 式(6.30)中的势能表达式是正定二次型, 但仅当系统为稳定系统时, 矩阵 \mathbf{k} 方为正定矩阵。有这样一类系统, 对于位移或坐标 x_1, x_2, \dots, x_n 不为零, 而势能却为零。此时系统的势能为正的二次函数但却不是正定的。相应地, 称矩阵 \mathbf{k} 是正的。若 \mathbf{k} 是正的, \mathbf{m} 是正定的, 则这样的系统称为半正定系统(见 6.12 节)。

6.6 广义坐标与广义力

振动系统的运动微分方程可以用不同的坐标系描述。如前所述, 描述 n 自由度系统的运动要用 n 个独立坐标。任意 n 个独立坐标称为广义坐标, 通常用 q_1, q_2, \dots, q_n 表示。广义坐标可能是长度、角度或其他在任意时刻唯一确定系统位形的量, 它们还与约束条件无关。

为了阐述广义坐标的概念, 讨论图 6.10 所示的三重摆。系统的位形可以通过 6 个坐标 $(x_j, y_j), j=1, 2, 3$ 描述。然而这些坐标不是独立的, 而是受以下关系限制:

$$\left. \begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 &= l_1^2 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 &= l_2^2 \\ (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 &= l_3^2 \end{aligned} \right\} \quad (6.39)$$

由于坐标 $(x_j, y_j), j=1, 2, 3$ 不是独立的, 所以它们不能称为广义坐标。如果没有式(6.39)的限制, 每个质量 m_1, m_2 与 m_3 将自由地占据 xy 平面上的任意位置。该约束去除了 6 个

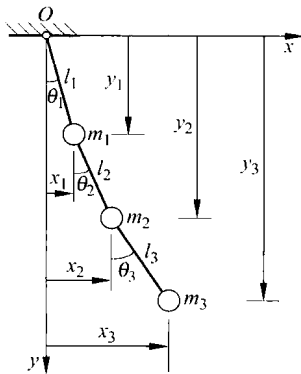


图 6.10 三重摆

坐标(每个质量 2 个坐标)中的 3 个自由度,于是系统仅有 3 个自由度。如果用角位移 $\theta_j (j=1,2,3)$ 来表示质量 $m_j (j=1,2,3)$ 在任意时刻的位置,则对于 θ_j 没有约束。于是它们构成了一组广义坐标,可以表示为 $q_j = \theta_j, j=1,2,3$ 。

当系统受到外力作用时,系统的位形将发生变化。系统新的位形可以根据广义坐标 q_j 的改变量 $\delta q_j, j=1,2,\dots,n$ 确定,其中 n 表示系统的广义坐标(或自由度)数。如果用 U_j 表示在广义坐标 q_j 的改变量 δq_j 上所做的功,则相应的广义力 Q_j 定义为

$$Q_j = \frac{U_j}{\delta q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (6.40)$$

其中,当 q_j 为线位移时, Q_j 为力;当 q_j 为角位移时, Q_j 为力矩。

6.7 用拉格朗日方程推导运动微分方程

利用拉格朗日方程可以比较简单的方式推导得到用广义坐标表示的振动系统的运动微分方程。对一个 n 自由度系统,拉格朗日方程可以表示为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j^{(n)}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (6.41)$$

其中, $\dot{q}_j = \partial q_j / \partial t$ 为广义速度; $Q_j^{(n)}$ 是相对于广义坐标 q_j 的非保守广义力,以 $Q_j^{(n)}$ 表示的这个力可能是耗散(阻尼)力或其他不能通过势函数得到的外力。例如,若 F_{xk}, F_{yk} 和 F_{zk} 分别表示沿 x, y 与 z 方向作用在系统第 k 个质量上的外力,则广义力 $Q_j^{(n)}$ 可以通过下式计算:

$$Q_j^{(n)} = \sum_k \left(F_{xk} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + F_{yk} \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + F_{zk} \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right) \quad (6.42)$$

其中, x_k, y_k 和 z_k 分别为第 k 个质量沿 x, y 与 z 方向的位移。对于扭振系统,例如在式(6.42)中,力 F_{xk} 要用作用于 x 轴的力矩 M_{xk} 代替,位移 x_k 要用绕 x 轴的角位移 θ_{xk} 代替。对于保守系统, $Q_j^{(n)} = 0$, 于是式(6.41)变为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (6.43)$$

式(6.41)或式(6.43)表示 n 个微分方程,其中的每一个对应着一个广义坐标。所以只要知道系统动能和势能的表达式,则可推导出振动系统的运动微分方程。

例 6.8 某热电厂的压缩机、涡轮机、发电机的布置如图 6.11 所示,该布置可视为一扭振系统。其中, J_i 表示 3 个组件(压缩机、涡轮机与发电机)的转动惯量, M_{ti} 表示作用在其上的外力矩, k_u 为组件间轴的扭转弹簧常数。将各组件的角位移 θ_i 视为广义坐标,采用拉格朗日方程推导系统的运动微分方程。

解: 此时 $q_1 = \theta_1, q_2 = \theta_2$ 和 $q_3 = \theta_3$, 系统的动能为

$$T = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} J_3 \dot{\theta}_3^2 \quad (E.1)$$

对轴而言,势能等于轴从动态位形回到参考平衡位置过程中所做的功。于是,若用 θ 表示角

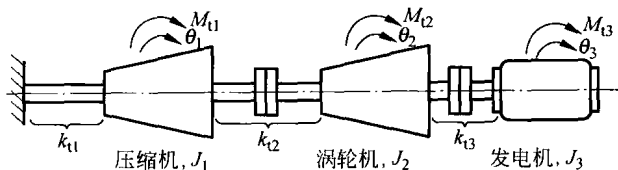


图 6.11 扭转系统

位移, 对一扭转弹簧常数为 k_i 的轴, 则势能等于在角位移 θ 上轴所做的功, 即

$$V = \int_0^\theta k_i \theta d\theta = \frac{1}{2} k_i \theta^2 \quad (\text{E. 2})$$

于是系统的总势能可以表示为

$$V = \frac{1}{2} k_{11} \theta_1^2 + \frac{1}{2} k_{12} (\theta_2 - \theta_1)^2 + \frac{1}{2} k_{13} (\theta_3 - \theta_2)^2 \quad (\text{E. 3})$$

由于有作用于组件上的外力矩, 则由式(6.42)得

$$Q_j^{(n)} = \sum_{k=1}^3 M_{ik} \frac{\partial \theta_k}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^3 M_{ik} \frac{\partial \theta_k}{\partial \theta_j} \quad (\text{E. 4})$$

由此得

$$\left. \begin{aligned} Q_1^{(n)} &= M_{11} \frac{\partial \theta_1}{\partial \theta_1} + M_{12} \frac{\partial \theta_2}{\partial \theta_1} + M_{13} \frac{\partial \theta_3}{\partial \theta_1} = M_{11} \\ Q_2^{(n)} &= M_{11} \frac{\partial \theta_1}{\partial \theta_2} + M_{12} \frac{\partial \theta_2}{\partial \theta_2} + M_{13} \frac{\partial \theta_3}{\partial \theta_2} = M_{12} \\ Q_3^{(n)} &= M_{11} \frac{\partial \theta_1}{\partial \theta_3} + M_{12} \frac{\partial \theta_2}{\partial \theta_3} + M_{13} \frac{\partial \theta_3}{\partial \theta_3} = M_{13} \end{aligned} \right\} \quad (\text{E. 5})$$

将式(E.1)、式(E.3)与式(E.5)代入拉格朗日方程(6.41)中, 对 $j=1, 2, 3$, 得如下运动微分方程

$$\left. \begin{aligned} J_1 \ddot{\theta}_1 + (k_{11} + k_{12})\theta_1 - k_{12}\theta_2 &= M_{11} \\ J_2 \ddot{\theta}_2 + (k_{12} + k_{13})\theta_2 - k_{12}\theta_1 - k_{13}\theta_3 &= M_{12} \\ J_3 \ddot{\theta}_3 + k_{13}\theta_3 - k_{13}\theta_2 &= M_{13} \end{aligned} \right\} \quad (\text{E. 6})$$

可以用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} + k_{12} & -k_{12} & 0 \\ -k_{12} & k_{12} + k_{13} & -k_{13} \\ 0 & -k_{13} & k_{13} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{12} \\ M_{13} \end{Bmatrix} \quad (\text{E. 7})$$

例 6.9 推导图 6.4(a)所示的拖车-复摆系统的运动微分方程。

解: 选择坐标 $x(t)$ 与 $\theta(t)$ 作为广义坐标来描述拖车的线位移与复摆的角位移。如图 6.4(a)所示, 为方便, 引入 y 坐标, 则 C 点的位移分量可以表示为

$$x_c = x + \frac{l}{2} \sin \theta \quad (\text{E. 1})$$

$$y_c = \frac{l}{2} \cos \theta \quad (\text{E. 2})$$

将式(E. 1)与式(E. 2)对时间求导,则得C点的速度为

$$\dot{x}_c = \dot{x} + \frac{l}{2} \dot{\theta} \cos \theta \quad (\text{E. 3})$$

$$\dot{y}_c = -\frac{l}{2} \dot{\theta} \sin \theta \quad (\text{E. 4})$$

系统的动能 T 可以表示为

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + J_c \dot{\theta}^2 \quad (\text{E. 5})$$

其中, $J_c = \frac{1}{12} ml^2$ 。利用式(E. 3)与(E. 4),式(E. 5)可以表示为

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \frac{l^2}{4} \dot{\theta}^2 + \dot{x} \dot{\theta} l \cos \theta \right) + \frac{1}{2} \frac{ml^2}{12} \dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{ml^2}{3} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} (ml \cos \theta) \dot{x} \dot{\theta} \end{aligned} \quad (\text{E. 6})$$

由于弹簧的变形和重力势能,系统的总势能 V 为

$$V = \frac{1}{2} k_1 x^2 + \frac{1}{2} k_2 x^2 + mg \frac{l}{2} (1 - \cos \theta) \quad (\text{E. 7})$$

其中,C点的最低位置视为零势能位置。由于系统上作用有非保守力,则可计算与 $x(t)$ 和 $\theta(t)$ 对应的广义力。根据式(6.42),可计算沿 $x(t)$ 方向的作用力 $X(t)$ 为

$$X(t) = Q_1^{(n)} = F(t) - c_1 \dot{x}(t) - c_2 \dot{x}(t) \quad (\text{E. 8})$$

其中, $c_1 \dot{x}$ 与 $c_2 \dot{x}$ 前的负号表示阻尼力与运动方向相反。同理,沿 $\theta(t)$ 方向的作用力 $\Theta(t)$ 可以表示为

$$\Theta(t) = Q_2^{(n)} = M_t(t) \quad (\text{E. 9})$$

其中, $q_1 = x$ 和 $q_2 = \theta$ 。计算式(6.41)中 T 与 V 的微分,将所得结果以及式(E. 8)~(E. 9)代入后,则得系统的运动微分方程为

$$\begin{aligned} (M + m) \ddot{x} + \frac{1}{2} (ml \cos \theta) \ddot{\theta} - \frac{1}{2} (ml \sin \theta) \dot{\theta}^2 + k_1 x + k_2 x \\ = F(t) - c_1 \dot{x} - c_2 \dot{x} \end{aligned} \quad (\text{E. 10})$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3} ml^2 \right) \ddot{\theta} + \frac{1}{2} (ml \cos \theta) \ddot{x} - \frac{1}{2} (ml \sin \theta) \dot{\theta} \dot{x} + \frac{1}{2} (ml \sin \theta) \dot{\theta} \dot{x} \\ + \frac{1}{2} mgl \sin \theta = M_t(t) \end{aligned} \quad (\text{E. 11})$$

可见,式(E. 10)与式(E. 11)和例 6.2 中利用牛顿第二运动定律所得的式(E. 1)与式(E. 2)相同。

6.8 以矩阵形式表示的无阻尼系统的运动微分方程

根据拉格朗日方程可以推导出以矩阵形式表示的多自由度系统的运动微分方程:^①

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.44)$$

其中, F_i 是相对于第 i 个广义坐标 x_i 的非保守广义力; \dot{x}_i 是 x_i 对时间的导数(广义速度)。多自由度系统的动能和势能(见 6.5 节)以矩阵的形式可以表示为

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{x}} \quad (6.45)$$

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{k} \mathbf{x} \quad (6.46)$$

其中, \mathbf{x} 为广义坐标的列向量, 即

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \quad (6.47)$$

根据矩阵理论, 由 \mathbf{m} 的对称性可得

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{m} \boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{m}_i^T \dot{\mathbf{x}}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.48)$$

其中, δ_{ji} 是克罗内克符号(若 $j=i$, $\delta_{ji}=1$; 若 $j \neq i$, $\delta_{ji}=0$); $\boldsymbol{\delta}$ 是列向量, 其各行上的元素当 $j \neq i$ 时等于零, 当 $i=j$ 时等于 1; \mathbf{m}_i^T 为行向量, 与矩阵 \mathbf{m} 的第 i 行相同。式(6.48)表示的全部关系即

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \mathbf{m}_i^T \dot{\mathbf{x}} \quad (6.49)$$

式(6.49)对时间的微分为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) = \mathbf{m}_i^T \ddot{\mathbf{x}}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.50)$$

由于质量矩阵不是时间的函数, 同时动能为速度 \dot{x}_i 的函数, 则

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.51)$$

同理, 根据矩阵 \mathbf{k} 的对称性, 式(6.46)的微分为

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{k} \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{k} \boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{k} \mathbf{x} = \mathbf{k}_i^T \mathbf{x}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.52)$$

^① 在式(6.44)中广义坐标用 x_i 代替 q_i , 广义力用 F_i 代替 $Q_i^{(n)}$ 。

其中, \mathbf{k}_i^T 为行向量, 与矩阵 \mathbf{k} 的第 i 行相同。将式(6.50)~(6.52)代入式(6.44), 则得所期望的以矩阵形式表示的方程

$$m\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{k}\mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (6.53)$$

其中

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad (6.54)$$

若系统是保守的, 则不存在非保守力 F_i , 于是运动微分方程变为

$$m\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{k}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (6.55)$$

此外, 还要注意若广义坐标 x_i 为实际(物理)位移, 则质量矩阵 \mathbf{m} 为对角阵。

6.9 特征值问题

方程(6.55)的解对应着系统的无阻尼自由振动。如果系统以初始位移或初始速度或两者兼有的形式获得一定的能量, 由于不存在能量耗散, 系统将无限地振动下去。可通过假定解的形式求得方程(6.55)的解:

$$x_i(t) = X_i T(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.56)$$

其中, X_i 为常数; T 是时间 t 的函数。式(6.56)表明两个坐标的振动位移之比 $\{x_i(t)/x_j(t)\}$ 与时间无关, 即所有的坐标作同步运动。在运动过程中, 系统的位形不能改变其形状但能改变其大小。系统的位形可以矢量的形式表示为

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix}$$

称为系统的模态。将式(6.56)代入式(6.55), 得到

$$m\mathbf{X}\ddot{T}(t) + \mathbf{k}\mathbf{X}T(t) = \mathbf{0} \quad (6.57)$$

式(6.57)可以写成 n 个独立的标量形式的方程, 即

$$\left(\sum_{j=1}^n m_{ij} X_j\right)\ddot{T}(t) + \left(\sum_{j=1}^n k_{ij} X_j\right)T(t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.58)$$

从而可得到如下关系:

$$-\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \frac{\sum_{j=1}^n k_{ij} X_j}{\sum_{j=1}^n m_{ij} X_j}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.59)$$

由于式(6.59)的等号左边独立于指标 i , 右边与时间 t 无关, 则两边必定等于一常数。假定该常数^①为 ω^2 , 则式(6.59)可以表示为

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0 \quad (6.60)$$

$$\sum_{j=1}^n (k_{ij} - \omega^2 m_{ij}) X_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

或

$$(k - \omega^2 m)X = 0 \quad (6.61)$$

式(6.60)的解可以表示为

$$T(t) = C_1 \cos(\omega t + \phi) \quad (6.62)$$

其中, C_1 和 ϕ 为常数, 分别为振幅和相角。式(6.62)表示系统的全部坐标都以相同的频率和相角作简谐运动。但频率 ω 不能为任意值, 它必须满足式(6.61)。由于式(6.61)表示未知量为 $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的 n 个齐次线性方程, 为求其非零解, 系数矩阵的行列式必须为零, 即

$$\Delta = |k_{ij} - \omega^2 m_{ij}| = |k - \omega^2 m| = 0 \quad (6.63)$$

式(6.61)表示一特征值问题, 式(6.63)称为特征方程, ω^2 称为特征值, ω 称为系统的固有频率。

式(6.63)可以展开成以 ω^2 表示的 n 阶多项式方程, 该多项式或特征方程的解(根)给出 n 个 ω^2 的值。可以证明, 当矩阵 k 与 m 均为对称的正定阵时, 则得 n 个正的实根。若 $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$ 表示 n 个按递增顺序排列的根, 则它们的正平方根给出了系统的 n 个固有频率 $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n$ 。最小值 ω_1 叫做基频或第1阶固有频率。一般来说, 各阶固有频率 ω_i 是不同的, 但在有些情况下两个固有频率也可能相等。

6.10 特征值问题的解

有多种方法可以用来求解特征值问题, 本节只讨论一种基本的求解方法。

6.10.1 特征方程的解

方程(6.61)也可以表示为

$$(\lambda k - m)X = 0 \quad (6.64)$$

其中

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2} \quad (6.65)$$

式(6.64)两边左乘 k^{-1} , 则得

^① 该常数假定为正数 ω^2 , 于是可得式(6.60)的简谐解。否则 $T(t)$ 与 $x(t)$ 的解将变为指数形式, 这将与有限总能量的物理限制相违背。

$$(\lambda I - D)X = 0$$

或

$$\lambda IX = DX \quad (6.66)$$

其中, I 为单位矩阵; D 定义为

$$D = k^{-1}m \quad (6.67)$$

称为**动力矩阵**。特征值问题式(6.66)称为标准特征值问题。为求 X 的非零解, 特征行列式必须为零, 即

$$\Delta = |\lambda I - D| = 0 \quad (6.68)$$

将式(6.68)展开后得到一个关于 λ 的 n 次多项式方程, 称为特征方程或频率方程。如果系统的自由度 n 较大, 则多项式方程的求解将十分繁琐, 必须借助数值方法求解。有多种数值方法可用于求解特征方程的根。

例 6.10 求图 6.8(a)所示系统的固有频率与主振型, 已知 $k_1 = k_2 = k_3 = k$, $m_1 = m_2 = m_3 = m$ 。

解: 动力矩阵为

$$D = k^{-1}m \equiv am \quad (E.1)$$

根据例 6.5, 柔度矩阵与质量矩阵分别为

$$a = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (E.2)$$

和

$$m = m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (E.3)$$

因而

$$D = \frac{m}{k} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (E.4)$$

令特征行列式为零, 得到频率方程为

$$\Delta = |\lambda I - D| = \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \frac{m}{k} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (E.5)$$

其中

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2} \quad (E.6)$$

将式(E.5)除以 λ , 有

$$\begin{vmatrix} 1-\alpha & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1-2\alpha & -2\alpha \\ -\alpha & -2\alpha & 1-3\alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 - 5\alpha^2 + 6\alpha - 1 = 0 \quad (\text{E. 7})$$

其中

$$\alpha = \frac{m}{k\lambda} = \frac{m\omega^2}{k} \quad (\text{E. 8})$$

三次方程(E. 7)的根为

$$\alpha_1 = \frac{m\omega_1^2}{k} = 0.198\,06, \quad \omega_1 = 0.445\,04 \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{E. 9})$$

$$\alpha_2 = \frac{m\omega_2^2}{k} = 1.5553, \quad \omega_2 = 1.2471 \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{E. 10})$$

$$\alpha_3 = \frac{m\omega_3^2}{k} = 3.2490, \quad \omega_3 = 1.8025 \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{E. 11})$$

一旦求得固有频率,运用式(6.66),则可计算出主振型或特征矢量:

$$(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{D})\mathbf{X}^{(i)} = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{E. 12})$$

其中

$$\mathbf{X}^{(i)} = \begin{Bmatrix} X_1^{(i)} \\ X_2^{(i)} \\ X_3^{(i)} \end{Bmatrix}$$

表示第 i 阶主振型。其求解的步骤如下:

为求第 1 阶振型,将 ω_1 的值(即 $\lambda_1 = 5.0489 \frac{m}{k}$)代入式(E. 12),有

$$\left[5.0489 \frac{m}{k} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{m}{k} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \\ X_3^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix} 4.0489 & -1.0 & -1.0 \\ -1.0 & 3.0489 & -2.0 \\ -1.0 & -2.0 & 2.0489 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \\ X_3^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{E. 13})$$

式(E. 13)表示关于未知量 $X_1^{(1)}$, $X_2^{(1)}$ 和 $X_3^{(1)}$ 的 3 个齐次线性方程。其中,任意两个量可根据第 3 个量表示。如果以 $X_1^{(1)}$ 来表示 $X_2^{(1)}$ 和 $X_3^{(1)}$,则由式(E. 13)的前两行得

$$\begin{cases} X_2^{(1)} + X_3^{(1)} = 4.0489 X_1^{(1)} \\ 3.0489 X_2^{(1)} - 2.0 X_3^{(1)} = X_1^{(1)} \end{cases} \quad (\text{E. 14})$$

只要式(E. 14)满足,则式(E. 13)的第 3 行将自动满足。式(E. 14)的解为

$$X_2^{(1)} = 1.8019 X_1^{(1)}, \quad X_3^{(1)} = 2.2470 X_1^{(1)} \quad (\text{E. 15})$$

于是第1阶主振型为

$$\mathbf{X}^{(1)} = X_1^{(1)} \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 1.8019 \\ 2.2470 \end{Bmatrix} \quad (\text{E. 16})$$

其中, $X_1^{(1)}$ 的值可以任意选择。

为求第2阶振型, 将 ω_2 的值 (即 $\lambda_2 = 0.6430 \frac{m}{k}$) 代入式 (E. 12), 则

$$\left[0.6430 \frac{m}{k} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{m}{k} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \\ X_3^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix} -0.3570 & -1.0 & -1.0 \\ -1.0 & -1.3570 & -2.0 \\ -1.0 & -2.0 & -2.3570 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \\ X_3^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{E. 17})$$

与前面的过程类似, 由式 (E. 17) 的前两行得

$$\left. \begin{aligned} -X_2^{(2)} - X_3^{(2)} &= 0.3570 X_1^{(2)} \\ -1.3570 X_2^{(2)} - 2.0 X_3^{(2)} &= X_1^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{E. 18})$$

式 (E. 18) 的解为

$$X_2^{(2)} = 0.4450 X_1^{(2)}, \quad X_3^{(2)} = -0.8020 X_1^{(2)} \quad (\text{E. 19})$$

于是第2阶主振型可以表示为

$$\mathbf{X}^{(2)} = X_1^{(2)} \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 0.4450 \\ -0.8020 \end{Bmatrix} \quad (\text{E. 20})$$

其中, $X_1^{(2)}$ 的值可以任意选择。

为求第3阶主振型, 将 ω_3 的值 (如 $\lambda_3 = 0.3078 \frac{m}{k}$) 代入式 (E. 12), 得

$$\left[0.3078 \frac{m}{k} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{m}{k} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} X_1^{(3)} \\ X_2^{(3)} \\ X_3^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix} -0.6922 & -1.0 & -1.0 \\ -1.0 & -1.6922 & -2.0 \\ -1.0 & -2.0 & -2.6922 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^{(3)} \\ X_2^{(3)} \\ X_3^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{E. 21})$$

由式 (E. 21) 的前两行得

$$\left. \begin{aligned} -X_2^{(3)} - X_3^{(3)} &= 0.6922X_1^{(3)} \\ -1.6922X_2^{(3)} - 2.0X_3^{(3)} &= X_1^{(3)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{E. 22})$$

式(E. 22)的解为

$$X_2^{(3)} = -1.2468X_1^{(3)}, \quad X_3^{(3)} = 0.5544X_1^{(3)} \quad (\text{E. 23})$$

于是第3阶主振型可以表示为

$$\mathbf{X}^{(3)} = X_1^{(3)} \begin{Bmatrix} 1.0 \\ -1.2468 \\ 0.5544 \end{Bmatrix} \quad (\text{E. 24})$$

其中, $X_1^{(3)}$ 的值可以任意选择。 $X_1^{(1)}, X_1^{(2)}$ 与 $X_1^{(3)}$ 的值通常取 1, 根据式(E. 16)、式(E. 20)和式(E. 24), 该系统的各阶主振型如图 6.12 所示。

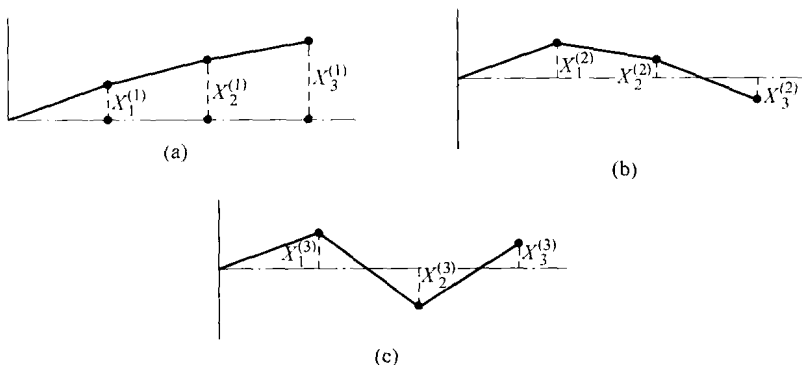


图 6.12 三自由度系统的主振型

(a) 第1阶主振型; (b) 第2阶主振型; (c) 第3阶主振型

6.10.2 主振型的正交性

在 6.10.1 节中, 我们讨论了求解 n 个固有频率 ω_i 和相应主振型或主振型矢量 $\mathbf{X}^{(i)}$ 的方法。现在研究主振型的一个重要性质——正交性。固有频率 ω_i 和相应的主振型矢量 $\mathbf{X}^{(i)}$ 满足式(6.61), 即

$$\omega_i^2 \mathbf{m} \mathbf{X}^{(i)} = \mathbf{k} \mathbf{X}^{(i)} \quad (6.69)$$

对另一固有频率 ω_j 和相应的主振型矢量 $\mathbf{X}^{(j)}$, 它们也满足式(6.61), 即

$$\omega_j^2 \mathbf{m} \mathbf{X}^{(j)} = \mathbf{k} \mathbf{X}^{(j)} \quad (6.70)$$

分别对式(6.69)与式(6.70)前乘 $\mathbf{X}^{(j)\text{T}}$ 与 $\mathbf{X}^{(i)\text{T}}$, 由矩阵 \mathbf{k} 与 \mathbf{m} 的对称性, 有

$$\omega_i^2 \mathbf{X}^{(j)\text{T}} \mathbf{m} \mathbf{X}^{(i)} = \mathbf{X}^{(j)\text{T}} \mathbf{k} \mathbf{X}^{(i)} \equiv \mathbf{X}^{(i)\text{T}} \mathbf{k} \mathbf{X}^{(j)} \quad (6.71)$$

$$\omega_j^2 \mathbf{X}^{(i)\text{T}} \mathbf{m} \mathbf{X}^{(j)} \equiv \mathbf{X}^{(i)\text{T}} \mathbf{k} \mathbf{X}^{(j)} = \omega_j^2 \mathbf{X}^{(j)\text{T}} \mathbf{m} \mathbf{X}^{(i)} \quad (6.72)$$

从式(6.71)中减去式(6.72), 得

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \mathbf{X}^{(j)\mathrm{T}} \mathbf{m} \mathbf{X}^{(i)} = 0 \quad (6.73)$$

一般情况下 $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$, 则由式(6.73)得^①

$$\mathbf{X}^{(j)\mathrm{T}} \mathbf{m} \mathbf{X}^{(i)} = 0, \quad i \neq j \quad (6.74)$$

同理有

$$\mathbf{X}^{(j)\mathrm{T}} \mathbf{k} \mathbf{X}^{(i)} = 0, \quad i \neq j \quad (6.75)$$

式(6.74)与式(6.75)表示主振型矢量 $\mathbf{X}^{(i)}$ 和 $\mathbf{X}^{(j)}$ 关于质量矩阵与刚度矩阵都是正交的。当 $i = j$ 时, 式(6.74)与式(6.75)的左边不等于零, 由此得到与第 i 阶主振型对应的广义质量和广义刚度系数, 即

$$M_{ii} = \mathbf{X}^{(i)\mathrm{T}} \mathbf{m} \mathbf{X}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.76)$$

$$K_{ii} = \mathbf{X}^{(i)\mathrm{T}} \mathbf{k} \mathbf{X}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.77)$$

式(6.76)与式(6.77)可以用矩阵的形式表示为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & & & 0 \\ & M_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M_{nn} \end{bmatrix} = \mathbf{X}^{\mathrm{T}} \mathbf{m} \mathbf{X} \quad (6.78)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & & & 0 \\ & K_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & K_{nn} \end{bmatrix} = \mathbf{X}^{\mathrm{T}} \mathbf{k} \mathbf{X} \quad (6.79)$$

其中, \mathbf{X} 称为振型矩阵(modal matrix), 其第 i 列与第 i 阶主振型矢量对应, 即

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}^{(1)} \quad \mathbf{X}^{(2)} \quad \dots \quad \mathbf{X}^{(n)}] \quad (6.80)$$

在多数情况下, 将主振型矢量 $\mathbf{X}^{(i)}$ 正则化使得 $\mathbf{M} = \mathbf{I}$, 即

$$\mathbf{X}^{(i)\mathrm{T}} \mathbf{m} \mathbf{X}^{(i)} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.81)$$

此时的矩阵 \mathbf{K} 变为

$$\mathbf{K} = \omega_i^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & 0 \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (6.82)$$

例 6.11 使例 6.10 中的特征向量关于质量矩阵正则化。

解: 例 6.10 中的特征矢量为

$$\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{X}_1^{(1)} \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 1.8019 \\ 2.2470 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{X}^{(2)} = \mathbf{X}_1^{(2)} \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 0.4450 \\ -0.8020 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{X}^{(3)} = \mathbf{X}_1^{(3)} \begin{Bmatrix} 1.0 \\ -1.2468 \\ 0.5544 \end{Bmatrix}$$

① 在有重根 $\omega_i = \omega_j$ 情况下, 相应的两个主振型矢量与所有其他主振型都是正交的, 但这两个振型之间通常却并不正交。

质量矩阵为

$$\mathbf{m} = m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

如果满足下面的条件,则特征矢量 $\mathbf{X}^{(i)}$ 称为关于 \mathbf{m} 正则化:

$$\mathbf{X}^{(i)\mathrm{T}} \mathbf{m} \mathbf{X}^{(i)} = 1 \quad (\text{E. 1})$$

于是对 $i=1$, 式(E. 1)变为

$$m(X_1^{(1)})^2(1.0^2 + 1.8019^2 + 2.2470^2) = 1$$

即

$$X_1^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{m \times 9.2959}} = \frac{0.3280}{\sqrt{m}}$$

同理, 对 $i=2$, 式(E. 1)为

$$m(X_1^{(2)})^2[1.0^2 + 0.4450^2 + (-0.8020)^2] = 1 \quad \text{即} \quad X_1^{(2)} = \frac{0.7370}{\sqrt{m}}$$

当 $i=3$ 时, 式(E. 1)为

$$m(X_1^{(3)})^2[1.0^2 + (-1.2468)^2 + 0.5544^2] = 1 \quad \text{即} \quad X_1^{(3)} = \frac{0.5911}{\sqrt{m}}$$

6.10.3 重特征值

当特征方程存在重根时,相应的主振型就不是唯一的。令 $\mathbf{X}^{(1)}$ 与 $\mathbf{X}^{(2)}$ 是相应重特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ 对应的主振型, $\mathbf{X}^{(3)}$ 是相应于不同特征值 λ_3 的主振型, 则式(6.66)表示为

$$\mathbf{D}\mathbf{X}^{(1)} = \lambda\mathbf{X}^{(1)} \quad (6.83)$$

$$\mathbf{D}\mathbf{X}^{(2)} = \lambda\mathbf{X}^{(2)} \quad (6.84)$$

$$\mathbf{D}\mathbf{X}^{(3)} = \lambda_3\mathbf{X}^{(3)} \quad (6.85)$$

在式(6.83)前乘以常数 p 后与式(6.84)相加, 得

$$\mathbf{D}(p\mathbf{X}^{(1)} + \mathbf{X}^{(2)}) = \lambda(p\mathbf{X}^{(1)} + \mathbf{X}^{(2)}) \quad (6.86)$$

这表明前两个主振型的线性组合 $(p\mathbf{X}^{(1)} + \mathbf{X}^{(2)})$ 为也满足式(6.66), 故与 λ 相对应的主振型是不唯一的。若该主振型为系统固有振型, 则此与 λ 相对应的任意 \mathbf{X} 必定与 $\mathbf{X}^{(3)}$ 正交。若所有的 3 个主振型都是正交的, 则它们将是线性独立的, 可用来描述因初始条件所致的自由振动。

有重固有频率的多自由度系统在外力和位移激励下的响应问题是由 Mahalingam 和 Bishop 提出的^[6, 16]。

例 6.12 求下列振动系统的特征值与特征向量, 已知

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

解: 特征方程 $|k - \lambda m| X = 0$ 以矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda & -2 & 1 \\ -2 & 2(2 - \lambda) & -2 \\ 1 & -2 & 1 - \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{E. 1})$$

其中 $\lambda = \omega^2$, 特征方程为

$$|k - \lambda m| = \lambda^2(\lambda - 4) = 0$$

于是

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 4 \quad (\text{E. 2})$$

为求 $\lambda_3 = 4$ 对应的特征向量, 将其代入式(E. 1)得

$$\left. \begin{aligned} -3X_1^{(3)} - 2X_2^{(3)} + X_3^{(3)} &= 0 \\ -2X_1^{(3)} - 4X_2^{(3)} - 2X_3^{(3)} &= 0 \\ X_1^{(3)} - 2X_2^{(3)} - 3X_3^{(3)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{E. 3})$$

如果令 $X_1^{(3)} = 1$, 根据式(E. 3)可求出 $X^{(3)}$ 为

$$X^{(3)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{E. 4})$$

$\lambda_1 = 0$ 或 $\lambda_2 = 0$ 对应着系统退化的情况(见 6.12 节)。将 $\lambda_1 = 0$ 代入式(E. 1), 有

$$\left. \begin{aligned} X_1^{(1)} - 2X_2^{(1)} + X_3^{(1)} &= 0 \\ -2X_1^{(1)} + 4X_2^{(1)} - 2X_3^{(1)} &= 0 \\ X_1^{(1)} - 2X_2^{(1)} + X_3^{(1)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{E. 5})$$

这 3 个方程具有相同的形式, 即

$$X_1^{(1)} = 2X_2^{(1)} - X_3^{(1)}$$

故与 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 相对应的特征向量可以表示为

$$X^{(1)} = \begin{Bmatrix} 2X_2^{(1)} - X_3^{(1)} \\ X_2^{(1)} \\ X_3^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (\text{E. 6})$$

若令 $X_2^{(1)} = 1$ 与 $X_3^{(1)} = 1$, 则有

$$X^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{E. 7})$$

若选择 $X_2^{(1)} = 1$ 与 $X_3^{(1)} = -1$, 则式(E. 6)变为

$$X^{(1)} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad (\text{E. 8})$$

如前所述, $\mathbf{X}^{(1)}$ 与 $\mathbf{X}^{(2)}$ 不是唯一的。 $\mathbf{X}^{(1)}$ 与 $\mathbf{X}^{(2)}$ 的任意线性组合也将满足式(E. 1)。注意: 由式(E. 6)确定的 $\mathbf{X}^{(1)}$ 与式(E. 4)确定的 $\mathbf{X}^{(3)}$ 是正交的, 因为

$$\mathbf{X}^{(3)\text{T}} \mathbf{m} \mathbf{X}^{(1)} = (1 \quad -1 \quad 1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2\mathbf{X}_2^{(1)} - \mathbf{X}_3^{(1)} \\ \mathbf{X}_2^{(1)} \\ \mathbf{X}_3^{(1)} \end{Bmatrix} = 0$$

6.11 展开定理

由于正交性, 各个特征向量是线性独立的^①, 因此它们构成了 n 维空间的一个基。^② 这意味着 n 维空间中的任意向量都可以表示为这 n 个线性独立向量的线性组合。若 \mathbf{x} 是 n 维空间中的任意一个向量, 则其可表示为

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{X}^{(i)} \quad (6.87)$$

其中, c_i 为常量。将式(6.87)两边左乘以 $\mathbf{X}^{(i)\text{T}} \mathbf{m}$, 则常量 c_i 可以表示为

$$c_i = \frac{\mathbf{X}^{(i)\text{T}} \mathbf{m} \mathbf{x}}{\mathbf{X}^{(i)\text{T}} \mathbf{m} \mathbf{X}^{(i)}} = \frac{\mathbf{X}^{(i)\text{T}} \mathbf{m} \mathbf{x}}{M_{ii}}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.88)$$

其中, M_{ii} 是第 n 阶主振型对应的广义质量。若根据式(6.81), 对振型向量 $\mathbf{X}^{(i)}$ 正则化, 则 c_i 为

$$c_i = \mathbf{X}^{(i)\text{T}} \mathbf{m} \mathbf{x}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.89)$$

式(6.89)称为展开定理(expansion theorem)^[6, 6]。该定理在应用模态分析法求解多自由度系统在任意激励下的强迫振动响应时非常有用。

6.12 无约束系统

如 5.7 节所述, 无约束系统是不包含约束或支承, 能像刚体一样运动的系统。在工程实际中, 不与任何固定框架相连的系统并不少见。一个常见的例子是质量为 m_1 与 m_2 和耦合弹簧 k 组成的两铁路车箱的运动。这样的系统具有实现类似于刚体运动的能力, 这样的运动可看成是与零固有频率对应的振型。对一个保守系统, 其动能与势能分别由式(6.34)与式(6.30)确定。根据定义, 动能总为正, 所以质量矩阵 \mathbf{m} 是正定的。然而, 对于无约束系统, 在位移矢量 \mathbf{x} 不为零的情况下, 势能 V 却可能为零, 故刚度矩阵 \mathbf{k} 是半正定的。为说明这一点, 考虑用正则坐标表示的自由振动方程

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0 \quad (6.90)$$

① 若一组向量中的任何一个都不能用其他向量的线性组合表示, 则称这些向量是线性独立的。

② 在 n 维空间中, 任意 n 个线性独立的向量称为该空间的一个基。

对 $\omega=0$, 式(6.90)的解可以表示为

$$q(t) = \alpha + \beta t \quad (6.91)$$

其中, α 与 β 为常量。式(6.91)表示刚体的平动。令对应于刚体振型的多自由度系统的振型向量用 $\mathbf{X}^{(0)}$ 表示, 则特征值问题式(6.64)可以表示为

$$\omega^2 \mathbf{m} \mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{k} \mathbf{X}^{(0)} \quad (6.92)$$

对 $\omega=0$, 由式(6.92)得

$$\mathbf{k} \mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{0}$$

即

$$\left. \begin{aligned} k_{11} X_1^{(0)} + k_{12} X_2^{(0)} + \cdots + k_{1n} X_n^{(0)} &= 0 \\ k_{21} X_1^{(0)} + k_{22} X_2^{(0)} + \cdots + k_{2n} X_n^{(0)} &= 0 \\ &\vdots \\ k_{n1} X_1^{(0)} + k_{n2} X_2^{(0)} + \cdots + k_{nn} X_n^{(0)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.93)$$

若系统作刚性平动, 并不是所有的分量 $X_i^{(0)}$ 都为零, 即矢量 $\mathbf{X}^{(0)}$ 不为零。因此, 为满足式(6.93), \mathbf{k} 的行列式必为零。于是非约束系统(有零固有频率)的刚度矩阵是奇异的。若 \mathbf{k} 是奇异的, 则根据式(6.93), 系统的势能为

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{X}^{(0)\top} \mathbf{k} \mathbf{X}^{(0)} \quad (6.94)$$

$\mathbf{X}^{(0)}$ 称为系统的零振型或刚体振型。把任意矢量($\mathbf{X}^{(0)}$ 和零矢量除外)代入式(6.30), 系统的势能都是一个正数。因而刚度矩阵 \mathbf{k} 是半正定的, 这正是一个非约束系统称为半正定系统的原因。

注意: 一个多自由度系统最多可以有 6 个固有频率为零的刚体振型, 其中 3 个为刚性平动振型, 3 个为刚性转动振型。3 个刚性平动振型分别沿着 3 个笛卡儿坐标方向发生, 3 个刚性转动振型分别绕着 3 个笛卡儿坐标发生。可以根据 6.10 节给出的步骤确定一个半正定系统的固有振型和固有频率。

例 6.13 如图 6.13 所示, 3 节车厢通过 2 个弹簧相连。已知 $m_1 = m_2 = m_3 = m$, $k_1 = k_2 = k$ 。求该系统的固有频率与固有振型。

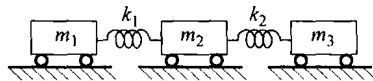


图 6.13 半正定系统

解: 系统的动能可以表示为

$$T = \frac{1}{2} (m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2 + m_3 \dot{x}_3^2) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^\top \mathbf{m} \dot{\mathbf{x}} \quad (\text{E. } 1)$$

其中

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad (\text{E. 2})$$

弹簧 k_1 与 k_2 的伸长分别为 $(x_2 - x_1)$ 和 $(x_3 - x_2)$, 于是系统的势能为

$$V = \frac{1}{2} \{k_1(x_2 - x_1)^2 + k_2(x_3 - x_2)^2\} = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{k} \mathbf{x} \quad (\text{E. 3})$$

其中

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad (\text{E. 4})$$

容易验证刚度矩阵 \mathbf{k} 是奇异的。此外, 如果使所有质量块的位移相同, 即 $x_1 = x_2 = x_3 = c$ (刚体运动), 则势能 V 等于零。

为求系统的固有频率与振型, 将特征值问题表示为

$$[\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}] \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (\text{E. 5})$$

由于矩阵 \mathbf{k} 是奇异的, 则不能求其逆阵 \mathbf{k}^{-1} 与动力矩阵 $\mathbf{D} = \mathbf{k}^{-1} \mathbf{m}$ 。因此令式(E. 5)中 \mathbf{X} 的系数矩阵的行列式为零。对于 $k_1 = k_2 = k$ 与 $m_1 = m_2 = m_3 = m$, 有

$$\begin{vmatrix} k - \omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega^2 m & -k \\ 0 & -k & k - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{E. 6})$$

展开式(E. 6)中的行列式, 则有

$$m^3 \omega^6 - 4m^2 k \omega^4 + 3mk^2 \omega^2 = 0 \quad (\text{E. 7})$$

令

$$\underline{\lambda} = \omega^2 \quad (\text{E. 8})$$

式(E. 7)可以写为

$$m \underline{\lambda} \left(\underline{\lambda} - \frac{k}{m} \right) \left(\underline{\lambda} - \frac{3k}{m} \right) = 0 \quad (\text{E. 9})$$

由于 $m \neq 0$, 式(E. 9)的根为

$$\left. \begin{aligned} \underline{\lambda}_1 &= \omega_1^2 = 0 \\ \underline{\lambda}_2 &= \omega_2^2 = \frac{k}{m} \\ \underline{\lambda}_3 &= \omega_3^2 = \frac{3k}{m} \end{aligned} \right\} \quad (\text{E. 10})$$

可以看出, 式(E. 10)中的第1阶固有频率为 $\omega_1 = 0$ 。为求各阶振型, 将 ω_1, ω_2 与 ω_3 的值代入式(E. 5), 可分别求出 $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}$ 与 $\mathbf{X}^{(3)}$ 。对 $\omega_1 = 0$, 由式(E. 5)得

$$\left. \begin{aligned} kX_1^{(1)} - kX_2^{(1)} &= 0 \\ -kX_1^{(1)} + 2kX_2^{(1)} - kX_3^{(1)} &= 0 \\ -kX_2^{(1)} + kX_3^{(1)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{E. 11})$$

令 $\mathbf{X}^{(1)} = 1$, 则由式(E. 11)可求得

$$X_2^{(1)} = X_1^{(1)} = 1 \quad \text{与} \quad X_3^{(1)} = X_2^{(1)} = 1$$

于是对应于 $\omega_1 = 0$ 的第1阶振型 $\mathbf{X}^{(1)}$ 为

$$\mathbf{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{E. 12})$$

对 $\omega_2 = (k/m)^{\frac{1}{2}}$, 由式(E. 5)得

$$\left. \begin{aligned} -kX_2^{(2)} &= 0 \\ -kX_1^{(2)} + kX_2^{(2)} - kX_3^{(2)} &= 0 \\ -kX_2^{(2)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{E. 13})$$

固定其中一个分量的值, 例如令 $\mathbf{X}^{(2)} = 1$, 则由式(E. 13)可求得

$$X_2^{(2)} = 0 \quad \text{与} \quad X_3^{(2)} = -X_1^{(2)} = -1$$

于是对应于 $\omega_2 = (k/m)^{\frac{1}{2}}$ 的第2阶振型 $\mathbf{X}^{(2)}$ 为

$$\mathbf{X}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad (\text{E. 14})$$

对 $\omega_3 = (3k/m)^{\frac{1}{2}}$, 由式(E. 5)得

$$\left. \begin{aligned} -2kX_1^{(3)} - kX_2^{(3)} &= 0 \\ -kX_1^{(3)} - kX_2^{(3)} - kX_3^{(3)} &= 0 \\ -kX_2^{(3)} - 2kX_3^{(3)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{E. 15})$$

令 $\mathbf{X}^{(3)} = 1$, 则由式(E. 15)可求得

$$X_2^{(3)} = -2X_1^{(3)} = -2 \quad \text{与} \quad X_3^{(3)} = -\frac{1}{2}X_2^{(3)} = 1$$

于是对应于 $\omega_3 = (3k/m)^{\frac{1}{2}}$ 的第3阶振型 $\mathbf{X}^{(3)}$ 为

$$\mathbf{X}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{E. 16})$$

6.13 无阻尼系统的自由振动

以矩阵形式表示的无阻尼系统自由振动的微分方程为

$$m \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{kx} = \mathbf{0} \quad (6.95)$$

式(6.95)最一般的解可以表示为式(6.56)与式(6.62)给出的所有可能解的线性组合,即

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{X}^{(i)} A_i \cos(\omega_i t + \phi_i) \quad (6.96)$$

其中, $\mathbf{X}^{(i)}$ 为第 i 阶振型矢量; ω_i 是相应的固有频率; A_i 与 ϕ_i 是常数, $i=1, 2, \dots, n$, 可根据系统的初始条件来确定。若用

$$\mathbf{x}(0) = \begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{Bmatrix} \quad \text{与} \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(0) \end{Bmatrix} \quad (6.97)$$

表示系统的初始位移与初始速度, 则由式(6.96)得

$$\mathbf{x}(0) = \sum_{i=1}^n \mathbf{X}^{(i)} A_i \cos \phi_i \quad (6.98)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(0) = - \sum_{i=1}^n \mathbf{X}^{(i)} A_i \omega_i \sin \phi_i \quad (6.99)$$

式(6.98)与式(6.99)是 $2n$ 个标量形式的联立方程, 从而可求解 n 个 A_i 与 n 个 ϕ_i 的值 ($i=1, 2, \dots, n$)。

例 6.14 求图 6.8(a) 所示弹簧-质量系统的自由振动响应。已知初始条件为 $\dot{x}_i(0)=0$ ($i=1, 2, 3$), $x_1(0)=x_{10}$, $x_2(0)=x_3(0)=0$, 假定 $k_i=k$, $m_i=m$ ($i=1, 2, 3$)。

解: 在例 6.10 中已求得系统的固有频率与振型分别为

$$\omega_1 = 0.445\,04 \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = 1.2471 \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_3 = 1.8025 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\mathbf{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 1.8019 \\ 2.2470 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{X}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 0.4450 \\ -0.8020 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{X}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ -1.2468 \\ 0.5544 \end{Bmatrix}$$

为简单, 取各阶振型中的第 1 个分量为 1。应用初始条件, 由式(6.98)与式(6.99)可以推出

$$A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2 + A_3 \cos \phi_3 = x_{10} \quad (\text{E. } 1)$$

$$1.8019 A_1 \cos \phi_1 + 0.4450 A_2 \cos \phi_2 - 1.2468 A_3 \cos \phi_3 = 0 \quad (\text{E. } 2)$$

$$2.2470 A_1 \cos \phi_1 - 0.8020 A_2 \cos \phi_2 + 0.5544 A_3 \cos \phi_3 = 0 \quad (\text{E. } 3)$$

$$-0.445\,04 \sqrt{\frac{k}{m}} A_1 \sin \phi_1 - 1.2471 \sqrt{\frac{k}{m}} A_2 \sin \phi_2 - 1.8025 \sqrt{\frac{k}{m}} A_3 \sin \phi_3 = 0 \quad (\text{E. } 4)$$

$$-0.801\,92 \sqrt{\frac{k}{m}} A_1 \sin \phi_1 - 0.554\,96 \sqrt{\frac{k}{m}} A_2 \sin \phi_2 + 2.2474 \sqrt{\frac{k}{m}} A_3 \sin \phi_3 = 0 \quad (\text{E. } 5)$$

$$-1.0 \sqrt{\frac{k}{m}} A_1 \sin \phi_1 + 1.0 \sqrt{\frac{k}{m}} A_2 \sin \phi_2 - 1.0 \sqrt{\frac{k}{m}} A_3 \sin \phi_3 = 0 \quad (\text{E. } 6)$$

式(E.1)~式(E.6)的解^①为 $A_1=0.1076x_{10}$, $A_2=0.5431x_{10}$, $A_3=0.3493x_{10}$, $\phi_1=0$, $\phi_2=0$, $\phi_3=0$ 。于是系统自由振动的解为

$$x_1(t) = x_{10} \left[0.1076 \cos \left(0.44504 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + 0.5431 \cos \left(1.2471 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + 0.3493 \cos \left(1.8025 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \right] \quad (\text{E.7})$$

$$x_2(t) = x_{10} \left[0.1939 \cos \left(0.44504 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + 0.2417 \cos \left(1.2471 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) - 0.4355 \cos \left(1.8025 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \right] \quad (\text{E.8})$$

$$x_3(t) = x_{10} \left[0.2418 \cos \left(0.44504 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) - 0.4356 \cos \left(1.2471 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + 0.1937 \cos \left(1.8025 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \right] \quad (\text{E.9})$$

6.14 用模态分析法求无阻尼系统的强迫振动

当有外力作用于多自由度系统时,系统将作强迫振动。对具有 n 个坐标或自由度的系统,运动控制方程为 n 个耦合的二阶常微分方程。当作用力是非周期的和(或)系统的自由度数较大时,这些方程的求解非常复杂。^② 在这些情况下,可以利用较简便的方法即振型叠加法进行求解。该方法运用到了展开定理,即将各质量的位移表示为系统固有振型的线性组合。通过该转换,可使运动微分方程变为非耦合的,即可以得到 n 个非耦合的二阶常微分方程。这些方程的解可以等效为易于求解的 n 个单自由度系统方程的解。下面讨论振型叠加法的步骤。

在外力作用下的多自由度系统的运动微分方程为

$$m \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{kx} = \mathbf{F} \quad (6.100)$$

其中, \mathbf{F} 为任意外力矢量。利用振型叠加法解方程(6.100)时,首先必须求解特征值问题

$$\omega^2 m \mathbf{X} = \mathbf{kX} \quad (6.101)$$

从而确定固有频率 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ 与相应的固有振型 $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}$ 。根据展开定理,式(6.100)的解矢量可以通过固有振型的线性组合来表示,即

$$\mathbf{x}(t) = q_1(t) \mathbf{X}^{(1)} + q_2(t) \mathbf{X}^{(2)} + \dots + q_n(t) \mathbf{X}^{(n)} \quad (6.102)$$

① 注意: 式(E.1)~式(E.3)可以看成是关于未知量 $A_1 \cos \phi_1, A_2 \cos \phi_2$ 与 $A_3 \cos \phi_3$ 的线性方程; 与此类似, 式(E.4)~式(E.6)可看成是关于未知量 $\sqrt{\frac{k}{m}} A_1 \sin \phi_1, \sqrt{\frac{k}{m}} A_2 \sin \phi_2$ 与 $\sqrt{\frac{k}{m}} A_3 \sin \phi_3$ 的一个线性方程组线性系统。

② 多自由度系统具有统计特性的动态响应在参考文献[6.15]中讨论。

其中, $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$ 是依赖于时间的广义坐标, 称为主坐标或振型参与系数。根据定义, 振型矩阵 \mathbf{X} 的第 j 列为矢量 $\mathbf{X}^{(j)}$, 即

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}^{(1)} \quad \mathbf{X}^{(2)} \quad \dots \quad \mathbf{X}^{(n)}] \quad (6.103)$$

式(6.102)又可写为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}\mathbf{q}(t) \quad (6.104)$$

其中

$$\mathbf{q}(t) = \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{Bmatrix} \quad (6.105)$$

由于 \mathbf{X} 不是时间的函数, 从式(6.104)可得

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{X}\dot{\mathbf{q}}(t) \quad (6.106)$$

利用式(6.104)与式(6.106), 可将式(6.100)表示为

$$m\mathbf{X}\ddot{\mathbf{q}} + k\mathbf{X}\mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (6.107)$$

将式(6.107)两边前乘 \mathbf{X}^T , 有

$$\mathbf{X}^T m\mathbf{X}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{X}^T k\mathbf{X}\mathbf{q} = \mathbf{X}^T \mathbf{F} \quad (6.108)$$

若已将固有振型关于式(6.74)与式(6.75)正则化, 则有

$$\mathbf{X}^T m\mathbf{X} = \mathbf{I} \quad (6.109)$$

$$\mathbf{X}^T k\mathbf{X} = [\omega^2] \quad (6.110)$$

通过定义与广义坐标 $\mathbf{q}(t)$ 对应的广义力 $\mathbf{Q}(t)$

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{X}^T \mathbf{F}(t) \quad (6.111)$$

式(6.108)可以表示为

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) + [\omega^2]\mathbf{q}(t) = \mathbf{Q}(t) \quad (6.112)$$

$$\text{其中 } [\omega^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_n^2 \end{bmatrix}。$$

式(6.112)表示以下 n 个二阶非耦合微分方程:^①

① 也可用 $r(r < n)$ 个振型向量(而不是如式(6.102)所示的 n 个振型向量)以得到解向量 $\mathbf{x}(t)$ 的近似解:

$$\mathbf{x}(t) = [\mathbf{X}]_{n \times r} \mathbf{q}(t)_{r \times 1}$$

$$\text{其中, } [\mathbf{X}] = [\mathbf{X}^{(1)} \quad \mathbf{X}^{(2)} \quad \dots \quad \mathbf{X}^{(r)}], \mathbf{q}(t) = \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_r(t) \end{Bmatrix}。$$

这样只得到 r 个而不是 n 个非耦合微分方程

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = Q_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, r$$

相应的解 $\mathbf{x}(t)$ 是近似的。该过程称为振型位移法。求近似解的另一种方法叫振型加速度法, 见习题 6.77 中的说明。

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = Q_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.113)$$

从式(6.113)可以看出,它与无阻尼单自由度系统的运动微分方程完全一样。式(6.113)的解可以表示为(见式(4.33))

$$q_i(t) = q_i(0) \cos \omega_i t + \frac{\dot{q}_i(0)}{\omega_i} \sin \omega_i t + \frac{1}{\omega_i} \int_0^t Q_i(\tau) \sin \omega_i(t-\tau) d\tau, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.114)$$

初始广义位移 $q_i(0)$ 与初始广义速度 $\dot{q}_i(0)$ 可根据物理位移 $x_i(0)$ 与物理速度 $\dot{x}_i(0)$ 的初始值确定(见习题 6.79):

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{X}^T \mathbf{m} \mathbf{x}(0) \quad (6.115)$$

$$\dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{X}^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{x}}(0) \quad (6.116)$$

其中

$$\mathbf{q}(0) = \begin{Bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \\ \vdots \\ q_n(0) \end{Bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \begin{Bmatrix} \dot{q}_1(0) \\ \dot{q}_2(0) \\ \vdots \\ \dot{q}_n(0) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{Bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(0) \end{Bmatrix}$$

利用式(6.114)~式(6.116),将广义位移 $q_i(t)$ 求出后,根据式(6.104),就能求出物理位移 $x_i(t)$ 。

例 6.15 利用振型叠加法,求下列运动微分方程表示的二自由度系统的自由振动响应:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{E.1})$$

已知 $m_1=10, m_2=1, k_1=30, k_2=5, k_3=0$, 初始条件为

$$\mathbf{x}(0) = \begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{E.2})$$

解: 系统的固有频率与固有振型为(见例 5.3)

$$\omega_1 = 1.5811, \quad \mathbf{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} X_1^{(1)}$$

$$\omega_2 = 2.4495, \quad \mathbf{X}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -5 \end{Bmatrix} X_1^{(2)}$$

其中, $X_1^{(1)}$ 与 $X_1^{(2)}$ 为任意常数。通过将固有振型关于质量矩阵正则化,可求得 $X_1^{(1)}$ 与 $X_1^{(2)}$ 的值。由

$$\mathbf{X}^{(1)T} \mathbf{m} \mathbf{X}^{(1)} = 1 \Rightarrow (X_1^{(1)})^2 \{1 \quad 2\} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = 1$$

得 $X_1^{(1)} = 0.2673$;

由

$$\mathbf{X}^{(2)\mathrm{T}} \mathbf{m} \mathbf{X}^{(2)} = 1 \Rightarrow (\mathbf{X}_1^{(2)})^2 \{1 \quad -5\} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -5 \end{Bmatrix} = 1$$

得 $\mathbf{X}_1^{(2)} = 0.1690$ 。

于是正则振型矩阵为

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}^{(1)} \quad \mathbf{X}^{(2)}] = \begin{bmatrix} 0.2673 & 0.1690 \\ 0.5346 & -0.8450 \end{bmatrix} \quad (\text{E. 3})$$

利用

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X} \mathbf{q}(t) \quad (\text{E. 4})$$

方程(E. 1)可以表示为(见式(6.112))

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) + \boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{q}(t) = \mathbf{Q}(t) = \mathbf{0} \quad (\text{E. 5})$$

其中, $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{X}^T \mathbf{F} = \mathbf{0}$ 。式(E. 5)的标量形式为

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = 0, \quad i = 1, 2 \quad (\text{E. 6})$$

式(E. 6)的解为(见式(2.18))

$$q_i(t) = q_{i0} \cos \omega_i t + \frac{\dot{q}_{i0}}{\omega_i} \sin \omega_i t \quad (\text{E. 7})$$

其中, q_{i0} 和 \dot{q}_{i0} 分别表示 $q_i(t)$ 与 $\dot{q}_i(t)$ 的初始值。应用式(E. 2)中的初始条件, 求得(见式(6.115)与式(6.116))

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(0) &= \begin{Bmatrix} q_{10}(0) \\ q_{20}(0) \end{Bmatrix} = \mathbf{X}^T \mathbf{m} \mathbf{x}(0) \\ &= \begin{bmatrix} 0.2673 & 0.5346 \\ 0.1690 & -0.8450 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.673 \\ 1.690 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{E. 8})$$

$$\dot{\mathbf{q}}(0) = \begin{Bmatrix} \dot{q}_{10}(0) \\ \dot{q}_{20}(0) \end{Bmatrix} = \mathbf{X}^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{x}}(0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{E. 9})$$

由式(E. 7)~式(E. 9)可得

$$q_1(t) = 2.673 \cos 1.5811t \quad (\text{E. 10})$$

$$q_2(t) = 1.690 \cos 2.4495t \quad (\text{E. 11})$$

根据式(E. 4), 可以求得质量 m_1 和质量 m_2 的位移为

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0.2673 & 0.1690 \\ 0.5346 & -0.8450 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2.673 \cos 1.5811t \\ 1.690 \cos 2.4495t \end{Bmatrix}$$

或

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.7145 \cos 1.5811t + 0.2856 \cos 2.4495t \\ 1.4280 \cos 1.5811t - 1.4280 \cos 2.4495t \end{Bmatrix} \quad (\text{E. 12})$$

可见, 该解与例 5.3 中求得的解是一致的, 已绘在例 5.12 中。

例 6.16 图 5.41 中所示锻锤作用在工件上的冲击力可以近似为矩形脉冲,如图 6.14 所示。已知工件、铁砧与框架的质量为 $m_1 = 200 \text{ Mg}$,基础的质量为 $m_2 = 250 \text{ Mg}$,弹簧垫的刚度为 $k_1 = 150 \text{ MN/m}$,土壤的刚度为 $k_2 = 75 \text{ MN/m}$ 。假定各质量的初始位移与初始速度均为零,求系统的振动规律。

解: 锻锤可以简化为二自由度系统,已表示在图 6.14(b)中,系统的运动微分方程为

$$m \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{k} \mathbf{x} = \mathbf{F}(t) \quad (\text{E. 1})$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & 0 \\ 0 & 250 \end{bmatrix} \text{ Mg} \\ \mathbf{k} &= \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 & -150 \\ -150 & 225 \end{bmatrix} \text{ MN/m} \\ \mathbf{F}(t) &= \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

(1) 求固有频率与主振型。可以通过解频率方程求系统的固有频率,由

$$|-\omega^2 \mathbf{m} + \mathbf{k}| = \left| -\omega^2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix} \times 10^5 + \begin{bmatrix} 150 & -150 \\ -150 & 225 \end{bmatrix} \times 10^6 \right| = 0 \quad (\text{E. 2})$$

得

$$\omega_1 = 12.2474 \text{ rad/s}, \quad \omega_2 = 38.7298 \text{ rad/s}$$

各阶主振型分别为

$$\mathbf{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.8 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{X}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

(2) 主振型的正则化。假设正则振型为

$$\mathbf{X}^{(1)} = a \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.8 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{X}^{(2)} = b \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

其中, a 和 b 为常量,可通过将矢量 $\mathbf{X}^{(1)}$ 与 $\mathbf{X}^{(2)}$ 正则化求解,即令

$$\mathbf{X}^T \mathbf{m} \mathbf{X} = \mathbf{I} \quad (\text{E. 3})$$

其中, $\mathbf{X} = [\mathbf{X}^{(1)} \quad \mathbf{X}^{(2)}]$ 表示振型矩阵。由式 (E. 3) 可得 $a = 1.6667 \times 10^{-3}$, $b = 1.4907 \times 10^{-3}$, 故正则振型矩阵为

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}^{(1)} \quad \mathbf{X}^{(2)}] = \begin{bmatrix} 1.6667 & 1.4907 \\ 1.3334 & -1.4907 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

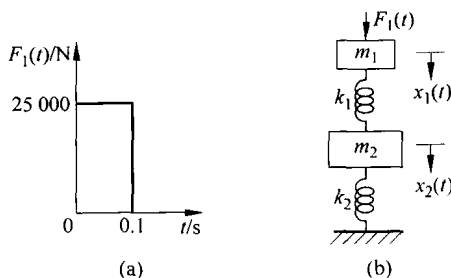


图 6.14 锻锤的冲击

(3) 根据广义坐标求响应。由于两质量在 $t=0$ 时静止, 初始条件为 $x_1(0)=x_2(0)=\dot{x}_1(0)=\dot{x}_2(0)=0$, 因此由式(6.115)与式(6.116)可得 $q_1(0)=q_2(0)=\dot{q}_1(0)=\dot{q}_2(0)=0$ 。由式(6.114)所求得用广义坐标表示的响应为

$$q_i(t) = \frac{1}{\omega_i} \int_0^t Q_i(\tau) \sin \omega_i(t-\tau) d\tau, \quad i=1,2 \quad (\text{E.4})$$

其中

$$Q(t) = X^T F(t) \quad (\text{E.5})$$

或

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} Q_1(t) \\ Q_2(t) \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1.6667 & 1.3334 \\ 1.4907 & -1.4907 \end{bmatrix} \times 10^{-3} \times \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} 1.6667 \times 10^{-3} F_1(t) \\ 1.4907 \times 10^{-3} F_1(t) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

其中, $F_1(t)=25\,000\text{ N}(0 \leq t \leq 0.1\text{ s})$, $F_1(t)=0(t > 0.1\text{ s})$ 。根据式(6.104), 各质量的位移为

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = Xq(t) = \begin{Bmatrix} 1.6667q_1(t) + 1.4907q_2(t) \\ 1.3334q_1(t) - 1.4907q_2(t) \end{Bmatrix} \times 10^{-3}\text{ m} \quad (\text{E.7})$$

其中

$$\left. \begin{aligned} q_1(t) &= 3.4021 \int_0^t \sin 12.2474(t-\tau) d\tau = 0.2778(1 - \cos 12.2474t) \\ q_2(t) &= 0.9622 \int_0^t \sin 38.7298(t-\tau) d\tau = 0.02484(1 - \cos 38.7298t) \end{aligned} \right\} \quad (\text{E.8})$$

注意: 由式(E.8)给出的解对于 $t \leq 0.1\text{ s}$ 是有效的。对 $t > 0.1\text{ s}$, 因为没有外力作用, 故系统的响应为无阻尼单自由度系统(式(2.18))对应于初始条件 $q_1(0.1)$, $\dot{q}_1(0.1)$ 和 $q_2(0.1)$ 与 $\dot{q}_2(0.1)$ 的自由振动响应。

6.15 黏性阻尼系统的强迫振动

如 6.14 节所述, 振型叠加法仅适用于无阻尼系统。在许多情况下, 阻尼对振动系统响应的影 响是次要的, 可忽略不计。然而, 如果与系统的固有周期相比, 所分析的是系统在相当长时间内的响应, 则必须考虑系统的阻尼。此外, 当激振力(如简谐力)的频率在系统的固有频率附近时, 阻尼也是相当重要的, 必须予以考虑。一般情况下, 由于阻尼的影响预先并不知道, 故对任意系统的振动分析都必须考虑阻尼的影响。这一节将讨论如何利用拉格朗日方程建立多自由度有阻尼系统的运动微分方程以及如何求解。若系统有黏性阻尼, 其运动时所受到的阻尼力的大小与速度成正比且与速度方向相反。在利用通过拉格朗日方程推导系统的运动微分方程时, 为方便引入瑞利损耗函数, 该函数的定义为

$$R = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{c} \dot{\mathbf{x}} \quad (6.117)$$

其中,矩阵 \mathbf{c} 称为**阻尼矩阵**,与质量矩阵和刚度矩阵一样也是正定的。此种情况下,拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.118)$$

其中, F_i 为作用在质量 m_i 上的力。将式(6.30)、式(6.34)与式(6.117)代入式(6.118),得有阻尼多自由度系统矩阵形式的运动微分方程为

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{k}\mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (6.119)$$

为了简化,考虑阻尼矩阵可视为质量矩阵与刚度矩阵线性组合的特殊系统,即

$$\mathbf{c} = \alpha \mathbf{m} + \beta \mathbf{k} \quad (6.120)$$

其中, α 与 β 是常数。该阻尼类型称为**比例阻尼**,这是因为 \mathbf{c} 和 \mathbf{m} 与 \mathbf{k} 的线性组合成正比。将式(6.120)代入式(6.119),得

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{x}} + (\alpha \mathbf{m} + \beta \mathbf{k}) \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{k}\mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (6.121)$$

像式(6.104)那样,将解向量 \mathbf{x} 表示为无阻尼系统固有振型的线性组合,即

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}\mathbf{q}(t) \quad (6.122)$$

式(6.121)可以重新表示为

$$\mathbf{m}\mathbf{X}\ddot{\mathbf{q}}(t) + (\alpha \mathbf{m} + \beta \mathbf{k})\mathbf{X}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{k}\mathbf{X}\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (6.123)$$

式(6.123)两边前乘 \mathbf{X}^T ,有

$$\mathbf{X}^T \mathbf{m} \mathbf{X} \ddot{\mathbf{q}} + (\alpha \mathbf{X}^T \mathbf{m} \mathbf{X} + \beta \mathbf{X}^T \mathbf{k} \mathbf{X}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{X}^T \mathbf{k} \mathbf{X} \mathbf{q} = \mathbf{X}^T \mathbf{F} \quad (6.124)$$

根据式(6.74)与式(6.75),若特征向量 $\mathbf{X}^{(i)}$ 已正则化,则式(6.124)为

$$\mathbf{I} \ddot{\mathbf{q}}(t) + (\alpha \mathbf{I} + \beta \omega_i^2) \dot{\mathbf{q}}(t) + \omega_i^2 \mathbf{q}(t) = \mathbf{Q}(t)$$

即

$$\ddot{q}_i(t) + (\alpha + \omega_i^2 \beta) \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = Q_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.125)$$

其中, ω_i 为无阻尼系统的第 i 阶固有频率; $Q_i(t)$ 为

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{X}^T \mathbf{F}(t) \quad (6.126)$$

令

$$\alpha + \omega_i^2 \beta = 2\zeta_i \omega_i \quad (6.127)$$

其中, ζ_i 称为对应于第 i 阶固有振型的**模态阻尼比**,式(6.125)可以重写为

$$\ddot{q}_i(t) + 2\zeta_i \omega_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = Q_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.128)$$

可以看出, n 个方程中的任一个与其他方程都是不耦合的。因此,如同求单自由度黏性阻尼系统的响应一样,可求得第 i 阶振型的响应。当 $\zeta_i < 1$ 时,式(6.128)的解可以表示为

$$\begin{aligned} q_i(t) = & e^{-\zeta_i \omega_i t} \left\{ \cos \omega_{di} t + \frac{\zeta_i}{\sqrt{1 - \zeta_i^2}} \sin \omega_{di} t \right\} q_i(0) + \left\{ \frac{1}{\omega_{di}} e^{-\zeta_i \omega_i t} \sin \omega_{di} t \right\} \dot{q}_i(0) \\ & + \frac{1}{\omega_{di}} \int_0^t Q_i(\tau) e^{-\zeta_i \omega_i (t-\tau)} \sin \omega_{di} (t-\tau) d\tau, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (6.129)$$

其中

$$\omega_{di} = \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} \quad (6.130)$$

注意:

(1) 柯西在参考文献[6.9]中已经证明,式(6.120)是阻尼系统存在固有振型的充分而非必要条件。必要条件是能将阻尼矩阵对角化的变换也能使耦合的运动微分方程解耦。这条件比式(6.120)的限制条件少,因而能满足此条件的可能性更大。

(2) 对于一般阻尼系统,阻尼矩阵不可能同质量矩阵与刚度矩阵一样同时实现对角化。此种情况下,系统的特征值可能为正和负的实数也可能是具有负实部的复数。复特征值将成对存在,并对应着复共轭对形式的特征矢量。求阻尼系统特征值问题的常用方法是将 n 个耦合的二阶运动微分方程转化为 $2n$ 个非耦合的一阶微分方程^[6.6]。

(3) 动态系统模态分析的误差估计与数值方法的讨论可见参考文献[6.11]和[6.12]。

例 6.17 推导图 6.15 所示系统的运动微分方程。

解: 系统的动能为

$$T = \frac{1}{2} (m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2 + m_3 \dot{x}_3^2) \quad (E.1)$$

势能为

$$V = \frac{1}{2} [k_1 x_1^2 + k_2 (x_2 - x_1)^2 + k_3 (x_3 - x_2)^2] \quad (E.2)$$

瑞利损耗函数为

$$R = \frac{1}{2} [c_1 \dot{x}_1^2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + c_3 (\dot{x}_3 - \dot{x}_2)^2 + c_4 \dot{x}_2^2 + c_5 (\dot{x}_3 - \dot{x}_1)^2] \quad (E.3)$$

拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} = F_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (E.4)$$

将式(E.1)~式(E.3)代入式(E.4),则得运动微分方程为

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = F \quad (E.5)$$

其中

$$m = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad (E.6)$$

$$c = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 + c_5 & -c_2 & -c_5 \\ -c_2 & c_2 + c_3 + c_4 & -c_3 \\ -c_5 & -c_3 & c_3 + c_5 \end{bmatrix} \quad (E.7)$$

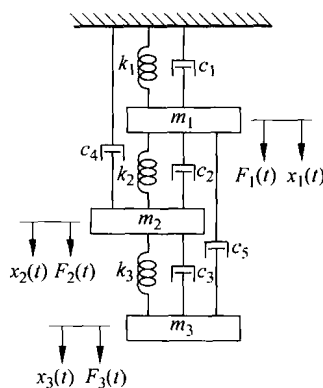


图 6.15 三自由度动力学系统

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \quad (\text{E. 8})$$

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{Bmatrix} \quad (\text{E. 9})$$

例 6.18 求图 6.15 所示系统的稳态响应。已知各质量块受到的简谐激振力为 $F_1 = F_2 = F_3 = F_0 \cos \omega t$, 其中 $\omega = 1.75 \sqrt{k/m}$ 。假定 $m_1 = m_2 = m_3 = m, k_1 = k_2 = k_3 = k, c_4 = c_5 = 0$ 。各阶模态阻尼比为 $\zeta_i = 0.01, i = 1, 2, 3$ 。

解: 系统的无阻尼固有频率为(见例 6.10)

$$\omega_1 = 0.44504 \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = 1.2471 \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_3 = 1.8025 \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{E. 1})$$

关于 m 正则化的主振型(见例 6.11)为

$$\mathbf{X}^{(1)} = \frac{0.3280}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 1.8019 \\ 2.2470 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{X}^{(2)} = \frac{0.7370}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 1.4450 \\ -0.8020 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{X}^{(3)} = \frac{0.5911}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} 1.0 \\ -1.2468 \\ 0.5544 \end{Bmatrix} \quad (\text{E. 2})$$

于是正则振型矩阵可以表示为

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}^{(1)} \quad \mathbf{X}^{(2)} \quad \mathbf{X}^{(3)}] = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.3280 & 0.7370 & 0.5911 \\ 0.5911 & 0.3280 & -0.7370 \\ 0.7370 & -0.5911 & 0.3280 \end{bmatrix} \quad (\text{E. 3})$$

广义力矢量为

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{X}^T \mathbf{F}(t) = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.3280 & 0.5911 & 0.7370 \\ 0.7370 & 0.3280 & -0.5911 \\ 0.5911 & -0.7370 & 0.3280 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_0 \cos \omega t \\ F_0 \cos \omega t \\ F_0 \cos \omega t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{10} \\ Q_{20} \\ Q_{30} \end{Bmatrix} \cos \omega t \quad (\text{E. 4})$$

其中

$$Q_{10} = 1.6561 \frac{F_0}{\sqrt{m}}, \quad Q_{20} = 0.4739 \frac{F_0}{\sqrt{m}}, \quad Q_{30} = 0.1821 \frac{F_0}{\sqrt{m}} \quad (\text{E. 5})$$

若将对应于 3 个主振型广义坐标或振型参与因子分别记为 $q_1(t), q_2(t)$ 与 $q_3(t)$, 则相应的运动微分方程可以表示为

$$\ddot{q}_i(t) + 2\zeta_i \omega_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = Q_i(t), \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{E. 6})$$

式(E.6)的稳态解为

$$q_i(t) = q_{i0} \cos(\omega t - \phi), \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{E. 7})$$

其中

$$q_{i0} = \frac{Q_{i0}}{\omega_i^2} \frac{1}{\left[\left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_i} \right)^2 \right\}^2 + \left(2\zeta_i \frac{\omega}{\omega_i} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (\text{E. 8})$$

$$\phi_i = \arctan \frac{2\zeta_i \frac{\omega}{\omega_i}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_i} \right)^2} \quad (\text{E. 9})$$

将式(E. 5)与式(E. 1)中的值代入式(E. 8)与式(E. 9)中,得

$$\left. \begin{aligned} q_{10} &= 0.578\,15 \frac{F_0 \sqrt{m}}{k}, & \phi_1 &= \arctan(-0.005\,44) \\ q_{20} &= 0.314\,29 \frac{F_0 \sqrt{m}}{k}, & \phi_2 &= \arctan(-0.029\,88) \\ q_{30} &= 0.924\,93 \frac{F_0 \sqrt{m}}{k}, & \phi_3 &= \arctan(0.338\,27) \end{aligned} \right\} \quad (\text{E. 10})$$

最后,运用式(6.122)即可求得系统的稳态响应。

6.16 自激振动及其稳态性分析

在许多振动系统中,摩擦会引起负阻尼而不是正阻尼,这将导致系统的不稳定性(自激振动)。一般来说,图 6.16 所示 n 自由度系统的运动微分方程为一组二阶线性常微分方程(如式(6.119)或式(6.128)):

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = F \quad (6.131)$$

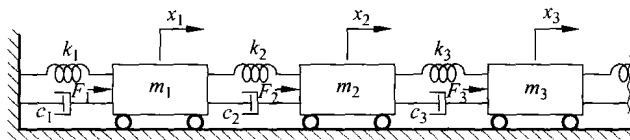


图 6.16 多自由度系统

5.8 节介绍的方法可以推广到研究系统的稳定性如式(6.131)所示。为此假定解的形式为

$$x_j(t) = C_j e^{st}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

或

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{C} e^{st} \quad (6.132)$$

其中, s 为待定的复数; C_j 为 x_j 的幅值。并采用下列记号:

$$\mathbf{C} = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{Bmatrix}$$

s 的实部决定了系统的阻尼,其虚部表示系统的固有频率。将式(6.132)代入自由振动方程(通过在式(6.131)中令 $\mathbf{F}=\mathbf{0}$)则得

$$(\mathbf{m}s^2 + \mathbf{c}s + \mathbf{k})\mathbf{C}e^{st} = \mathbf{0} \quad (6.133)$$

为求 C_j 的非零解,令 C_j 的系数行列式等于零,则可推出类似于式(6.63)的“特征方程”:

$$D(s) = |\mathbf{m}s^2 + \mathbf{c}s + \mathbf{k}| = 0 \quad (6.134)$$

将式(6.134)展开后得到一个关于 s 的 $m=2n$ 阶多项式方程,其形式为

$$D(s) = a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + a_2 s^{m-2} + \cdots + a_{m-1} s + a_m = 0 \quad (6.135)$$

系统的稳定性或不稳定性依赖于多项式方程 $D(s)=0$ 的根。将式(6.135)的根记为

$$s_j = b_j + i\omega_j, \quad j = 1, 2, \cdots, m \quad (6.136)$$

若所有根的实部 b_j 都是负数,则在形如式(6.132)的解中将出现衰减的时间函数为 $e^{b_j t}$,因此系统的解是稳定的;如果一个或多个根 s_j 有正实部,则方程(6.131)的解中将包含一个或多个按指数规律增加的时间函数 $e^{b_j t}$,因此系统的解是不稳定的;若有纯虚数的形式纯虚数 $s_j = i\omega_j$,则导致振荡解 $e^{i\omega_j t}$,表示稳态与非稳态解的边界线。若 s_j 为多重根,除非它是形如 $s_j = i\omega_j$ 的纯虚数,否则上面的结论仍然成立。此种情况下,解中包含形如 $e^{i\omega_j t}$, $t e^{i\omega_j t}$, $t^2 e^{i\omega_j t}$ 的函数,它们随时间而不断增加。所以有多重纯虚根的情况表示系统是不稳定的。因此为保证受控于方程(6.131)的线性系统是稳定的,其充分必要条件是式(6.135)的根应有非正实部,如果存在纯虚根,则不能是重根。

求多项式(6.135)的根是一个冗长的过程,可以利用称为罗斯-霍尔威茨准则的简化方法来分析系统的稳定性。使用该方法时,要用到根据多项式(6.135)中的诸系数定义的如下 m 阶行列式 T_m :

$$T_m = \begin{vmatrix} \overline{a_1} & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots & a_{2m-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots & a_{2m-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2m-3} \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & a_{2m-4} \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & \cdots & a_{2m-5} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & a_m \end{vmatrix} \quad (6.137)$$

并根据(6.137)中的虚线所示,定义如下子式:

$$T_1 = a_1 \quad (6.138)$$

$$T_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} \quad (6.139)$$

$$T_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} \quad (6.140)$$

⋮

在构造这些子行列式时,对应于 $i > m$ 或 $i < 0$ 的所有系数 a_i 均以零代替。根据罗斯-霍尔威茨准则,系统稳定的充要条件是所有系数 a_0, a_1, \dots, a_m 必须为正,同时所有的行列式 T_1, T_2, \dots, T_m 也必须为正。

6.17 利用 MATLAB 求解的例子

例 6.19 用 MATLAB 求下列矩阵的特征值和特征向量(见例 6.10):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

解: 在 MATLAB 的指令窗口(command window)直接输入矩阵和求解特征值问题的指令即可,不用编程。显示结果如下:

```
%Ex 6.19
>>A=[1 1 1; 1 2 2; 1 2 3]
A=
     1     1     1
     1     2     2
     1     2     3
>>[V, D]=eig(A)
V=
    0.5910    0.7370    0.3280
   -0.7370    0.3280    0.5910
    0.3280   -0.5910    0.7370
D=
    0.3080     0     0
     0    0.6431     0
     0     0    5.0489
```

例 6.20 画图表示例 6.14 中系统的自由振动响应 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 和 $x_3(t)$, 数据如下: $x_{10} = 1.0, k = 4000, m = 10$ 。

解: 根据例 6.14 中的式(E.7)~式(E.9),可编写如下的 MATLAB 程序,画图表示响应随时间的变化规律。

```

%Ex6_20.m
x10=1.0;
k=4000;
m=10;
for i=1: 1001
    t(i)=5*(i-1)/1000;
    x1(i)=x10*(0.1076*cos(0.44504*sqrt(k/m)*t(i))
        +0.5431*cos(1.2471*sqrt(k/m)*t(i))
        +0.3493*cos(1.8025*sqrt(k/m)*t(i)));
    x2(i)=x10*(0.1939*cos(0.44504*sqrt(k/m)*t(i))
        +0.2417*cos(1.2471*sqrt(k/m)*t(i))
        -0.4355*cos(1.8025*sqrt(k/m)*t(i)));
    x3(i)=x10*(0.2418*cos(0.44504*sqrt(k/m)*t(i))
        -0.4356*cos(1.2471*sqrt(k/m)*t(i))
        +0.1937*cos(1.8025*sqrt(k/m)*t(i)));
end
subplot(311);
plot(t,x1);
ylabel('x1(t)');
subplot(312);
plot(t,x2);
ylabel('x2(t)');
subplot(313);
plot(t,x3);
ylabel('x3(t)');
xlabel('t');

```

所绘图形如图 6.17 所示。

例 6.21 通过解控制微分方程,求例 6.16 中锻锤的受迫振动响应,并画图表示。假设全部初始条件均为零。

解: 系统的运动微分方程如下:

$$m \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{k}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (\text{E. 1})$$

其中

$$\mathbf{m} = 10^5 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} = 10^6 \begin{bmatrix} 150 & -150 \\ -150 & 225 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(t) = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

式中, $F_1(t)$ 是一阶跃函数,幅值为 25 000 N,作用时间为 $0 \leq t \leq 0.1 \text{ s}$ 。

首先将原方程(E.1)写成如下一阶微分方程组的形式:

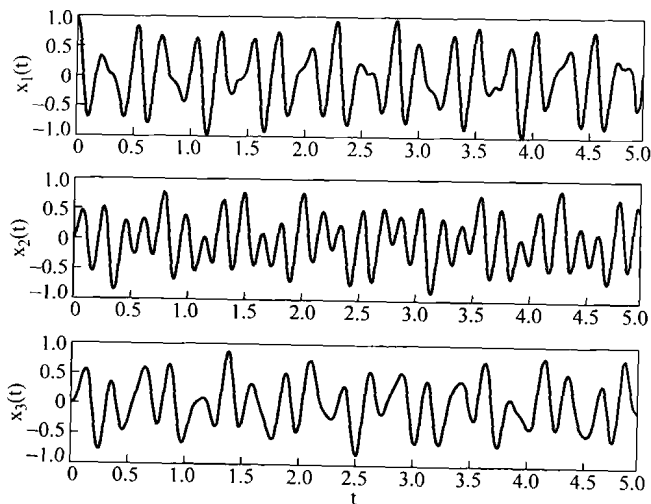


图 6.17 例 6.20 图

$$\dot{y}_1 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = \frac{F_1}{m_1} - \frac{k_1}{m_1}y_1 + \frac{k_1}{m_1}y_3$$

$$\dot{y}_3 = y_4$$

$$\dot{y}_4 = \frac{k_1}{m_2}y_1 - \frac{k_2}{m_2}y_3$$

其中, $y_1 = x_1$, $y_2 = \dot{x}_1$, $y_3 = x_2$, $y_4 = \dot{x}_2$, $m_1 = 2 \times 10^5$, $m_2 = 2.5 \times 10^5$, $k_1 = 150 \times 10^6$, $k_2 = 225 \times 10^6$ 。

根据全部初始条件为零, 利用下面的程序即可将数值解用图形表示出来:

```
%Ex6_21.m
%This program will use the function dfunc6_21.m, they should
%be in the same folder
tspan=[0:0.001:10];
y0=[0;0;0;0];
[t,y]=ode23('dfunc6_21',tspan,y0);
subplot(211);
plot(t,y(:,1));
xlabel('t');
ylabel('x1(t)');
subplot(212);
plot(t,y(:,3));
```

```

xlabel ('t');
ylabel ('x2 (t)');

%dfunc6_21.m
function f=dfunc6_21 (t,y)
f=zeros (4,1);
m1=2* 1e5;
m2=2.5* 1e5;
k1=150* 1e6;
k2=225* 1e6;
F1=25000* (stepfun (t, 0)-stepfun (t, 0.1));
f(1)=y(2);
f(2)=F1/m1+k1* y(3)/m1-k1* y(1)/m1;
f(3)=y(4);
f(4)=-k2* y(3)/m2+k1* y(1)/m2;

```

所绘曲线如图 6.18 所示。

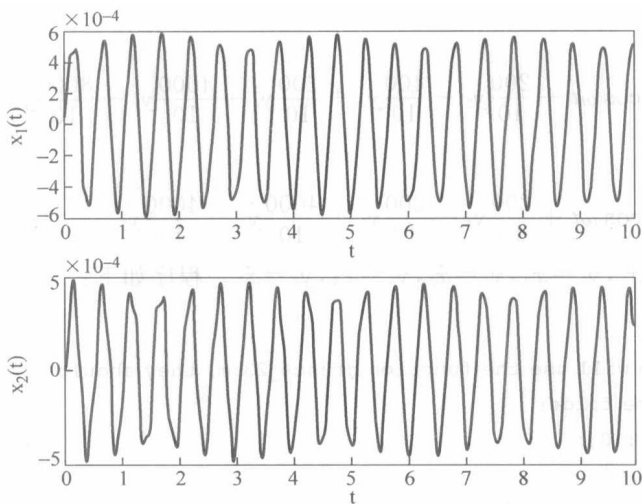


图 6.18 例 6.21 图

例 6.22 利用 MATLAB, 求下列方程的根:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

解: 直接利用 MATLAB 的 roots 指令即可求解, 不用编程。显示结果如下:

```

>>roots ([1 -6 11 -6])
ans=
    3.0000

```

2.0000

1.0000

>>

例 6.23 求下列多自由度受迫振动系统的响应:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f$$

其中, $m = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$, $c = 100 \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$, $k = 1000 \begin{bmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}$,

$$f = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} F_0 \cos \omega t, F_0 = 50, \omega = 50, \text{假设全部初始条件均为零}.$$

解: 首先将原方程(E.1)写成如下一阶微分方程组的形式:

$$\dot{y}_1 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = \frac{F_0}{10} \cos \omega t - \frac{400}{10} y_2 + \frac{200}{10} y_4 - \frac{8000}{10} y_1 + \frac{4000}{10} y_3$$

$$\dot{y}_3 = y_4$$

$$\dot{y}_4 = \frac{F_0}{10} \cos \omega t + \frac{200}{10} y_2 - \frac{400}{10} y_4 + \frac{200}{10} y_6 + \frac{4000}{10} y_1 - \frac{8000}{10} y_3 + \frac{4000}{10} y_5$$

$$\dot{y}_5 = y_6$$

$$\dot{y}_6 = \frac{F_0}{10} \cos \omega t + \frac{200}{10} y_4 - \frac{200}{10} y_6 + \frac{4000}{10} y_3 - \frac{4000}{10} y_5$$

其中, $y_1 = x_1, y_2 = \dot{x}_1, y_3 = x_2, y_4 = \dot{x}_2, y_5 = x_3, y_6 = \dot{x}_3$ 。程序如下:

```
%Ex6_23.m
%This program will use the function dfunc6_23.m, they should
%be in the same folder
tspan=[0:0.01:10];
y0=[0;0;0;0;0;0];
[t,y]=ode23('dfunc6_23',tspan,y0);
subplot(311);
plot(t,y(:,1));
xlabel('t');
ylabel('x1(t)');
subplot(312);
plot(t,y(:,3));
xlabel('t');
ylabel('x2(t)');
subplot(313);
```

```

plot (t,y(:, 5));
xlabel ('t');
ylabel ('x3(t)');

%dfunc6_23.m
function f=dfunc6_23 (t,y)
f=zeros(6,1);
F0=50.0;
w=50.0;
f(1)=y(2);
f(2)=F0*cos(w*t)/100-400*y(2)/100+200*y(4)/100-8000*y(1)/100
      +4000*y(3)/100;
f(3)=y(4);
f(4)=F0*cos(w*t)/10+200*y(2)/10-400*y(4)/10+200*y(6)/10
      +4000*y(1)/10-8000*y(3)/10+4000*y(5)/10;
f(5)=y(6);
f(6)=F0*cos(w*t)/10+200*y(4)/10-200*y(6)/10+4000*y(3)/10-4000*y(5)/10;

```

所绘曲线如图 6.19 所示。

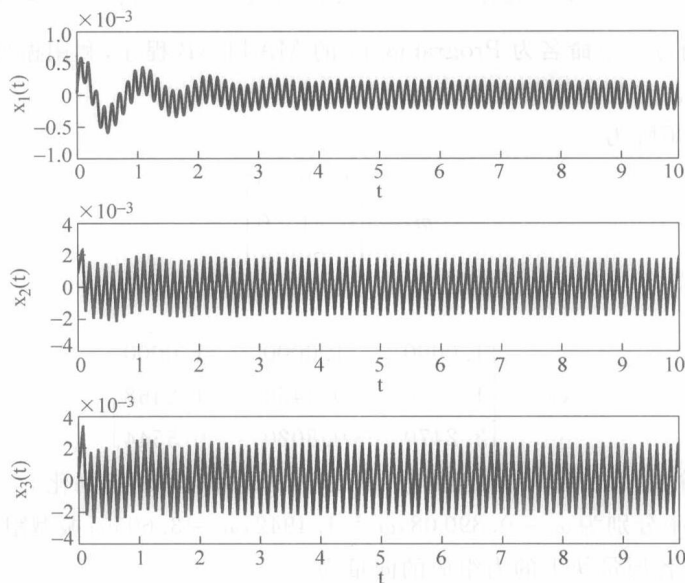


图 6.19 例 6.23 图

例 6.24 编写一个通用 MATLAB 程序,命名为 Program7.m,生成某一个给定方阵的特征多项式。并利用该程序求下列方阵的特征多项式:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

解: 程序 Program7 运行时需要键入以下数据:

n = 给定方阵 \mathbf{A} 的阶数

\mathbf{a} = 给定的方阵 \mathbf{A}

程序的输出如下, 其中 pcf 代表特征多项式中从常数项开始的各次项的系数组成的向量:

```
>>program7
polynomial expansion of a determinantal equation
data: determinant A:
      2.000000e+000      -1.000000e+000      0.000000e+000
     -1.000000e+000      2.000000e+000     -1.000000e+000
      0.000000e+000     -1.000000e+000      2.000000e+000
result: polynomial coefficients in
pcf(np) * (x^n)+pcf(n) * (x^(n-1))+...+pcf(2)+pcf(1)= 0
-4.000000e+000      1.000000e+001      -6.000000e+000      1.000000e+000
```

例 6.25 编写一个命名为 Program8.m 的 MATLAB 程序, 利用振型叠加求一个多自由度系统的响应。并利用该程序针对以下情况求解:

系统的质量矩阵为

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

振型矩阵为

$$\mathbf{ev} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ 1.8019 & 0.4450 & -1.2468 \\ 2.2470 & -0.8020 & 0.5544 \end{bmatrix}$$

其中, 各列为各阶主振型, 各阶主振型尚不满足关于质量矩阵的正则化。

各阶固有频率分别为 $\omega_1 = 0.89008$, $\omega_2 = 1.4942$, $\omega_3 = 3.6050$; 振型阻尼比为 $\zeta_i = 0.01$, $i = 1, 2, 3$; 作用在各质量块上的力组成的向量为

$$\mathbf{F}(t) = \begin{Bmatrix} F_0 \\ F_0 \\ F_0 \end{Bmatrix} \cos \omega t; \quad F_0 = 2.0, \quad \omega = 3.5$$

初始条件为 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0}$ 。

解：程序 Program8 运行时需要键入以下数据：

n ——系统的自由度数

$nvec$ ——在振型叠加中要用到的振型个数

xm —— $n \times n$ 的质量矩阵

ev —— $n \times nvec$ 的振型矩阵

z —— $nvec$ 维振型阻尼比列向量

om —— $nvec$ 维固有频率列向量

f —— n 维载荷列向量

x_0 —— n 维初始位移列向量

xd_0 —— n 维初始速度列向量

$nstep$ ——离散时间点数, 即 $t_1, t_2, \dots, t_{nstep}$ 的个数

$delt$ ——时间步长

t ——离散时间序列, 即 $t_1, t_2, \dots, t_{nstep}$

x —— $n \times nstep$ 阶矩阵, 代表各质量块 m_1, m_2, \dots, m_n 在离散时间点 $t_1, t_2, \dots, t_{nstep}$ 处的位移。

程序执行后的结果为：

```
>>program8
Response of system using modal analysis
Coordinate 1
  1.21920e-002   4.62431e-002   9.57629e-002   1.52151e-001   2.05732e-001
  2.47032e-001   2.68028e-001   2.63214e-001   2.30339e-001   1.70727e-001
  8.91432e-002  -6.79439e-003  -1.07562e-001  -2.02928e-001  -2.83237e-001
 -3.40630e-001  -3.70023e-001  -3.69745e-001  -3.41725e-001  -2.91231e-001
Coordinate 2
  1.67985e-002   6.40135e-002   1.33611e-001   2.14742e-001   2.94996e-001
  3.61844e-001   4.04095e-001   4.13212e-001   3.84326e-001   3.16843e-001
  2.14565e-001   8.53051e-002  -5.99475e-002  -2.08242e-001  -3.46109e-001
 -4.61071e-001  -5.43061e-001  -5.85566e-001  -5.86381e-001  -5.47871e-001
Coordinate 3
  1.99158e-002   7.57273e-002   1.57485e-001   2.51794e-001   3.43491e-001
  4.17552e-001   4.60976e-001   4.64416e-001   4.23358e-001   3.38709e-001
  2.16699e-001   6.81361e-002  -9.29091e-002  -2.50823e-001  -3.90355e-001
 -4.98474e-001  -5.65957e-001  -5.88490e-001  -5.67173e-001  -5.08346e-001
```

所绘曲线如图 6.20 所示。

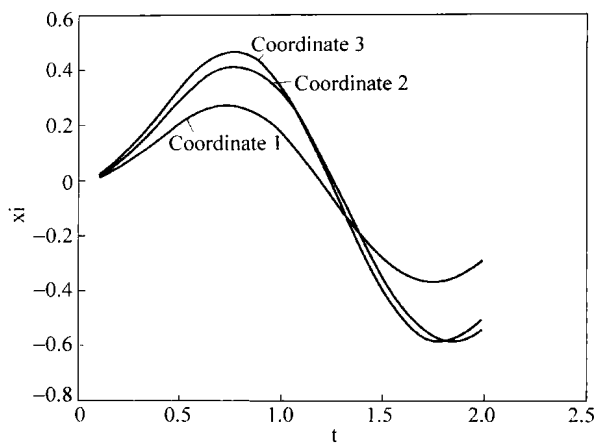


图 6.20 例 6.25 图

6.18 C++ 程序

本节给出了两个交互式的 C++ 程序,分别命名为 Program7. cpp 和 Program8. cpp。用它们可以分别求出给定方阵的特征多项式和多自由度系统的响应(基于振型叠加法)。这两个程序中的输入和输出与 Program7. m 和 Program8. m 中的输入和输出类似。

例 6.26 利用程序 Program13. cpp 求例 6.24 中所给矩阵的特征多项式。

解：程序运行后需要键入输入数据,显示结果如下：

```
please input the dimension n of matrix A:
3
Please input matrix A row by row:
    2    -1    0
   -1     2   -1
    0    -1    2
POLYNOMIAL EXPANSION OF A DETERMINANTAL EQUATION
DATA: DERERMINANT A:
    2.000000   -1.000000    0.000000
   -1.000000    2.000000   -1.000000
    0.000000   -1.000000    2.000000
RESULTS: POLYNOMIAL COEFFICIENTS IN
PCF (NP) * (X**N)+PCF (N) * (X** (N-1)) +...+PCF (2) * X+PCF (1)=0
   -4.000000   10.000000   -6.000000    1.000000
```

例 6.27 利用程序 Program8. cpp 求例 6.25 中多自由度系统的响应。

解：输入数据需要通过键盘键入。显示结果如下：

```

Please input N, NVEC and NSTEP:
3      3      20
Please input delt, omf and f0:
0.1     3.5     2.0
Please input mass matrix xm row by row:
1.0     0.0     0.0
0.0     1.0     0.0
0.0     0.0     1.0
Please input matrix ev row by row:
1.0           1.0           1.0
1.8019        0.4450        -1.2468
2.2470        -0.8020         0.5544
Please input array om:
0.89008      1.4942      3.6050
RESPONSE OF SYSTEM USING MODAL ANALYSIS
COORDINATE 1
      0.009363      0.035438      0.073118      0.115538      0.155010
      0.184085      0.196572      0.188401      0.158198      0.107508
      0.040629     -0.035924     -0.114247     -0.186060     -0.243782
     -0.281509     -0.295776     -0.286010     -0.254588     -0.206525
COORDINATE 2
      0.009395      0.035874      0.075128      0.121321      0.167711
      0.207370      0.233936      0.242311      0.229239      0.193705
      0.137094      0.063112     -0.022556     -0.112803     -0.199814
     -0.275895     -0.334293     -0.369942     -0.380052     -0.364457
COORDINATE 3
      0.009379      0.035648      0.074087      0.118353      0.161294
      0.195874      0.216076      0.217673      0.198772      0.160053
      0.104682      0.037905     -0.033627     -0.102705     -0.162484
     -0.207353     -0.233644     -0.240091     -0.227975     -0.200947

```

6.19 Fortran 程序

本节给出了两个 Fortran 程序,其中,PROGRAM7. F 用来求给定矩阵的特征多项式; PROGRAM8. F 用来基于振型叠加法求多自由度系统的响应。这两个程序中的输入和输

出分别与 Program7. m 和 Program8. m 中的输入和输出类似。

例 6.28 利用程序 PROGRAM7. F 求例 6.24 中所给矩阵的特征多项式。

解: 程序的输出结果如下。

```
POLYNOMIAL EXPANSION OF A DETERMINANTAL EQUATION
DATA: DETERMINANT A:
      0.200000E+01      -0.100000E+01      0.000000E+00
      -0.100000E+01      0.200000E+01      -0.100000E+01
      0.000000E+00      -0.100000E+01      0.200000E+01
RESULT: POLYNOMIAL COEFFICIENTS IN
PCF(NP) * (X * N) + PCF(N) * (X * N-1) + ... + PCF(2) * X + PCF(1) = 0
      -0.400000E+01      0.100000E+02      -0.600000E+01      0.100000E+01
```

例 6.29 利用程序 PROGRAM8. F 求例 6.25 中多自由度系统的响应。

解: 程序的输出结果如下。

```
RESPONSE OF SYSTEM USING MODAL ANALYSIS
COORDINATE 1
      0.936322E-02      0.354378E-01      0.731183E-01      0.115538E+00      0.155010E+00
      0.184085E+00      0.196572E+00      0.188401E+00      0.158198E+00      0.107508E+00
      0.406290E-01      -0.359245E-01      -0.114247E+00      -0.186060E+00      -0.243782E+00
      -0.281509E+00      -0.295776E+00      -0.286009E+00      -0.254587E+00      -0.206525E+00
COORDINATE 2
      0.939528E-02      0.358739E-01      0.751277E-01      0.121321E+00      0.167711E+00
      0.207370E+00      0.233936E+00      0.242311E+00      0.229239E+00      0.193704E+00
      0.137094E+00      0.631125E-01      -0.225565E-01      -0.112803E+00      -0.199814E+00
      -0.275895E+00      -0.334293E+00      -0.369942E+00      -0.380052E+00      -0.364457E+00
COORDINATE 3
      0.937892E-02      0.356481E-01      0.740876E-01      0.118353E+00      0.161294E+00
      0.195874E+00      0.216076E+00      0.217673E+00      0.198772E+00      0.160053E+00
      0.104682E+00      0.379048E-01      -0.336272E-01      -0.102705E+00      -0.162484E+00
      -0.207353E+00      -0.233644E+00      -0.240091E+00      -0.227975E+00      -0.200947E+00
```

参 考 文 献

- 6.1 F. W. Beaufait, *Basic Concepts of Structural Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1977.
- 6.2 R. J. Roark and W. C. Young, *Formulas for Stress and Strain* (5th ed.), McGraw-Hill, New York, 1975.

- 6.3 D. A. Wells, *Theory and Problems of Lagrangian Dynamics*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York, 1967.
- 6.4 J. H. Wilkinson, *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Clarendon Press, Oxford, 1965.
- 6.5 A. Ralston, *A First Course in Numerical Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1965.
- 6.6 L. Meirovitch, *Analytical Methods in Vibrations*, Macmillan, New York, 1967.
- 6.7 J. W. Strutt, Lord Rayleigh, *The Theory of Sound*, Macmillan, London, 1877 (reprinted by Dover Publications, New York in 1945).
- 6.8 W. C. Hurty and M. F. Rubinstein, *Dynamics of Structures*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1964.
- 6.9 T. K. Caughey, "Classical normal modes in damped linear dynamic systems," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 27, 1960, pp. 269-271.
- 6.10 A. Avakian and D. E. Beskos, "Use of dynamic stiffness influence coefficients in vibrations of non-uniform beams," letter to the editor, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 47, 1976, pp. 292-295.
- 6.11 I. Gladwell and P. M. Hanson, "Some error bounds and numerical experiments in modal methods for dynamics of systems," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 12, 1984, pp. 9-36.
- 6.12 R. Bajan, A. R. Kukreti, and C. C. Feng, "Method for improving incomplete modal coupling," *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 109, 1983, pp. 937-949.
- 6.13 E. J. Routh, *Advanced Rigid Dynamics*, Macmillan, New York, 1905.
- 6.14 D. W. Nicholson and D. J. Inman, "Stable response of damped linear systems," *Shock and Vibration Digest*, Vol. 15, November 1983, pp. 19-25.
- 6.15 P. C. Chen and W. W. Soroka, "Multidegree dynamic response of a system with statistical properties," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 37, 1974, pp. 547-556.
- 6.16 S. Mahalingam and R. E. D. Bishop, "The response of a system with repeated natural frequencies to force and displacement excitation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 36, 1974, pp. 285-295.
- 6.17 S. G. Kelly, *Fundamentals of Mechanical Vibrations*, McGraw-Hill, New York, 1993.

思考题

6.1 简答题

1. 刚度影响系数与柔度影响系数是如何定义的？并说明两者之间的关系。
2. 分别利用刚度矩阵和柔度矩阵，写出多自由度系统的运动微分方程。
3. 用矩阵的形式，表示 n 自由度系统的势能与动能。
4. 什么是广义质量矩阵？
5. 为什么质量矩阵 m 总是正定的？
6. 刚度矩阵 k 总是正定的吗？为什么？

7. 试说明广义坐标与笛卡儿坐标的区别。
8. 简述拉格朗日方程。
9. 什么是特征值问题?
10. 什么是主振型? 是如何计算的?
11. 一个 n 自由度系统可能有多少个不同大小的固有频率?
12. 什么是动力矩阵? 其用途是什么?
13. 对于一个多自由度系统, 如何得到其频率方程?
14. 试说明固有振型的正交性。什么是正则振型矢量?
15. 一个 n 维矢量空间的基是如何定义的?
16. 什么是展开定理? 它有什么重要性?
17. 阐述利用模态分析求多自由度系统响应的步骤。
18. 什么是刚体振型? 它是如何确定的?
19. 什么是退化系统?
20. 只利用前几阶振型, 如何求多自由度系统的响应?
21. 瑞利耗散函数是如何定义的?
22. 给出下列术语的定义: 比例阻尼, 模态阻尼比, 振型参与系数。
23. 什么时候会出现复数特征值?
24. Routh-Hurwitz 判据的用途是什么?

6.2 判断题

1. 对于一个多自由度系统, 对每一个自由度都可以写出一个运动微分方程。 ()
2. 拉格朗日方程不能用来推导多自由度系统的运动微分方程。 ()
3. 多自由度系统的质量矩阵、刚度矩阵、阻尼矩阵总是对称的。 ()
4. 系统的刚度矩阵与柔度矩阵之积总是单位矩阵。 ()
5. n 自由度系统的振型分析可以只针对 r 个振型 ($r < n$) 来进行。 ()
6. 对有阻尼多自由度系统而言, 所有的特征值都可能是复数。 ()
7. 模态阻尼比表示某一特定固有振型中的阻尼。 ()
8. 一个多自由度系统最多可以有 6 个固有频率等于零。 ()
9. 广义坐标总是具有长度的单位。 ()
10. 广义坐标与系统的约束条件无关。 ()
11. 多自由度系统的广义质量矩阵总是对角阵。 ()
12. 多自由度系统的势能与动能总是二次函数。 ()
13. 系统的质量矩阵总是对称和正定的。 ()

14. 系统的刚度矩阵总是对称和正定的。 ()
15. 刚体振型也叫零振型。 ()
16. 非约束系统也称为半正定系统。 ()
17. 总可以用牛顿第二运动定律来推导振动系统的运动微分方程。 ()

6.3 填空题

1. 弹簧常数定义为引起单位变形所需要的_____。
2. 柔度影响系数 a_{ij} 表示由于在点_____作用单位载荷引起的_____点的位移。
3. 当所有的其他点都固定不动, 而 j 点产生单位位移需在 i 点施加的力称为_____影响系数。
4. 多自由度系统的振型是_____。
5. 多自由度系统的运动微分方程可以用_____系数来表示。
6. 拉格朗日方程是用_____坐标来表示。
7. 克罗内克符号 δ_{ij} 的值当 $i=j$ 时等于 1, 当 $i \neq j$ 时其值等于_____。
8. 半正定系统的刚度矩阵是_____。
9. 多自由度系统至多有_____个刚体振型。
10. 若解矢量按固有振型的线性组合表示为 $x(t) = \sum_{i=1}^n q_i(t) \mathbf{X}^{(i)}$, 则广义坐标 $q_i(t)$ 也称为_____参与系数。
11. n 维矢量空间中的任意一组 n 个线性无关的矢量称为_____。
12. 任意一个 n 维矢量都可以表示为 n 个线性无关的矢量的线性组合, 这称为_____定理。
13. _____分析是基于展开定理进行的。
14. 模态分析主要是针对_____方程形式的运动微分方程。
15. n 自由度系统的特征矢量构成了 n 维空间的_____。
16. 应用拉格朗日方程时, 要求首先写出系统_____的表达式。
17. 行列式方程 $|\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}| = 0$ 也称为_____方程。
18. 刚度矩阵与柔度矩阵的对称性是根据_____互易定理得到的。
19. Maxwell 互易定理可以陈述为影响系数_____。
20. 只有在系统是_____的情况下, 刚度矩阵才是正定的。
21. 在无阻尼系统的自由振动中, 所有坐标都将作_____运动。
22. 在比例阻尼中, 阻尼矩阵可以视为_____矩阵与_____矩阵的线性组合。

6.4 选择题

1. n 自由度系统互不相等的固有频率的数目可能是_____。
 (a) 1 (b) ∞ (c) n

2. 动力矩阵 D 的表达式为_____。
 (a) $k^{-1}m$ (b) $m^{-1}k$ (c) km
3. 主振型的正交性是指_____。
 (a) $X^{(i)T}mX^{(j)}=0$
 (b) $X^{(i)T}kX^{(j)}=0$
 (c) $X^{(i)T}mX^{(j)}=0$ 与 $X^{(i)T}kX^{(j)}=0$
4. 振型矩阵 X 可以表示为_____。
 (a) $X=[X^{(1)} \quad X^{(2)} \quad \cdots \quad X^{(n)}]$
 (b) $X=\begin{bmatrix} X^{(1)T} \\ X^{(2)T} \\ \vdots \\ X^{(n)T} \end{bmatrix}$
 (c) $X=k^{-1}m$
5. 瑞利耗散函数用于生成_____。
 (a) 刚度矩阵 (b) 阻尼矩阵 (c) 质量矩阵
6. n 自由度系统的特征方程为_____。
 (a) 超越方程 (b) n 阶多项式方程 (c) n 阶微分方程
7. 系统的基频是_____。
 (a) 最大值 (b) 最小值 (c) 任意值
8. 负阻尼会导致_____。
 (a) 不稳定性 (b) 快速收敛 (c) 振荡(动)
9. Routh-Hurwitz 判据用于研究_____。
 (a) 系统的收敛性 (b) 系统的振动 (c) 系统的稳定性
10. 刚度矩阵与柔度矩阵的关系为_____。
 (a) $k=a$ (b) $k=a^{-1}$ (c) $k=a^T$
11. k 是正的, m 是正定的, 这样的系统称为_____。
 (a) 半正定系统 (b) 正定系统 (c) 不确定系统
12. 主振型关于质量矩阵 m 的正交性是指_____。
 (a) $X^{(i)T}mX^{(i)}=0$ (b) $X^{(i)T}mX^{(j)}=0$ (c) $X^TmX=\omega_i^2$
13. 模态分析可以方便地用来求多自由度系统的响应_____。
 (a) 对任意激振力作用的情况
 (b) 对自由振动的情况
 (c) 只用几个而不是全部振型

6.5 连线题

- | | |
|---|-----------------------------|
| 1. $\frac{1}{2} \dot{\mathbf{X}}^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{X}}$ | (a) 令其等于零就可求得特征值 |
| 2. $\frac{1}{2} \mathbf{X}^T \mathbf{k} \mathbf{X}$ | (b) 当主振型正则化后等于 ω_i^2 |
| 3. $\mathbf{X}^{(i)T} \mathbf{m} \mathbf{X}^{(j)}$ | (c) 系统的动能 |
| 4. $\mathbf{X}^{(i)T} \mathbf{m} \mathbf{X}^{(i)}$ | (d) 对主振型 \mathbf{X} 等于零 |
| 5. $\mathbf{X}^T \mathbf{k} \mathbf{X}$ | (e) 等于动力矩阵 \mathbf{D} |
| 6. $\mathbf{m} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{k} \mathbf{x}$ | (f) 系统的应变能 |
| 7. $ \mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m} $ | (g) 等于作用力矢量 \mathbf{F} |
| 8. $\mathbf{k}^{-1} \mathbf{m}$ | (h) 当主振型正则化后等于 1 |

习 题

6.1 运用牛顿第二定律, 推导图 6.21 所示系统的运动微分方程。

6.2 运用牛顿第二定律, 推导图 6.22 所示系统的运动微分方程。

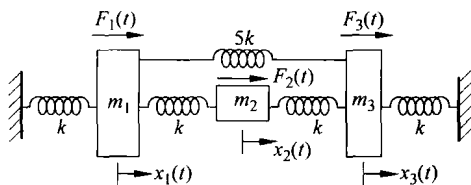


图 6.21 习题 6.1 图

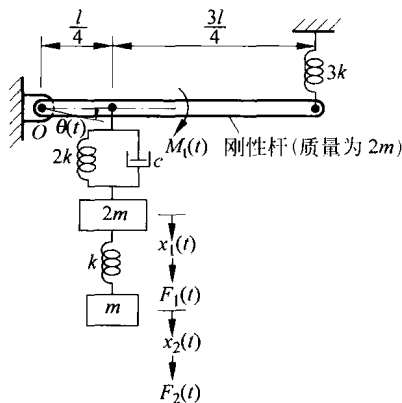


图 6.22 习题 6.2 图

6.3 运用牛顿第二定律, 推导图 6.23 所示系统的运动微分方程。

6.4 运用牛顿第二定律, 推导图 6.24 所示系统的运动微分方程。

6.5 运用牛顿第二定律, 推导图 6.25 所示系统的运动微分方程。

6.6 汽车可以模型化为图 6.26 所示的系统, 运用牛顿第二定律, 推导其运动微分方程。

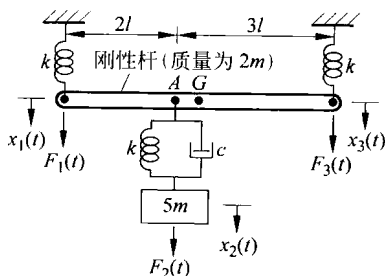


图 6.23 习题 6.3 图

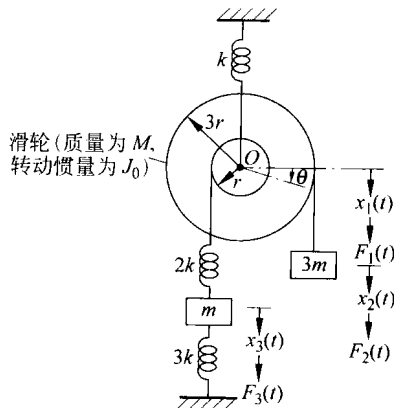


图 6.24 习题 6.4 图

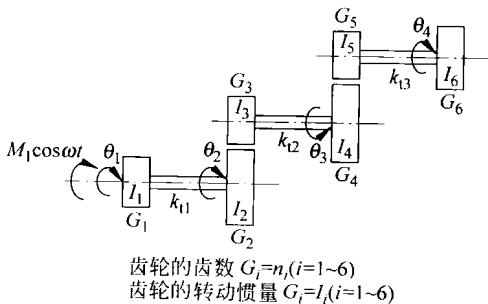


图 6.25 习题 6.5 图

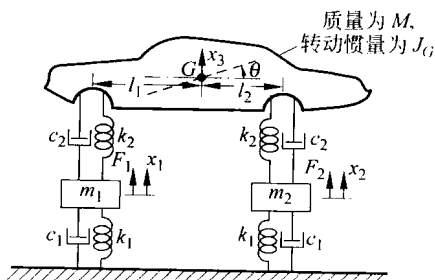


图 6.26 习题 6.6 图

- 6.7 根据提示的坐标,推导如图 6.21 所示系统的刚度矩阵。
- 6.8 根据提示的坐标,推导如图 6.22 所示系统的刚度矩阵。
- 6.9 根据提示的坐标,推导如图 6.23 所示系统的刚度矩阵。
- 6.10 根据提示的坐标,推导如图 6.24 所示系统的刚度矩阵。
- 6.11 根据提示的坐标,推导如图 6.25 所示系统的刚度矩阵。
- 6.12 根据提示的坐标,推导如图 6.26 所示系统的刚度矩阵。
- 6.13 求图 5.33 所示系统的柔度矩阵。
- 6.14 求图 5.33 所示系统的刚度矩阵。
- 6.15 求图 5.36 所示系统的柔度矩阵。
- 6.16 求图 5.36 所示系统的刚度矩阵。
- 6.17 求图 5.36 所示系统的质量矩阵。
- 6.18 求图 6.27 所示扭振系统的柔度影响系数和刚度影响系数,并写出系统的运动微分方程。

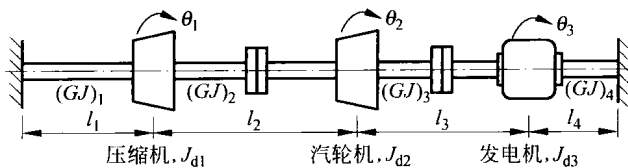


图 6.27 习题 6.18 图

6.19 求图 6.28 所示系统的柔度影响系数和刚度影响系数,并写出系统的运动微分方程。

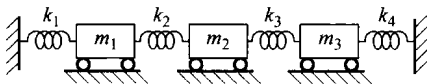


图 6.28 习题 6.19 图

6.20 如图 6.29(a)所示的飞机机翼可以模型化为如图 6.29(b)所示的三自由度集中质量系统。假定 $A_i = A$, $(EI)_i = EI$, $l_i = l$ ($i = 1, 2, 3$), 根部固定, 试推导机翼的柔度矩阵与运动微分方程。

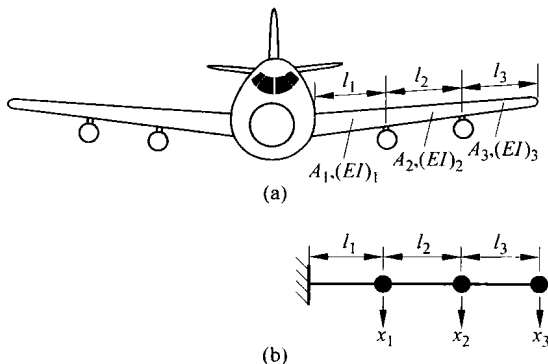


图 6.29 习题 6.20 图

6.21 求图 6.30 所示等截面梁的柔度矩阵。忽略梁的质量并假定 $l_i = l$ 。

6.22 求图 6.31 所示弹簧-质量系统的柔度矩阵和刚度矩阵。不计接触面之间的摩擦。

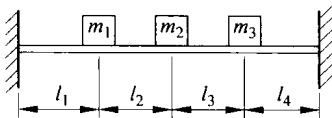


图 6.30 习题 6.21 图

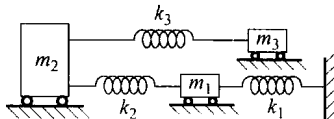


图 6.31 习题 6.22 图

6.23 推导图 6.32 所示具有 3 个附加质量的张紧弦的运动微分方程。假设弦的两端固定。

6.24 推导图 6.33 所示系统的运动微分方程。

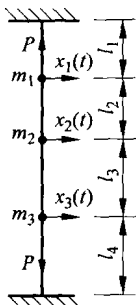


图 6.32 习题 6.23 图

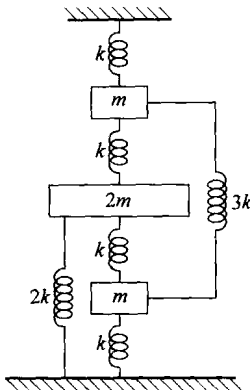


图 6.33 习题 6.24 图

- 6.25 在图 2.58 所示系统中, 弹簧的刚度系数均为 k , 对称布置, 每一根弹簧均与相临弹簧成 90° 角。求连接点沿任意方向的影响系数。
- 6.26 证明图 6.3(a) 所示的弹簧-质量系统的刚度矩阵, 是一沿对角线的带状矩阵。
- 6.27 根据提示的坐标, 推导图 6.21 所示系统的质量矩阵。
- 6.28 根据提示的坐标, 推导图 6.22 所示系统的质量矩阵。
- 6.29 根据提示的坐标, 推导图 6.23 所示系统的质量矩阵。
- 6.30 根据提示的坐标, 推导图 6.24 所示系统的质量矩阵。
- 6.31 根据提示的坐标, 推导图 6.25 所示系统的质量矩阵。
- 6.32 逆影响系数 b_{ij} 定义为在 j 点处作用一个单位脉冲时, 所引起的 i 点处的速度。根据此定义, 求图 6.4(a) 所示系统的逆质量矩阵。
- 6.33 一四层抗剪建筑物的简化模型如图 6.34 所示。此模型基于如下假设: 各层楼板是刚性的, 在各自的平面内没有转动, 其他各处的质量都等效到各层楼板上。分别利用牛顿第二定律和拉格朗日方程推导此模型的运动微分方程。
- 6.34 将 x 与 θ 视为广义坐标, 利用拉格朗日方程推导图 6.35 所示系统的运动微分方程。
- 6.35 分别将 x_1 与 x_2 、 x 与 θ 视为广义坐标, 利用拉格朗日方程推导图 5.10(a) 所示系统的运动微分方程。
- 6.36 利用拉格朗日方程推导图 6.28 所示系统的运动微分方程。
- 6.37 利用拉格朗日方程推导图 6.10 所示三重摆的运动微分方程。
- 6.38 如图 6.36 所示, 当飞机产生对称的振动时, 机身可以看成是一个集中质量 M_0 , 机翼

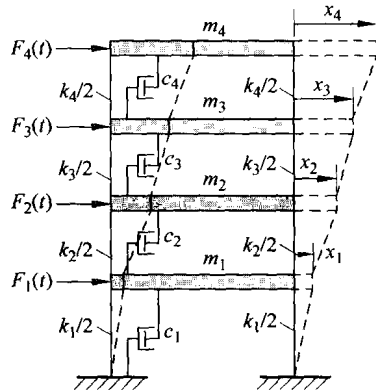


图 6.34 习题 6.33 图

可以看成是一端部具有集中质量 M 的刚性杆。机身与机翼之间的弹性效应可以用两个刚度为 k_t 的扭簧来代替。(a)以 x 和 θ 为广义坐标,利用拉格朗日方程推导其运动微分方程;(b)求此模型的固有频率和主振型;(c)若 $M_0 = 1000 \text{ kg}$, $M = 500 \text{ kg}$, $l = 6 \text{ m}$,求扭簧的刚度,使得与扭转振动对应的固有频率大于 2 Hz 。

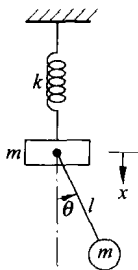


图 6.35 习题 6.34 图

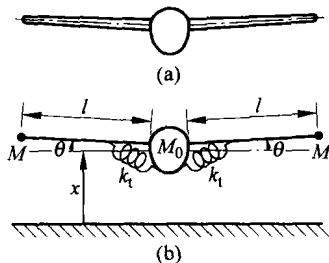


图 6.36 习题 6.38 图

- 6.39 利用拉格朗日方程推导图 6.21 所示系统的运动微分方程。
- 6.40 利用拉格朗日方程推导图 6.22 所示系统的运动微分方程。
- 6.41 利用拉格朗日方程推导图 6.23 所示系统的运动微分方程。
- 6.42 利用拉格朗日方程推导图 6.24 所示系统的运动微分方程。
- 6.43 利用拉格朗日方程推导图 6.25 所示系统的运动微分方程。
- 6.44 根据坐标 $q_1 = x_1$, $q_2 = x_2 - x_1$, $q_3 = x_3 - x_2$, 建立例 6.10 中所述系统的特征值问题。求解后将所得结果与例 6.10 中的结果进行比较,并总结结论。
- 6.45 推导图 6.28 所示系统的频率方程。
- 6.46 求图 6.6(a)所示系统的固有频率和主振型。假设 $k_1 = k$, $k_2 = 2k$, $k_3 = 3k$, $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, $m_3 = 3m$ 。画图表示各阶主振型。
- 6.47 建立图 6.6(a)所示系统矩阵形式的运动微分方程,求出相应的主振型后,验证它们的正交性。假设 $k_1 = 3k$, $k_2 = k_3 = k$, $m_1 = 3m$, $m_2 = m_3 = m$ 。
- 6.48 求图 6.10 所示系统的固有频率。假设 $l_1 = 20 \text{ cm}$, $l_2 = 30 \text{ cm}$, $l_3 = 40 \text{ cm}$, $m_1 = 1 \text{ kg}$, $m_2 = 2 \text{ kg}$, $m_3 = 3 \text{ kg}$ 。
- 6.49 (a)求图 6.30 所示系统的固有频率,取 $m_1 = m_2 = m_3 = m$, $l_1 = l_2 = l_3 = l/4$; (b)求当 $m = 10 \text{ kg}$, $l = 0.5 \text{ m}$, 梁横截面直径为 2.5 cm , 梁的材料为钢时各固有频率的值; (c)分别考虑空心圆形横截面、矩形横截面和空心矩形横截面的情况,为得到与(b)中相同的固有频率,问哪一种横截面对应的梁的质量最小。
- 6.50 三自由度系统的频率方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda - 5 & -3 & -2 \\ -3 & \lambda - 6 & -4 \\ -1 & -2 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = 0$$

求该方程的根。

- 6.51 求图 6.28 所示系统的特征值和特征矢量, 取 $k_1=k_2=k_3=k_4=k$, $m_1=m_2=m_3=m$ 。
- 6.52 求图 6.28 所示系统的固有频率和主振型, 取 $k_1=k_2=k_3=k_4=k$, $m_1=m_3=2m$, $m_2=3m$ 。
- 6.53 求图 6.10 所示三重摆的固有频率和主振型, 取 $m_1=m_2=m_3=m$, $l_1=l_2=l_3=l$ 。
- 6.54 求习题 6.22 所述系统的固有频率和主振型, 取 $m_1=m_3=m$, $m_2=2m$, $k_1=k_2=k$, $k_3=2k$ 。
- 6.55 证明图 6.6(a) 所示的系统, 当 $k_1=3k$, $k_2=k_3=k$, $m_1=4m$, $m_2=2m$, $m_3=m$ 时, 其固有频率为 $\omega_1=0.46\sqrt{k/m}$, $\omega_2=\sqrt{k/m}$, $\omega_3=1.34\sqrt{k/m}$ 。并求系统的特征矢量。
- 6.56 求习题 6.23 中所述系统的固有频率, 取 $m_1=2m$, $m_2=m$, $m_3=3m$, $l_1=l_2=l_3=l_4=l$ 。
- 6.57 求图 6.27 所示扭振系统的固有频率和主振型, 取 $(GJ)_i=GJ$, $i=1, 2, 3, 4$, $J_{d1}=J_{d2}=J_{d3}=J_0$, $l_1=l_2=l_3=l_4=l$ 。
- 6.58 一等截面杆的质量矩阵和刚度矩阵分别为

$$\mathbf{m} = \frac{\rho A l}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} = \frac{2AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

式中, ρ 是材料的密度; A 是横截面面积; E 是弹性模量, l 是杆的长度。求相应的固有频率和主振型。

- 6.59 一振动系统的质量矩阵如下:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3 个特征向量分别为

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

求系统的 3 个正则振型矩阵。

- 6.60 对图 6.37 所示的系统, (a) 求系统的特征多项式 $\Delta(\omega^2) = \det |\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}|$; (b) 取增量 $\Delta\omega^2 = 0.2$, 从 $\omega^2 = 0$ 到 $\omega^2 = 4.0$ 绘制 $\Delta(\omega^2)$ 的图形; (c) 求 $\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2$ 的值。
- 6.61 (a) 一个振动系统的两个特征矢量如下:

$$\begin{Bmatrix} 0.2754946 \\ 0.3994672 \\ 0.4490562 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 0.6916979 \\ 0.2974301 \\ -0.3389320 \end{Bmatrix}$$

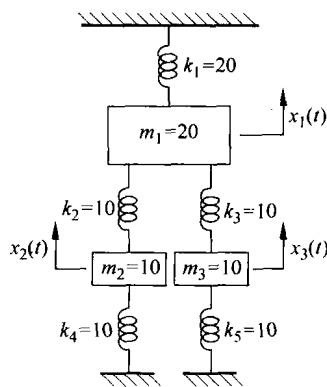


图 6.37 习题 6.60 图

证明它们关于下列质量矩阵满足正则化条件:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

并求另外一个关于质量矩阵也满足正则化条件的特征矢量。

(b) 如果系统的刚度矩阵是

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 & 0 \\ -4 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

利用(a)中的特征矢量求系统的固有频率。

6.62 求图 6.21 所示系统的固有频率, 取 $m_1 = m_2 = m_3 = m$ 。

6.63 求图 6.22 所示系统的固有频率, 取 $m = 1 \text{ kg}$, $l = 1 \text{ m}$, $k = 1000 \text{ N/m}$, $c = 100 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ 。

6.64 求图 6.13 所示系统的固有频率和主振型, 取 $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, $m_3 = 3m$, $k_1 = k_2 = k$ 。

6.65 求图 6.38 所示半正定系统的振型矩阵, 取 $J_1 = J_2 = J_3 = J_0$, $k_{11} = k_1$, $k_{12} = 2k_1$ 。

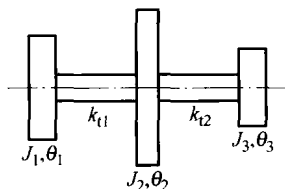


图 6.38 习题 6.65 图

6.66 求图 6.28 所示弹簧-质量系统的自由振动响应, 取 $k_i = k$ ($i = 1, 2, 3, 4$), $m_1 = 2m$, $m_2 = 3m$, $m_3 = 2m$, 初始条件为 $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_3(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = \dot{x}_3(0) = 0$ 。

6.67 求图 6.10 所示三重摆的自由振动响应, 取 $l_i = l$ ($i = 1, 2, 3$), $m_i = m$ ($i = 1, 2, 3$), 初始条件为 $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0$, $\theta_3(0) = \theta_{30}$, $\dot{\theta}_i(0) = 0$ ($i = 1, 2, 3$)。

6.68 求图 6.32 所示张紧弦的自由振动响应, 取 $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, $m_3 = 3m$, $l_i = l$ ($i = 1, 2, 3, 4$), 初始条件为 $x_1(0) = x_3(0) = 0$, $x_2(0) = x_{20}$, $\dot{x}_i(0) = 0$ ($i = 1, 2, 3$)。

6.69 求图 6.6(a)所示弹簧-质量系统的自由振动响应, 取 $k_1 = k$, $k_2 = 2k$, $k_3 = 3k$, $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, $m_3 = 3m$, 初始条件为 $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_{10}$, $x_i(0) = 0$ ($i = 1, 2, 3$), $\dot{x}_2(0) = \dot{x}_3(0) = 0$ 。

6.70 求图 6.31 所示弹簧-质量系统的自由振动响应, 取 $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, $m_3 = m$, $k_1 = k_2 = k$, $k_3 = 2k$, 初始条件为 $\dot{x}_3(0) = \dot{x}_{30}$, $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$ 与 $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ 。

6.71 在图 6.13 所示系统中, 若第一个小车由于冲击作用获得了一个初速度 \dot{x}_0 , 求系统的自由振动响应, 取 $m_i = m$ ($i = 1, 2, 3$), $k_1 = k_2 = k$ 。

6.72 系统的运动微分方程如下:

$$10 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}(t) + 100 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$$

求其自由振动响应,假设初始条件为 $x_i(0)=0.1, \dot{x}_i(0)=0 (i=1,2,3)$ (注:系统的固有频率和主振型已在例 6.10 和例 6.11 中求出)。

- 6.73 利用振型分析法,求下列二自由度系统的自由振动响应:

$$2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}(t) + 8 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$$

初始条件为 $\mathbf{x}(0)=\{1 \ 0\}^T, \dot{\mathbf{x}}(0)=\{0 \ 1\}^T$ 。

- 6.74 利用振型叠加法,求图 6.39 所示系统中左下方的质量块受简谐激励 $F(t)=F_0 \sin \omega t$ 作用时 3 个质量块的振幅。其中, $m=1 \text{ kg}, k=1000 \text{ N/m}, F_0=5 \text{ N}, \omega=10 \text{ rad/s}$ 。

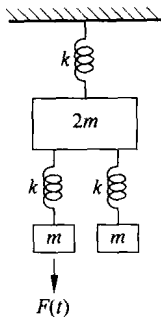


图 6.39 习题 6.74 图

- 6.75 (a) 确定图 6.11 所示扭转系统的固有频率与主振型。已知 $k_{t1}=k_{t2}=k_{t3}=k_t$ 与 $J_1=J_2=J_3=J_0$ 。(b) 若扭矩 $M_{t3}(t)=M_{t0} \cos \omega t (M_{t0}=500 \text{ N} \cdot \text{m}, \omega=100 \text{ rad/s})$ 作用于发电机(J_3)上,试求压缩机、汽轮机和发电机的振幅。假定 $M_{t1}=M_{t2}=0, k_t=100 \text{ N} \cdot \text{m/rad}, J_0=1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。

- 6.76 利用习题 6.19 和习题 6.51 的结果,求图 6.28 所示系统的振型矩阵并推导解耦以后的运动微分方程。

- 6.77 可以利用振型加速度方法求多自由度系统的近似解。根据这种方法,无阻尼系统的运动微分方程可以改写成如下形式:

$$\mathbf{x} = \mathbf{k}^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{m} \ddot{\mathbf{x}}) \quad (\text{E.1})$$

而 $\ddot{\mathbf{x}}$ 可以利用前 $r (r < n)$ 阶振型近似地表示为

$$\ddot{\mathbf{x}}_{n \times 1} = \mathbf{X}_{n \times r} \ddot{\mathbf{q}}_{r \times 1} \quad (\text{E.2})$$

由于 $(\mathbf{k} - \omega_i^2 \mathbf{m}) \mathbf{X}^{(i)} = \mathbf{0}$, 所以由式(E.1)得

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{k}^{(-1)} \mathbf{F}(t) - \sum_{i=1}^r \frac{1}{\omega_i^2} \mathbf{X}^{(i)} \ddot{\mathbf{q}}_i(t) \quad (\text{E.3})$$

根据此方法,取 $r=1$,求例 6.18 中所述系统的近似解,不计阻尼。

- 6.78 求习题 6.46 中所述系统对下列初始条件的响应: $x_1(0)=1, \dot{x}_1(0)=0, x_2(0)=2, \dot{x}_2(0)=1, x_3(0)=1, \dot{x}_3(0)=-1$ 。假设 $k/m=1$ 。

- 6.79 证明用主坐标 $q_i(t)$ 表示的初始条件与用物理坐标 $x_i(t)$ 表示的初始条件之间具有如下关系:

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{X}^T \mathbf{m} \mathbf{x}(0), \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{X}^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{x}}(0)$$

- 6.80 载有骑乘者的自行车可以简化为图 6.40 所示的模型。求当自行车遇到如图所示的路肩时,骑乘者的垂直运动。

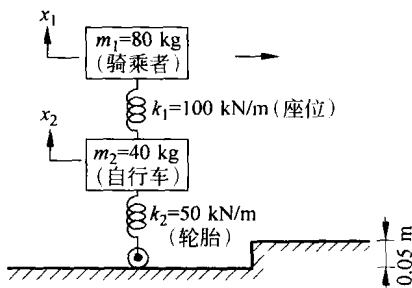


图 6.40 习题 6.80 图

- 6.81 求图 6.10 所示三重摆在大小为 $0.1 \text{ N} \cdot \text{m}$ 、作用时间为 0.1 s 的矩形脉冲作用下的响应。已知 $l_i = 0.5 \text{ m} (i=1, 2, 3)$, $m_i = 1 \text{ kg} (i=1, 2, 3)$, 冲量作用在 m_3 上, 与 θ_3 方向相同。假设摆在初始时刻静止。
- 6.82 求图 6.6(a) 所示弹簧-质量系统在大小为 1000 N 、作用时间为 0.25 s 的矩形脉冲作用下的响应。已知 $k_1 = k, k_2 = 2k, k_3 = 3k, m_1 = m, m_2 = 2m, m_3 = 3m, k = 10^4 \text{ N/m}, m = 2 \text{ kg}$, 冲量作用在 m_1 上, 与 x_1 方向相同。
- 6.83 利用 5.6 节所述机械阻抗方法求图 6.16 所示系统的稳态响应。已知 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 100 \text{ N/m}, m_1 = m_2 = m_3 = 1 \text{ kg}, c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1 \text{ N} \cdot \text{s/m}, F_1(t) = F_0 \cos \omega t$ ($F_0 = 10 \text{ N}, \omega = 1 \text{ rad/s}$)。假设弹簧 k_4 和阻尼器 c_4 在右端与刚性墙体连接。
- 6.84 如图 6.41 (a) 所示的机翼可以模型化为图 6.41 (b) 所示的 12 自由度集中质量系统。通过实验得到该系统的前 3 阶主振型如下表:

主 振型	自 由 度												
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbf{X}^{(1)}$	0	0.126	0.249	0.369	0.483	0.589	0.686	0.772	0.846	0.907	0.953	0.984	1.000
$\mathbf{X}^{(2)}$	0	-0.375	-0.697	-0.922	-1.017	-0.969	-0.785	-0.491	-0.127	0.254	0.599	0.860	1.000
$\mathbf{X}^{(3)}$	0	0.618	1.000	1.000	0.618	0.000	-0.618	-1.000	-1.000	-0.618	0.000	0.618	1.000

相应的前 3 阶固有频率分别为 $\omega_1 = 225 \text{ rad/s}, \omega_2 = 660 \text{ rad/s}, \omega_3 = 1100 \text{ rad/s}$ 。如果已知机身的垂直运动 $x_0(t)$, 且近似地认为机翼的运动是其前 3 阶主振型的线性组合, 推导确定其动力学响应的解耦形式的运动微分方程。

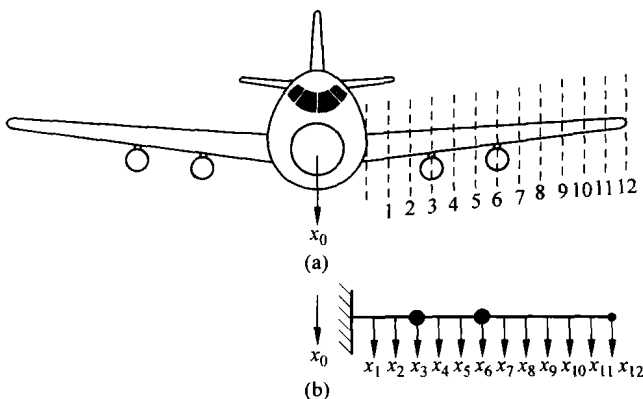


图 6.41 习题 6.84 图

提示: 与式 (3.64) 类似, 机翼的运动微分方程的形式为

$$m \ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{x}_0 u_1) + k(x - x_0 u_1) = 0$$

或

$$m\ddot{\mathbf{x}} + c\dot{\mathbf{x}} + k\mathbf{x} = -x_0 m\mathbf{u}_1$$

式中, $\mathbf{u}_1 = \{1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0\}^T$ 是一个单位矢量。

- 6.85 利用 MATLAB, 求例 6.12 所述系统的质量矩阵和刚度矩阵对应的特征值与特征向量。
- 6.86 利用 MATLAB, 求习题 6.68 所述系统的自由振动响应, 并画图表示。其中, $x_{20} = 0.5, P=100, l=5, m=2$ 。
- 6.87 利用 MATLAB 函数 ODE23, 求习题 6.74 所述系统的受迫振动响应, 并画图表示。
- 6.88 利用 MATLAB 函数 roots 求下列方程的根:

$$f(x) = x^{12} - 2 = 0$$

- 6.89 求黏性阻尼三自由度系统的强迫振动响应, 该系统的运动微分方程为

$$10 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}(t) + 5 \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) + 20 \begin{bmatrix} 7 & -3 & 0 \\ -3 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} 5\cos 2t \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

假设全部初始条件均为零。

- 6.90 利用 MATLAB 函数 ODE23 求解习题 6.83, 并画图表示 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 和 $x_3(t)$ 。

- 6.91 利用程序 Program7.m, 生成对应于矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ 的特征多项式。

- 6.92 利用程序 Program8.m, 求下列数据对应的三自由度系统的稳态响应:

$$\omega_1 = 25.076 \text{ rad/s}, \quad \omega_2 = 53.578 \text{ rad/s},$$

$$\omega_3 = 110.907 \text{ rad/s}, \quad \zeta_i = 0.001, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 41.4 & 0 & 0 \\ 0 & 38.8 & 0 \\ 0 & 0 & 25.88 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{ev} = \begin{bmatrix} 1 & 1.0 & 1.0 \\ 1.303 & 0.860 & -1.000 \\ 1.947 & -1.685 & 0.183 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}(t) = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5000\cos 5t \\ 10\,000\cos 10t \\ 20\,000\cos 20t \end{Bmatrix}$$

- 6.93 利用程序 Program7.cpp 求解习题 6.91。
- 6.94 利用程序 Program8.cpp 求解习题 6.92。
- 6.95 利用程序 PROGRAM7.F 求解习题 6.91。
- 6.96 利用程序 PROGRAM8.F 求解习题 6.92。
- 6.97 编写一个根据式(6.61)中的已知特征值, 求特征向量的计算机程序。并利用此程序求习题 6.52 中的主振型。
- 6.98 编写一个生成关于质量矩阵 \mathbf{m} 满足正则化条件的振型矩阵 \mathbf{X} 的计算机程序。该程序应该能够把系统的自由度数、主振型和质量矩阵作为输入数据。并利用此程序求解习

题 6.59。

6.99 无阻尼系统的运动微分方程(各量均采用国际制单位)为

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 16 & -8 & 0 \\ -8 & 16 & -8 \\ 0 & -8 & 16 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} 10 \sin \omega t \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

利用子程序 MODAL,求当 $\omega = 5 \text{ rad/s}$ 时系统的稳态响应。

6.100 求习题 6.99 中系统的响应,激励角频率 ω 的变化范围为 $1 \sim 10 \text{ rad/s}$,角频率变化的增量为 1 rad/s 。作图表示 $x_i(t) (i=1,2,3)$ 的第一个峰值的大小随 ω 的变化规律。

设计题目

6.101 如图 6.42(a)所示,一个重型机床安装在多层建筑的二层,可以将其简化为如图 6.42(b)所示的三自由度模型。(a)如果 $k_1 = 5000 \text{ lbf/in}$, $k_2 = 500 \text{ lbf/in}$, $k_3 = 2000 \text{ lbf/in}$, $c_1 = c_2 = c_3 = 10 \text{ lbf} \cdot \text{s/in}$, $m_f = 50 \text{ lbf} \cdot \text{s}^2/\text{in}$, $m_b = 10 \text{ lbf} \cdot \text{s}^2/\text{in}$, $m_h = 2 \text{ lbf} \cdot \text{s}^2/\text{in}$, $F(t) = 1000 \cos 60t \text{ lbf}$,用 5.6 节所述机械阻抗法求系统的稳态响应;(b)如果机床顶端的响应 x_3 必须降低 25%,支承弹簧的刚度 k_2 应为多少?(c)为了达到(b)中的目的,还有其他更好的方法吗?

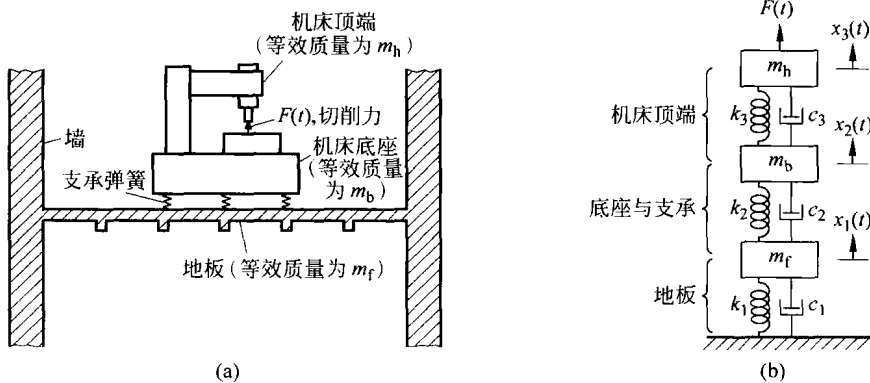


图 6.42 习题 6.101 图



瑞利(John William Strutt, Lord Rayleigh, 1842—1919),英国物理学家,曾任剑桥大学实验物理学教授,伦敦皇家学院自然哲学教授,英国皇家协会主席和剑桥大学名誉校长。瑞利对光学和声学的研究是广为人知的,即使是在今天,其于1877年出版的《声的理论》(*Theory of Sound*)一书仍被认为是第一流的著作。其提出的计算振动物体固有频率的近似方法被称为瑞利法。

(照片经 Applied Mechanics Reviews 授权使用。)

第7章 多自由度系统固有频率与振型的近似计算方法

7.1 引言

在第6章中,是通过令特征矩阵的行列式等于零来求多自由度系统的固有频率(特征值)和主振型(特征向量)。尽管这是一种精确的方法,但当系统的自由度数较大时,特征矩阵的展开以及依此得到的 n 次代数方程的求解会变得非常烦琐。目前已有几种数值方法可以计算多自由度系统的固有频率和主振型。本章将介绍数值方法中的邓克莱法、瑞利法、霍尔茨法、李兹法、矩阵迭代法、雅可比法和子空间迭代法。邓克莱法和瑞利法仅适合于估算系统的基频。霍尔茨法本质上是一种按表格计算的方法,它可以求出特征值问题的部分或全部解。李兹法是一种利用假设振型进行坐标变换从而缩减系统自由度数的近似方法。矩阵迭代法每次只能得到一个固有频率,通常是从基频开始,当得到所求的前几阶固有频率和主振型后便可停止;如果要求出全部固有频率和主振型,可以使用雅可比法,因为该法可以同时得到全部特征值和特征向量。子空间迭代法是矩阵迭代法的发展,它将矩阵迭代法每次仅迭代一个假设振型,发展为同时迭代系统的前 P 阶假设振型,因而提高了计算效率。迭代过程中各阶假设振型的正交性由李兹法来保证,因此可以认为子空间迭代法是矩阵迭代法与李兹法相结合的一种近似计算方法。它对求解自由度数较大系统的前若干阶较低的固有频率及主振型非常有效。

7.2 邓克莱法

邓克莱(Dunkerley)公式是根据组合系统各组成部分的固有频率给出其基频的近似值。在推导该公式时,利用了对于大多数振动系统来说,相对于基频各高阶频率都很大这一事实^[7, 1~7, 3]。考虑一个一般的 n 自由度系统,其特征值由频率方程(6.63)确定:

$$|-\mathbf{k} + \omega^2 \mathbf{m}| = 0$$

或

$$\left| -\frac{1}{\omega^2} \mathbf{I} + \mathbf{a} \mathbf{m} \right| = 0 \quad (\text{A})$$

对于一个具有集中质量的系统,其质量矩阵为对角阵,式(A)可以写成

$$\left| -\frac{1}{\omega^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & m_n \end{bmatrix} \right| = 0$$

即

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{\omega^2} + a_{11}m_1 & a_{12}m_2 & \cdots & a_{1n}m_n \\ a_{21}m_1 & -\frac{1}{\omega^2} + a_{22}m_2 & \cdots & a_{2n}m_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}m_1 & a_{n2}m_2 & \cdots & -\frac{1}{\omega^2} + a_{nn}m_n \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{B})$$

将式(B)展开后得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\omega^2} \right)^n - (a_{11}m_1 + a_{22}m_2 + \cdots + a_{nn}m_n) \left(\frac{1}{\omega^2} \right)^{n-1} + (a_{11}a_{22}m_1m_2 \\ & + a_{11}a_{33}m_1m_3 + \cdots + a_{n-1,n-1}a_{nn}m_{n-1}m_n) - a_{12}a_{21}m_1m_2 \\ & - \cdots - a_{n-1,n}a_{n,n-1}m_{n-1}m_n \left(\frac{1}{\omega^2} \right)^{n-2} - \cdots = 0 \end{aligned} \quad (\text{C})$$

式(C)的左边是一个关于 $(1/\omega^2)$ 的 n 次多项式,该式又可写成各因式连乘积的形式,所以式(C)可重写为

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_1^2} \right) \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_2^2} \right) \cdots \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_n^2} \right) = \left(\frac{1}{\omega^2} \right)^n \\ & - \left(\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \cdots + \frac{1}{\omega_n^2} \right) \left(\frac{1}{\omega^2} \right)^{n-1} - \cdots = 0 \end{aligned} \quad (7.1)$$

令式(C)和(7.1)中 $(1/\omega^2)^{n-1}$ 的系数相等,得

$$\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \cdots + \frac{1}{\omega_n^2} = a_{11}m_1 + a_{22}m_2 + \cdots + a_{nn}m_n \quad (7.2)$$

在大多数情况下,各高阶频率 $\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n$ 都要比基频 ω_1 大,即

$$\frac{1}{\omega_i^2} \ll \frac{1}{\omega_1^2}, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

于是式(7.2)可近似地写成

$$\frac{1}{\omega_1^2} \simeq a_{11}m_1 + a_{22}m_2 + \cdots + a_{nn}m_n \quad (7.3)$$

此式称为邓克莱公式。式(7.3)给出的基频的近似值总是比准确值小。有些情况下,将式(7.3)写成如下形式会更方便:

$$\frac{1}{\omega_1^2} \simeq \frac{1}{\omega_{1n}^2} + \frac{1}{\omega_{2n}^2} + \cdots + \frac{1}{\omega_{nn}^2} \quad (7.4)$$

式中, $\omega_m = (1/a_{mm}m_i)^{1/2} = (k_{ii}/m_i)^{1/2}$ 代表由质量 m_i 和刚度为 k_{ii} 的弹簧组成的单自由度系统的固有频率($i=1, 2, \dots, n$)。在文献[7.4, 7.5]中,给出了利用邓克莱公式求弹性系统的最低阶固有频率的例子。

例 7.1 用邓克莱公式,估算图 7.1 所示具有 3 个相等的集中质量的简支梁的第一阶固有频率。

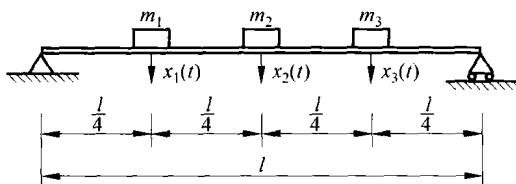


图 7.1 具有集中质量的梁

解: 利用邓克莱公式时,要用到的柔度影响系数为(见例 6.6)

$$a_{11} = a_{33} = \frac{3}{256} \frac{l^3}{EI}, \quad a_{22} = \frac{1}{48} \frac{l^3}{EI} \quad (\text{E.1})$$

由于 $m_1 = m_2 = m_3 = m$, 所以由式(7.3)得

$$\frac{1}{\omega_1^2} \simeq \left(\frac{3}{256} + \frac{1}{48} + \frac{3}{256} \right) \frac{ml^3}{EI} = 0.044\,27 \frac{ml^3}{EI}$$

$$\omega_1 \simeq 4.753\,75 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$$

此值与第一阶固有频率的准确值相近。

7.3 瑞利法

在第 2 章曾提到可以利用瑞利能量法求单自由度系统的固有频率,下面说明如何利用该方法求多自由度系统的第一阶固有频率。与单自由度的情况相同,瑞利(Rayleigh)法的

出发点仍然是利用能量守恒条件;但与单自由度情况不同的是,估算多自由度系统的第一阶固有频率时,需要假设第一阶振型。

7.3.1 瑞利第一商

以作用力方程为例,设系统的质量矩阵和刚度矩阵分别为 \mathbf{M} 和 \mathbf{K} ,则系统动能和势能的表达式分别为

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}} \\ V &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

为求固有频率,假设系统作简谐振动,即 $\mathbf{x} = \mathbf{A} \sin(\omega t + \phi)$ 。所以最大动能和最大势能分别为

$$\left. \begin{aligned} T_{\max} &= \frac{1}{2} \omega^2 \mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A} \\ V_{\max} &= \frac{1}{2} \mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A} \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

对于保守系统,由于能量守恒,则有 $T_{\max} = V_{\max}$ 。故可得

$$\omega^2 = \frac{\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A}}{\mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A}} \quad (7.7)$$

若 \mathbf{A} 是系统的第 i 阶主振型 $\mathbf{A}^{(i)}$,则由式(7.7)可得相应的固有频率的平方 ω_i^2 ;若 \mathbf{A} 是任意的 n 维矢量,则可得

$$R_1(\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A}}{\mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A}} \quad (7.8)$$

上式称为**瑞利第一商**。其值是否为系统某一阶固有频率的平方,取决于所取矢量 \mathbf{A} 。如果 \mathbf{A} 与某一阶主振型矢量接近,则所得瑞利商是相应的固有频率的近似值。实际上,对高阶振型很难做出合理的假设,而对于第一阶主振型则比较容易估计,所以此方法常用于求基频。下面进一步说明瑞利商的性质。

按照振型叠加原理,系统的任何可能位移,包括假设振型,都可以描述为各阶主振型的线性组合。现取假设振型 \mathbf{A} 是正则振型矢量的线性组合,即

$$\mathbf{A} = C_1 \mathbf{A}_N^{(1)} + C_2 \mathbf{A}_N^{(2)} + \cdots + C_n \mathbf{A}_N^{(n)} = \sum_{i=1}^n C_i \mathbf{A}_N^{(i)} = \mathbf{A}_N \mathbf{C} \quad (7.9)$$

式中, $\mathbf{C} = (C_1 \ C_2 \ \cdots \ C_n)^T$ 是组合系数的列矩阵,且为不全为零的常数。将式(7.9)代入式(7.8),得

$$R_1(\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{C}^T \mathbf{A}_N^T \mathbf{K} \mathbf{A}_N \mathbf{C}}{\mathbf{C}^T \mathbf{A}_N^T \mathbf{M} \mathbf{A}_N \mathbf{C}} = \frac{\mathbf{C}^T \mathbf{P}^2 \mathbf{C}}{\mathbf{C}^T \mathbf{I} \mathbf{C}} = \frac{\sum_{i=1}^n C_i^2 \omega_i^2}{\sum_{i=1}^n C_i^2}$$

如果假设振型 \mathbf{A} 与第 r 阶主振型比较接近, 则系数 C_r 比其他系数 $C_i (i \neq r)$ 都要大。此时上式可以写成

$$R_I(A) = \frac{C_r^2 \omega_r^2 + C_r^2 \sum_{\substack{i=1,2,\dots \\ i \neq r}}^n \left(\frac{C_i}{C_r}\right)^2 \omega_i^2}{C_r^2 + C_r^2 \sum_{\substack{i=1,2,\dots \\ i \neq r}}^n \left(\frac{C_i}{C_r}\right)^2} \quad (7.10)$$

由于 $|C_i/C_r| = \epsilon_i \ll 1 (i \neq r)$, 所以由式(7.10)得

$$R_I(A) = \omega_r^2 \{1 + O(\epsilon^2)\}$$

式中, $O(\epsilon^2)$ 代表 ϵ 二次以上的高阶项。对于 $r=1$ 的情况, 有

$$\begin{aligned} R_I(A) &= \frac{\omega_1^2 + \sum_{i=2,3,\dots}^n \left(\frac{C_i}{C_1}\right)^2 \omega_i^2}{\left\{1 + \sum_{i=2,3,\dots}^n \left(\frac{C_i}{C_1}\right)^2\right\}} \approx \omega_1^2 + \sum_{i=2,3,\dots}^n \epsilon_i^2 \omega_i^2 - \omega_1^2 \sum_{i=2,3,\dots}^n \epsilon_i^2 \\ &\approx \omega_1^2 + \sum_{i=2,3,\dots}^n (\omega_i^2 - \omega_1^2) \epsilon_i^2 \end{aligned}$$

由于一般地说, $\omega_i^2 > \omega_1^2 (i=2, 3, \dots)$, 所以上式表明瑞利商永远不会比第一阶固有频率的平方小, 即

$$R_I(A) \geq \omega_1^2$$

类似地还可以说明

$$R_I(A) \leq \omega_n^2$$

即瑞利商永远不会比最高阶固有频率的平方大。

通常情况下, 以系统的静变形作为假设振型, 就可以得到系统基频的比较好的近似。

7.3.2 瑞利第二商

如果采用位移方程描述系统的运动微分方程, 即

$$\Delta \mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

设系统的解是 $\mathbf{x} = \mathbf{A} \sin(\omega t + \phi)$, 将其代入上式, 可得到

$$\mathbf{A} = \omega^2 \Delta \mathbf{M} \mathbf{A}$$

上式两端前乘以 $\mathbf{A}^T \mathbf{M}$, 有

$$\mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A} = \omega^2 \mathbf{A}^T \mathbf{M} \Delta \mathbf{M} \mathbf{A}$$

解出

$$\omega^2 = \frac{\mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A}}{\mathbf{A}^T \mathbf{M} \Delta \mathbf{M} \mathbf{A}}$$

同理, 若 \mathbf{A} 是任意的 n 阶矢量, 则有

$$R_{II}(A) = \frac{\mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A}}{\mathbf{A}^T \mathbf{M} \Delta \mathbf{M} \mathbf{A}} \quad (7.11)$$

称为瑞利第二商。也可以证明,若假设振型接近于第一阶主振型时,则由式(7.11)计算的 $R_{II}(A)$ 是基频 ω_1^2 的近似值。另外,同一振动系统,给出同样的假设振型,可以证明用瑞利第二商 $R_{II}(A)$ 计算的结果,要比用瑞利第一商 $R_I(A)$ 计算的结果更精确一些。

例 7.2 用瑞利法求图 7.2 所示三自由度扭转系统的第一阶固有频率的估值。

解: 系统的质量矩阵、刚度矩阵和柔度矩阵分别为

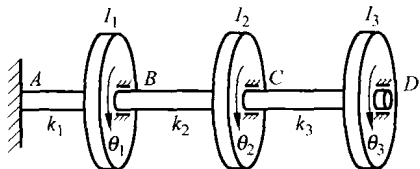


图 7.2 三自由度扭转振动系统

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = k \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

现分别用式(7.6)和式(7.11)求第一阶固有频率的估值。取假设振型

$$\mathbf{A} = (1 \quad 1 \quad 1)^T$$

计算得

$$\mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A} = 3I, \quad \mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A} = k, \quad \mathbf{A}^T \mathbf{M} \Delta \mathbf{M} \mathbf{A} = 14 \frac{I^2}{k}$$

于是

$$R_I(A) = 0.333 \frac{k}{I}, \quad R_{II}(A) = 0.214 \frac{k}{I}$$

在上面的计算中,假设振型比较“粗糙”,与该系统的第一阶固有频率精确到第4位的值 $\omega_1^2 = 0.198 \frac{k}{I}$ 比较误差较大。如果进一步改进假设振型,即以静变形曲线为假设振型,如设

$$\mathbf{A} = (3 \quad 5 \quad 6)^T$$

则

$$\mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A} = 70I, \quad \mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A} = 14k, \quad \mathbf{A}^T \mathbf{M} \Delta \mathbf{M} \mathbf{A} = 353 \frac{I^2}{k}$$

所以

$$R_I(A) = 0.200 \frac{k}{I}, \quad R_{II}(A) = 0.1983 \frac{k}{I}$$

显然,在工程上,若以静变形曲线作为假设振型,可以得到很好的第一阶固有频率的近似值。

7.4 霍尔茨法

霍尔茨(Holzer)法本质上是逐次逼近法,可以用来求无阻尼系统、阻尼系统、半正定系统、固定的或有分支的系统,也不管振动位移是线位移还是角位移。该方法也可以通过编程在计算机上实现。首先假设系统的一个固有频率,并以此为基础进行求解。当假设的频率满足系统的约束条件时,就可以停止计算。此方法通常需要几次试算。依赖于所选的试算频率,可利用此法求基频和高阶固有频率。此方法也能求主振型。

7.4.1 扭振系统

对图 7.3 所示的无阻尼半正定扭振系统,各盘的运动微分方程为

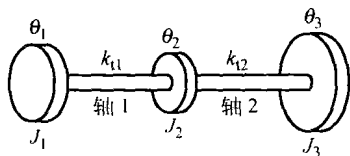


图 7.3 半正定扭振系统

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + k_{11}(\theta_1 - \theta_2) = 0 \quad (7.12)$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 + k_{11}(\theta_2 - \theta_1) + k_{12}(\theta_2 - \theta_3) = 0 \quad (7.13)$$

$$J_3 \ddot{\theta}_3 + k_{12}(\theta_3 - \theta_2) = 0 \quad (7.14)$$

由于假设系统的固有振动是简谐的,令式(7.12)~式(7.14)的解为 $\theta_i = \Theta_i \cos(\omega t + \phi)$,代入后得

$$\omega^2 J_1 \Theta_1 = k_{11}(\Theta_1 - \Theta_2) \quad (7.15)$$

$$\omega^2 J_2 \Theta_2 = k_{11}(\Theta_2 - \Theta_1) + k_{12}(\Theta_2 - \Theta_3) \quad (7.16)$$

$$\omega^2 J_3 \Theta_3 = k_{12}(\Theta_3 - \Theta_2) \quad (7.17)$$

把这些方程相加后得

$$\sum_{i=1}^3 \omega^2 J_i \Theta_i = 0 \quad (7.18)$$

方程(7.18)表明,半正定系统各盘的转动惯量的加权和必为零。该方程可以看成是频率方程的另一种形式。显然,频率的试算值也要满足这个条件。在霍尔茨法中,先假设一个试算频率,并令 $\Theta_1 = 1$,根据式(7.15)和式(7.16)得

$$\Theta_1 = 1 \quad (7.19)$$

$$\Theta_2 = \Theta_1 - \frac{\omega^2 J_1 \Theta_1}{k_{11}} \quad (7.20)$$

$$\Theta_3 = \Theta_2 - \frac{\omega^2}{k_{12}}(J_1 \Theta_1 + J_2 \Theta_2) \quad (7.21)$$

将这些值代到式(7.18)以验证是否满足。如果不满足,则重新试选,并重复以上过程。对于一个有 n 个圆盘的扭振系统,式(7.18)、式(7.20)和式(7.21)的形式为

$$\sum_{i=1}^n \omega^2 J_i \Theta_i = 0 \quad (7.22)$$

$$\Theta_i = \Theta_{i-1} - \frac{\omega^2}{k_{ti-1}} \left(\sum_{k=1}^{i-1} J_k \Theta_k \right), \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (7.23)$$

此时对不同的试选值,要不断地重复使用式(7.22)和式(7.23)。如果所选试算值不是系统的固有频率,就不会满足式(7.22)。式(7.22)左边的计算结果代表作用在最后一个圆盘上的扭矩。此式随 ω 的变化可用图形表示,如图7.4所示。由此可知,图中 $M_i=0$ 的点就对应着系统的固有频率。与某一固有频率对应的 $\Theta_i(i=1,2,\dots,n)$ 就是系统的主振型。

霍尔茨法也可以用于具有固定端的扭振系统。在固定端,振幅必为零。与上述过程类似,画出最后一个圆盘振幅随 ω 的变化就可以求得系统的固有频率。对于一端固定一端自由的扭振系统,式(7.23)可用来验证固定端圆盘的振幅是否为零。

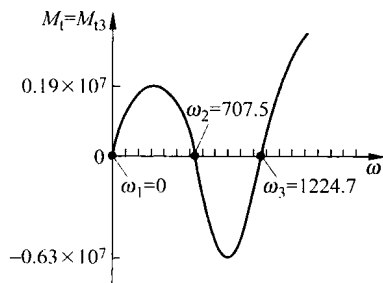


图 7.4 扭矩与频率的关系曲线

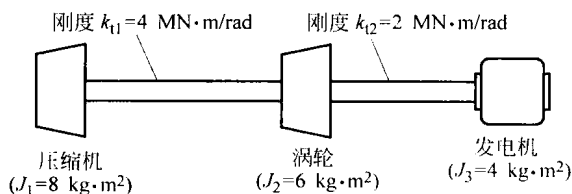


图 7.5 自由-自由扭振系统

例 7.3 图 7.5 所示轴盘扭振系统为热电厂中的压缩机-汽轮机-发电机系统的简图,求其固有频率和主振型。

解: 此系统可简化为一个两端自由的扭振系统。表 7.1 给出了系统参数和每一步计算

表 7.1 扭振系统参数和各类计算结果

系统参数	变 量	试 算 序 号					
		1	2	3	...	71	72
	ω	0	10	20		700	710
	ω^2	0	100	400		490 000	504 100
$J_1 = 8$	Θ_1	1.0	1.0	1.0		1.0	1.0
$k_{11} = 4 \times 10^6$	$M_{11} = \omega^2 J_1 \Theta_1$	0	800	3200		0.392×10^7	0.403×10^7
$J_2 = 6$	$\Theta_2 = 1 - \frac{M_{11}}{k_{11}}$	1.0	0.9998	0.9992		0.0200	-0.0082
$k_{12} = 2 \times 10^6$	$M_{12} = M_{11} + \omega^2 J_2 \Theta_2$	0	1400	5598		0.398×10^7	0.401×10^7
$J_3 = 4$	$\Theta_3 = \Theta_2 - \frac{M_{12}}{k_{12}}$	1.0	0.9991	0.9964		-1.9690	-2.0120
$k_{13} = 0$	$M_{13} = M_{12} + \omega^2 J_3 \Theta_3$	0	1800	7192		0.119×10^6	-0.494×10^5

的结果,固有频率的试选值分别为 $\omega=0, 10, 20, 700, 710$ 。 M_{13} 的值表示作用在发电机右侧的扭矩。对应于系统的某一阶固有频率,此值应为零。此值随 ω 的变化曲线如图 7.4 所示。在 $M_{13}=0$ 附近,固有频率的试选值取得较密,以期得到前两阶主振型(如图 7.6 所示)的较精确的近似。

7.4.2 弹簧-质量系统

霍尔茨法不仅适用于扭振系统,同样可以用于弹簧-质量系统(见图 7.7)的振动分析。弹簧-质量系统的运动微分方程可以表示为

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1(x_1 - x_2) = 0 \quad (7.24)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_1(x_2 - x_1) + k_2(x_2 - x_3) = 0 \quad (7.25)$$

...

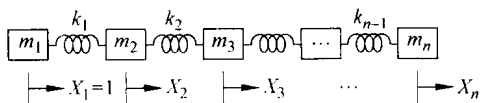


图 7.7 自由-自由弹簧-质量系统

由于假设自由振动是简谐的,即 $x_i(t) = X_i \cos \omega t$, 代入式(7.24)和式(7.25)后得

$$\omega^2 m_1 X_1 = k_1(X_1 - X_2) \quad (7.26)$$

$$\omega^2 m_2 X_2 = k_1(X_2 - X_1) + k_2(X_2 - X_3) = -\omega^2 m_1 X_1 + k_2(X_2 - X_3) \quad (7.27)$$

...

对于某个初选的频率 ω , 令 m_1 的振幅 $X_1=1$, 则由式(7.26)和式(7.27)得

$$X_2 = X_1 - \frac{\omega^2 m_1 X_1}{k_1} \quad (7.28)$$

$$X_3 = X_2 - \frac{\omega^2}{k_2}(m_1 X_1 + m_2 X_2) \quad (7.29)$$

$$X_i = X_{i-1} - \frac{\omega^2}{k_{i-1}} \left(\sum_{k=1}^{i-1} m_k X_k \right), \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (7.30)$$

与扭振系统的情况相同,作用在最后一个质量块上的合力为

$$F = \sum_{i=1}^n \omega^2 m_i X_i \quad (7.31)$$

对于不同的试选频率,重复以上过程,直到式(7.31)的结果与实际情况相符或接近。例如,当最后一个质量块为自由端时,应该满足 $F=0$ 。对于这种情况,比较方便的方法是作出 F

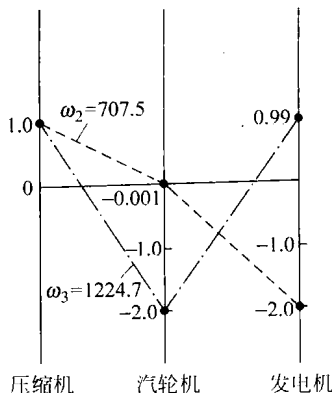


图 7.6 前两阶振型

随 ω 变化的曲线。曲线上纵坐标为零的点的横坐标就对应着系统的固有频率。

7.5 李兹法

邓克莱法与瑞利法只用于求系统的第一阶固有频率的近似值,如果要求系统的前几阶固有频率和主振型的近似值,可以利用李兹(Ritz)法。

李兹法是一种缩减系统自由度的近似解法。设有一个 n 自由度的系统,其物理坐标为 q_1, q_2, \dots, q_n , 记为列阵 \mathbf{q} , 采用李兹法时,可以利用下式将系统的自由度由 n 缩减为 n_1 ($n_1 < n$), 即令

$$\mathbf{q} = x_1 \boldsymbol{\psi}_1 + x_2 \boldsymbol{\psi}_2 + \dots + x_{n_1} \boldsymbol{\psi}_{n_1} = \boldsymbol{\psi} \mathbf{x} \quad (7.32)$$

其中, $\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \dots, \boldsymbol{\psi}_{n_1}$ 为任选的 n 维列阵; $\boldsymbol{\psi}$ 为以列阵 $\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \dots, \boldsymbol{\psi}_{n_1}$ 的元素为各列的 $n \times n_1$ 维矩阵; x_1, x_2, \dots, x_{n_1} 可以看成是 n_1 个新坐标, 它们可以记成列阵 \mathbf{x} 。式(7.32)可理解为把系统原来 n 个独立的坐标组成的列阵 \mathbf{q} 表示成 n_1 个列阵 $\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \dots, \boldsymbol{\psi}_{n_1}$ 的线性组合, 而各列阵的权系数是系统的 n_1 个新坐标。这样系统的自由度数就由原来的 n 个缩减为 n_1 个。采用新坐标 \mathbf{x} 后, 仍可利用拉格朗日方程来建立系统的运动微分方程。为此要计算系统的动能与势能, 在原坐标 \mathbf{q} 中, 系统的动能与势能分别为

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (7.33)$$

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (7.34)$$

式中, \mathbf{M}, \mathbf{K} 分别为原坐标中的 $n \times n$ 维的质量矩阵和刚度矩阵。根据坐标变换关系即式(7.32), 有

$$\dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\psi} \dot{\mathbf{x}} \quad (7.35)$$

因此动能和势能的表达式变成

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\psi} \dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M}^* \dot{\mathbf{x}} \quad (7.36)$$

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\psi} \mathbf{x} = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{K}^* \mathbf{x} \quad (7.37)$$

其中, $\mathbf{M}^* = \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}$, $\mathbf{K}^* = \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\psi}$ 为新坐标 \mathbf{x} 中的 $n_1 \times n_1$ 维质量矩阵和刚度矩阵。根据拉格朗日方程, 用新坐标 \mathbf{x} 描述的系统的运动微分方程为

$$\mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}^* \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (7.38)$$

令 $\mathbf{x} = \mathbf{A}^* \sin(\omega^* t + \varphi^*)$, 代入式(7.38)后得

$$(\mathbf{K}^* - \omega^{*2} \mathbf{M}^*) \mathbf{A}^* = \mathbf{0} \quad (7.39)$$

上式可求得 n_1 个固有频率 $\omega_1^*, \omega_2^*, \dots, \omega_{n_1}^*$ 和 n_1 个主振型 $\mathbf{A}^{*(1)}, \mathbf{A}^{*(2)}, \dots, \mathbf{A}^{*(n_1)}$ 。这 n_1 个固有频率 $\omega_1^*, \omega_2^*, \dots, \omega_{n_1}^*$ 可作为原系统 n 个固有频率中前 n_1 阶的近似值, 而系统的前 n_1 阶主振型可由下式近似:

$$\mathbf{A}^{(i)} = \boldsymbol{\psi} \mathbf{A}^{*(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n_1 \quad (7.40)$$

从上述过程不难看出,若选取的各列阵 $\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \dots, \boldsymbol{\psi}_{n_1}$ 恰好是系统的前 n_1 阶主振型 $\mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}^{(2)}, \dots, \mathbf{A}^{(n_1)}$,则求出的 $\omega_1^*, \omega_2^*, \dots, \omega_{n_1}^*$ 就是系统 n 个固有频率中的前 n_1 阶的精确值。由于在进行近似分析时,并不知道前 n_1 阶主振型,所以 $\omega_1^*, \omega_2^*, \dots, \omega_{n_1}^*$ 只能是系统 n 个固有频率中前 n_1 阶的近似。可以证明,恒有

$$\omega_i^* \geq \omega_i$$

通常在这 n_1 个近似值 $\omega_1^*, \omega_2^*, \dots, \omega_{n_1}^*$ 中,前面 $\frac{1}{2}n_1$ 或 $\frac{1}{2}(n_1+1)$ 个 ω_i^* 比较接近真实的 ω_i 值,而后面的 ω_i^* 误差比较大。所以若要求 n 自由度系统的前 S 阶固有频率和主振型的近似值,最好将系统的自由度数由 n 缩减到 $n_1 \geq 2S$ 个,这样才能保证所求结果的精度。

例 7.4 用李兹法求图 7.8 所示四自由度系统的前二阶固有频率及主振型。

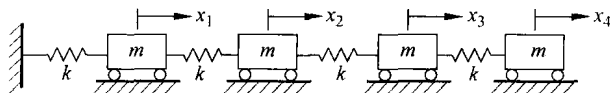


图 7.8 四自由度弹簧-质量系统

解: 系统的质量矩阵和刚度矩阵分别为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 & 0 \\ -k & 2k & -k & 0 \\ 0 & -k & 2k & -k \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix}$$

设振型为

$$\boldsymbol{\psi}_1 = (0.25 \quad 0.50 \quad 0.75 \quad 1.00)^T$$

$$\boldsymbol{\psi}_2 = (0.00 \quad 0.20 \quad 0.60 \quad 1.00)^T$$

则可求出 $\mathbf{M}^*, \mathbf{K}^*$ 分别为

$$\mathbf{M}^* = \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\psi} = m \begin{bmatrix} 1.88 & 1.55 \\ 1.55 & 1.40 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^* = \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\psi} = k \begin{bmatrix} 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.36 \end{bmatrix}$$

将 $\mathbf{M}^*, \mathbf{K}^*$ 代入式(7.39)得

$$\begin{vmatrix} 0.25k - 1.88m\omega^{*2} & 0.25k - 1.55m\omega^{*2} \\ 0.25k - 1.55m\omega^{*2} & 0.36k - 1.40m\omega^{*2} \end{vmatrix} = 0$$

以及

$$\begin{bmatrix} 0.25k - 1.88m\omega^{*2} & 0.25k - 1.55m\omega^{*2} \\ 0.25k - 1.55m\omega^{*2} & 0.36k - 1.40m\omega^{*2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{*(1)} \\ \mathbf{A}^{*(2)} \end{bmatrix} = 0$$

由以上二方程分别求出

$$\omega_1^{*2} = 0.12 \frac{k}{m}, \quad \omega_2^{*2} = \frac{k}{m}$$

和

$$\mathbf{A}^{*(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.38 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{*(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1.25 \end{pmatrix}$$

所以系统的前两阶主振型的近似为

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(1)} &= \boldsymbol{\psi} \mathbf{A}^{*(1)} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.00 \\ 0.50 & 0.20 \\ 0.75 & 0.60 \\ 1.00 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -0.38 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.42 \\ 0.52 \\ 0.62 \end{bmatrix} = 0.25 \begin{bmatrix} 1 \\ 1.68 \\ 2.08 \\ 2.48 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}^{(2)} &= \boldsymbol{\psi} \mathbf{A}^{*(2)} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.00 \\ 0.50 & 0.20 \\ 0.75 & 0.60 \\ 1.00 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1.25 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 0 \\ -0.25 \end{bmatrix} = 0.25 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

7.6 矩阵迭代法

矩阵迭代法, 亦称为**振型迭代法**, 是采用逐步逼近的方法来确定系统的主振型和频率。求系统的基频时, 矩阵迭代法用的基本方程是由位移方程得到的, 即

$$\left(\Delta \mathbf{M} - \frac{1}{\omega^2} \mathbf{I} \right) \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

或

$$\Delta \mathbf{M} \mathbf{A} = \frac{1}{\omega^2} \mathbf{A} \quad (7.41)$$

令

$$\mathbf{D} = \Delta \mathbf{M} \quad (7.42)$$

矩阵 \mathbf{D} 称为系统的动力矩阵。

7.6.1 用矩阵迭代法求第一阶固有频率和主振型

矩阵迭代法的过程是:

(1) 选取某个经过归一化的假设振型 \mathbf{A}_0 , 用动力矩阵 \mathbf{D} 前乘以假设振型 \mathbf{A}_0 , 然后归一化, 可得 \mathbf{A}_1 , 即

$$\mathbf{D} \mathbf{A}_0 = a_1 \mathbf{A}_1$$

(2) 如果 $\mathbf{A}_1 \neq \mathbf{A}_0$, 就再以 \mathbf{A}_1 为假设振型进行迭代, 并且归一化得到 \mathbf{A}_2 , 即

$$\mathbf{D} \mathbf{A}_1 = a_2 \mathbf{A}_2$$

(3) 若 $\mathbf{A}_2 \neq \mathbf{A}_1$, 则继续重复上述迭代步骤, 得

$$D\mathbf{A}_{k-1} = a_k \mathbf{A}_k$$

直至 $\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_{k-1}$ 时停止。此时 $a_k = \frac{1}{\omega_1^2}$, 而相应的特征矢量 \mathbf{A}_k 就是第一阶主振型, 即 $\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{A}_k$ 。

下面证明, 上述过程一定收敛于最低固有频率及第一阶主振型。根据振型展开定理, 任意的假设振型可以表示为各阶主振型的线性组合, 即

$$\mathbf{A}_0 = C_1 \mathbf{A}^{(1)} + C_2 \mathbf{A}^{(2)} + \cdots + C_n \mathbf{A}^{(n)} \quad (\text{A})$$

经过第一次迭代后, 即

$$\begin{aligned} D\mathbf{A}_0 &= D(C_1 \mathbf{A}^{(1)} + C_2 \mathbf{A}^{(2)} + \cdots + C_n \mathbf{A}^{(n)}) \\ &= C_1 D\mathbf{A}^{(1)} + C_2 D\mathbf{A}^{(2)} + \cdots + C_n D\mathbf{A}^{(n)} \end{aligned} \quad (\text{B})$$

由于主振型应满足式(4-26)的关系, 即

$$D\mathbf{A}^{(i)} = \frac{1}{\omega_i^2} \mathbf{A}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \cdots, n \quad (\text{C})$$

也即是每迭代一次等于在 $\mathbf{A}^{(i)}$ 之前乘以系数 $\frac{1}{\omega_i^2}$, 所以式(B)可写为

$$D\mathbf{A}_0 = C_1 \frac{1}{\omega_1^2} \mathbf{A}^{(1)} + C_2 \frac{1}{\omega_2^2} \mathbf{A}^{(2)} + \cdots + C_n \frac{1}{\omega_n^2} \mathbf{A}^{(n)} \quad (\text{D})$$

由于 $\omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_n$, 所以每迭代一次以后式(D)与式(A)的区别是, 各振型前的系数不一样, 经过一次迭代, 第一阶主振型的成分得到比其他主振型更大的加强, 反复迭代下去, 直到第一阶主振型成分占绝对优势为止, 此时即有

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{A}^{(1)}$$

并且

$$D\mathbf{A}_{k-1} = a_k \mathbf{A}_k = \frac{1}{\omega_1^2} \mathbf{A}^{(1)}$$

于是

$$a_k = \frac{1}{\omega_1^2} \quad (7.43)$$

从以上讨论可以看出, 尽管开始假设的振型不理想, 它包含了各阶主振型, 而且第一阶主振型在其中所占的分量不是很大。但在迭代过程中, 高阶振型的分量逐渐衰减, 低阶振型的分量逐渐增强, 最终收敛于第一阶主振型。假设振型越接近 $\mathbf{A}^{(1)}$, 则迭代过程收敛越快。假设振型与 $\mathbf{A}^{(1)}$ 相差较大, 则迭代过程收敛得就慢, 但最终仍然得到基频和第一阶主振型。

如果在整个迭代过程中, 第一阶主振型的分量始终为零, 则收敛于第二阶主振型; 如果前 s 阶主振型的分量为零, 则收敛于第 $s+1$ 阶主振型。

应当指出, 若用作用力方程进行迭代, 则收敛于最高阶固有频率和最高阶主振型。

例 7.5 用矩阵迭代法求例 7.2 所示系统的第一阶固有频率及主振型。

解: 由例 7.2 中计算的结果可得到动力矩阵

$$\mathbf{D} = \Delta \mathbf{M} = \frac{I}{k} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

取初始假设振型

$$\mathbf{A}_0 = (1 \quad 1 \quad 1)^T$$

进行迭代,经过第一次迭代后得

$$\mathbf{D}\mathbf{A}_0 = \frac{I}{k} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{I}{k} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{3I}{k} \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 1.6667 \\ 2.0000 \end{bmatrix} = \frac{3I}{k} \mathbf{A}_1$$

$$\mathbf{A}_1 = (1.0000 \quad 1.6667 \quad 2.0000)^T$$

第二次迭代后得

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\mathbf{A}_1 &= \frac{I}{k} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 1.6667 \\ 2.0000 \end{bmatrix} = \frac{I}{k} \begin{bmatrix} 4.6667 \\ 8.3344 \\ 10.3334 \end{bmatrix} \\ &= \frac{4.6667I}{k} \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 1.7858 \\ 2.2143 \end{bmatrix} = \frac{4.6667I}{k} \mathbf{A}_2 \end{aligned}$$

继续迭代下去,有

$$\mathbf{D}\mathbf{A}_2 = 5.0000 \frac{I}{k} \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 1.8000 \\ 2.2429 \end{bmatrix} = 5.0000 \frac{I}{k} \mathbf{A}_3$$

$$\mathbf{D}\mathbf{A}_3 = 5.0479 \frac{I}{k} \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 1.8017 \\ 2.2465 \end{bmatrix} = 5.0429 \frac{I}{k} \mathbf{A}_4$$

$$\mathbf{D}\mathbf{A}_4 = 5.0482 \frac{I}{k} \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 1.8019 \\ 2.2469 \end{bmatrix} = 5.0482 \frac{I}{k} \mathbf{A}_5$$

$$\mathbf{D}\mathbf{A}_5 = 5.0488 \frac{I}{k} \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 1.8019 \\ 2.2470 \end{bmatrix} = 5.0488 \frac{I}{k} \mathbf{A}_6$$

$$\mathbf{D}\mathbf{A}_6 = 5.0489 \frac{I}{k} \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 1.8019 \\ 2.2470 \end{bmatrix} = 5.0489 \frac{I}{k} \mathbf{A}_7$$

由于

$$\mathbf{A}_7 = \mathbf{A}_6$$

所以

$$\frac{1}{\omega_1^2} = 5.0489 \frac{I}{k}, \quad \omega_1^2 = 0.1980 \frac{k}{I}$$

与之对应的第一阶主振型为

$$\mathbf{A}^{(1)} = (1.0000 \quad 1.8019 \quad 2.2470)^T$$

7.6.2 用矩阵迭代法求较高阶的固有频率及主振型

当需用矩阵迭代法求第二阶、第三阶等高频频率及振型时,其关键步骤是要在所设振型中消去较低阶主振型的成分。如由展开定理

$$\mathbf{A} = C_1 \mathbf{A}^{(1)} + C_2 \mathbf{A}^{(2)} + \cdots + C_n \mathbf{A}^{(n)}$$

其中

$$C_i = \frac{(\mathbf{A}^{(i)})^T \mathbf{M} \mathbf{A}}{(\mathbf{A}^{(i)})^T \mathbf{M} \mathbf{A}^{(i)}} = \frac{(\mathbf{A}^{(i)})^T \mathbf{M} \mathbf{A}^{(i)}}{M_i}$$

如果要在 \mathbf{A} 中消去 $\mathbf{A}^{(1)}$ 的成分,则只需取假设振型为

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - C_1 \mathbf{A}^{(1)} &= \mathbf{A} - \mathbf{A}^{(1)} \frac{(\mathbf{A}^{(1)})^T \mathbf{M} \mathbf{A}}{M_1} \\ &= \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{A}^{(1)} (\mathbf{A}^{(1)})^T \mathbf{M}}{M_1} \right) \mathbf{A} = \mathbf{Q}_1 \mathbf{A} \end{aligned}$$

其中

$$\mathbf{Q}_1 = \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{A}^{(1)} (\mathbf{A}^{(1)})^T \mathbf{M}}{M_1} \right) \quad (7.44)$$

称为清除矩阵。用 $\mathbf{Q}_1 \mathbf{A}$ 进行迭代,则可求得第二阶固有频率和主振型。

如果在假设振型中消去前 P 阶主振型成分,则需取新的假设振型为

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - \sum_{j=1}^P C_j \mathbf{A}^{(j)} &= \mathbf{A} - \sum_{j=1}^P \mathbf{A}^{(j)} \frac{(\mathbf{A}^{(j)})^T \mathbf{M} \mathbf{A}}{M_j} \\ &= \left(\mathbf{I} - \sum_{j=1}^P \frac{\mathbf{A}^{(j)} (\mathbf{A}^{(j)})^T \mathbf{M}}{M_j} \right) \mathbf{A} = \mathbf{Q}_P \mathbf{A} \end{aligned} \quad (7.45)$$

其中

$$\mathbf{Q}_P = \mathbf{I} - \sum_{j=1}^P \frac{\mathbf{A}^{(j)} (\mathbf{A}^{(j)})^T \mathbf{M}}{M_j} \quad (7.46)$$

称为前 P 阶清除矩阵。应用 $\mathbf{Q}_P \mathbf{A}$ 作为假设振型进行迭代,将得到第 $P+1$ 阶固有频率及主振型。

应当注意到,在运算中不可避免地存在舍入误差,即在迭代过程中难免会引入一些低阶主振型分量,所以在每一次迭代前都必须重新进行清除运算。实际上,可以把迭代运算和清除低阶振型运算合并在一起,即将清除矩阵并入动力矩阵 \mathbf{D} 中去。并入原理如下:

$$\mathbf{D} \mathbf{A} = \mathbf{D} (C_1 \mathbf{A}^{(1)} + C_2 \mathbf{A}^{(2)} + \cdots + C_n \mathbf{A}^{(n)})$$

因为

$$DA^{(1)} = \frac{1}{\omega_1^2} A^{(1)}, \quad DA^{(i)} = \frac{1}{\omega_i^2} A^{(i)}$$

所以

$$DA = \frac{C_1}{\omega_1^2} A^{(1)} + \frac{C_2}{\omega_2^2} A^{(2)} + \cdots + \frac{C_n}{\omega_n^2} A^{(n)}$$

从 DA 中清除 $A^{(1)}$, 即

$$DA - \frac{C_1}{\omega_1^2} A^{(1)} = DA - \frac{A^{(1)}(A^{(1)})^T M}{M_1 \omega_1^2} A = \left(D - \frac{A^{(1)}(A^{(1)})^T M}{M_1 \omega_1^2} \right) A$$

令

$$D^* = D - \frac{A^{(1)}(A^{(1)})^T M}{M_1 \omega_1^2} \quad (7.47)$$

称之为已含清除矩阵的新动力矩阵。用矩阵 D^* 进行迭代将得到第二阶主振型及第二阶固有频率。因此, 包含前 P 阶清除矩阵的动力矩阵为

$$D^* = D - \sum_{j=1}^P \frac{A^{(j)}(A^{(j)})^T M}{M_j \omega_j^2} \quad (7.48)$$

例 7.6 用矩阵迭代法求例 7.5 系统中的第二阶固有频率及主振型。

解: 在例 7.5 中, 用矩阵迭代法已求出系统的第一阶固有频率和主振型分别为

$$\omega_1^2 = 0.1980 \frac{k}{I}, \quad A^{(1)} = (1.0000 \quad 1.8019 \quad 2.2470)^T$$

于是, 可计算出

$$M_1 = (A^{(1)})^T M A^{(1)} = 9.2959 I$$

$$A^{(1)}(A^{(1)})^T M = I \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.8019 & 2.2479 \\ 1.8019 & 3.2468 & 4.0489 \\ 2.2479 & 4.0489 & 5.0490 \end{bmatrix}$$

由式(7.47)得到含清除矩阵的动力矩阵为

$$D^* = D - \frac{A^{(1)}(A^{(1)})^T M}{M_1 \omega_1^2} = \frac{I}{k} \begin{bmatrix} 0.4567 & 0.2010 & -0.2208 \\ 0.2010 & 0.2359 & -0.1998 \\ -0.2208 & -0.1998 & 0.2569 \end{bmatrix}$$

选取初始假设振型 $A_0^{(2)} = (1 \quad 1 \quad -1)^T$, 经过 12 次迭代后, 得到

$$\omega_2^2 = 1.5552 \frac{k}{I}, \quad A^{(2)} = (1.0000 \quad 0.4452 \quad -0.8020)^T$$

7.7 雅可比法

矩阵迭代法每一次只能求得矩阵 D 的一个特征值及其相应的特征向量, 而利用雅可比 (Jacobi) 法却能够同时得到 D 的全部特征值和特征向量 ($D = [d_{ij}]$ 为 $n \times n$ 的实对称矩阵)。

根据线性代数理论,一个实对称矩阵 \mathbf{D} 只有实特征值,并且存在实正交矩阵 \mathbf{R} ,使得 $\mathbf{R}^T \mathbf{D} \mathbf{R}$ 为对角阵,对角线上的元素就是矩阵 \mathbf{D} 的特征值,而 \mathbf{R} 的各列就是 \mathbf{D} 的各阶特征向量。根据雅可比法,矩阵 \mathbf{R} 可以通过下列形式的旋转矩阵的乘积得到:

$$\mathbf{R}_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{第 } i \text{ 列} & \text{第 } j \text{ 列} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{第 } i \text{ 行} \\ \text{第 } j \text{ 行} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \cos \theta & -\sin \theta \\ & & & \sin \theta & \cos \theta \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

式中,不在第 i, j 行和第 i, j 列的元素与单位矩阵的相应元素相同。如果 $\sin \theta$ 和 $\cos \theta$ 项出现在 $(i, i), (i, j), (j, i)$ 和 (j, j) 位置,则 $\mathbf{R}_1^T \mathbf{D} \mathbf{R}_1$ 的相应元素为

$$\underline{d}_{ii} = d_{ii} \cos^2 \theta + 2d_{ij} \sin \theta \cos \theta + d_{jj} \sin^2 \theta \quad (7.49)$$

$$\underline{d}_{ij} = \underline{d}_{ji} = (d_{ij} - d_{ii}) \sin \theta \cos \theta + d_{ij} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (7.50)$$

$$\underline{d}_{jj} = d_{jj} \sin^2 \theta - 2d_{ij} \sin \theta \cos \theta + d_{ii} \cos^2 \theta \quad (7.51)$$

如果选择 θ ,使满足

$$\tan 2\theta = \frac{2d_{ij}}{d_{ii} - d_{jj}} \quad (7.52)$$

则 $\underline{d}_{ij} = \underline{d}_{ji} = 0$ 。这样,雅可比法的每一步就能够使一对非对角线元素化为零。但是,接下去的一步又会使已经化为零的非对角线元素不再为零。不过,下列矩阵序列

$$\mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_1^T \mathbf{D} \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2, \quad \mathbf{R}_3^T \mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_1^T \mathbf{D} \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3, \quad \dots$$

将收敛于期望的对角形式,最终的矩阵 \mathbf{R} 的各列就是特征向量,其形式如下:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3 \dots \quad (7.53)$$

例 7.7 用雅可比法求下列矩阵的特征值和特征向量:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

解: 先从最大的非对角线元素 $d_{23} = 2$ 开始,使其成为零。根据式(7.52),有

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \arctan \frac{2d_{23}}{d_{22} - d_{33}} = \frac{1}{2} \arctan \frac{4}{2 - 3} = -37.981\,878^\circ$$

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.788\,205\,4 & 0.615\,412\,2 \\ 0.0 & -0.615\,412\,2 & 0.788\,205\,4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}' = \mathbf{R}_1^T \mathbf{D} \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.172\,793\,2 & 1.403\,617\,6 \\ 0.172\,793\,2 & 0.438\,447\,2 & 0.0 \\ 1.403\,617\,6 & 0.0 & 4.561\,552\,5 \end{bmatrix}$$

接下来再选 \mathbf{D}' 的最大非对角线元素 $d'_{13} = 1.403\,617\,6$, 使其成为零。根据式(7.52), 有

$$\theta_2 = \frac{1}{2} \arctan \frac{2d'_{13}}{d'_{11} - d'_{33}} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2.807\,235\,2}{1.0 - 4.561\,552\,5} = -19.122\,686^\circ$$

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 0.944\,819\,3 & 0.0 & 0.327\,592\,0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ -0.327\,592\,0 & 0.0 & 0.944\,819\,3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}'' = \mathbf{R}_2^T \mathbf{D}' \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 0.513\,331\,3 & 0.163\,258\,4 & 0.0 \\ 0.163\,258\,4 & 0.438\,447\,2 & 0.056\,605\,7 \\ 0.0 & 0.056\,605\,7 & 5.048\,221\,1 \end{bmatrix}$$

\mathbf{D}'' 的最大非对角线元素为 $d''_{12} = 0.163\,258\,4$ 。根据式(7.52), 有

$$\theta_3 = \frac{1}{2} \arctan \frac{2d''_{12}}{d''_{11} - d''_{22}} = \frac{1}{2} \arctan \frac{0.326\,516\,7}{0.513\,331\,3 - 0.438\,447\,2} = 38.541\,515^\circ$$

$$\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 0.782\,156\,9 & -0.623\,081\,5 & 0.0 \\ 0.623\,081\,5 & 0.782\,156\,9 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}''' = \mathbf{R}_3^T \mathbf{D}'' \mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 0.643\,386\,1 & 0.0 & 0.035\,269\,9 \\ 0.0 & 0.308\,392\,4 & 0.044\,274\,5 \\ 0.035\,269\,9 & 0.044\,274\,5 & 5.048\,221\,1 \end{bmatrix}$$

至此, 可以认为 \mathbf{D}''' 的非对角线元素都已接近零, 从而停止迭代。 \mathbf{D}''' 的对角线元素给出各阶特征值($1/\omega^2$)分别为 0.643 386 1, 0.308 392 4 和 5.048 221 1。相应的各阶特征向量由下列矩阵的各列给出:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 0.738\,996\,9 & -0.588\,699\,4 & 0.327\,592\,0 \\ 0.333\,430\,1 & 0.742\,116\,0 & 0.581\,453\,3 \\ -0.585\,412\,5 & -0.320\,463\,1 & 0.744\,711\,6 \end{bmatrix}$$

上述过程还可继续, 以期得到更精确的结果。不难看出, 上面所得特征值的近似值与精确值 0.643 104 1, 0.307 978 6 和 5.048 917 3 是很接近的。

7.8 子空间迭代法

将矩阵迭代法与李兹法结合起来, 可以得到一种新的计算方法, 即子空间迭代法。它对求解自由度数较大系统的前若干阶较低的固有频率及主振型非常有效。

计算系统的前 P 阶固有频率和主振型时, 按照李兹法, 可假设 s 个振型且 $s > P$ 。将这

些假设振型排列成 $n \times s$ 阶矩阵,即

$$\mathbf{A}_0 = [\boldsymbol{\psi}_1 \quad \boldsymbol{\psi}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\psi}_s]$$

其中,每个 $\boldsymbol{\psi}$ 都包含有前 P 阶振型的成分,同时也包含有高阶振型的成分。为了提高李兹法求得的振型和频率的精确度,将 \mathbf{A}_0 代入动力矩阵表达式(7.42)中进行迭代,并对各列阵分别归一化后得

$$\boldsymbol{\psi}_1 = \Delta \mathbf{M} \mathbf{A}_0 \quad (7.54)$$

这样做的目的是使 $\boldsymbol{\psi}_1$ 比 \mathbf{A}_0 含有较强的低阶振型成分,缩小高阶成分。但如果继续用 $\boldsymbol{\psi}_1$ 进行迭代,所有各阶振型即 $\boldsymbol{\psi}$ 的各列都将趋于 $\mathbf{A}^{(1)}$ 。为了避免这一点,可以在迭代过程中进行振型的正交化。然后再用 $\boldsymbol{\psi}_1$ 作为假设振型,按李兹法求解,即求广义质量矩阵和广义刚度矩阵:

$$\mathbf{M}_1^* = \boldsymbol{\psi}_1^T \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_1 \quad (7.55)$$

$$\mathbf{K}_1^* = \boldsymbol{\psi}_1^T \mathbf{K} \boldsymbol{\psi}_1 \quad (7.56)$$

再由李兹法求特征值问题,即求解方程

$$\mathbf{K}_1^* \mathbf{A}_1^* = \omega^{*2} \mathbf{M}_1^* \mathbf{A}_1^* \quad (7.57)$$

得到 s 个 ω^2 值及对应的特征矢量 \mathbf{A}_1^* ,从而由下式求出 \mathbf{A}_1 :

$$\mathbf{A}_1 = \boldsymbol{\psi}_1 \mathbf{A}_1^* \quad (7.58)$$

然后,再以求出的 \mathbf{A}_1 作为假设振型进行迭代,可求得

$$\boldsymbol{\psi}_{II} = \Delta \mathbf{M} \mathbf{A}_1 \quad (7.59)$$

根据同样的过程,由李兹法得到 s 个 ω^2 值及对应的特征矢量:

$$\mathbf{A}_{II} = \boldsymbol{\psi}_{II} \mathbf{A}_{II}^* \quad (7.60)$$

不断地重复矩阵迭代法和李兹法的过程,直到某次结果与上一次结果比较接近,达到了所需精度。

子空间迭代法是对一组假设振型反复地使用矩阵迭代法和李兹法的运算。从几何观点上看,原 n 阶特征值系统有 n 个线性无关的特征矢量 $\mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}^{(2)}, \dots, \mathbf{A}^{(n)}$,它们之间是正交的,张成一个 n 维空间。而假设的 s 个线性无关的 n 维矢量 $\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \dots, \boldsymbol{\psi}_s$ 张成一个 s 维子空间,迭代的功能是使这 s 个矢量的低阶成分不断地相对放大,即向 $\mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}^{(2)}, \dots, \mathbf{A}^{(s)}$ 张成的子空间靠拢。如果只迭代不进行正交化,最后这 s 个矢量将指向同一方向,即 $\mathbf{A}^{(1)}$ 的方向。由于用李兹法作了正交处理,则这些矢量不断旋转,最后分别指向前 s 个特征矢量的方向,即由 $\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \dots, \boldsymbol{\psi}_s$ 张成的一个 s 维子空间,经反复地迭代,正交化地旋转而逼近于由 $\mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}^{(2)}, \dots, \mathbf{A}^{(s)}$ 所张成的子空间。

在实践中发现,最低的几阶振型一般收敛很快,经过 2~3 次迭代便已稳定在某一结果。在以后的迭代中不能使这几个低阶振型值的精度进一步提高,只是随着迭代次数的增加,将有越来越多的低阶振型值稳定下来。所以,在计算时要多取几个假设振型,如果需求前 P 个振型,则假设振型的个数 s 一般应在 $2P$ 与 $2P+7$ 之间。

子空间迭代法有很大的优点,它可以有效地克服由于等固有频率或几个频率非常接近

时收敛速度慢的困难。同时,在大型复杂结构的振动分析中,系统的自由度数目可达几百甚至上千,但是,实际需用的固有频率与主振型只是最低的三四十个,通常对此系统要进行坐标缩聚。与其他方法相比,子空间迭代法具有精度高和可靠的优点。因此,它已成为大型复杂结构振动分析的最有效的方法之一。

例 7.8 用子空间迭代法求例 7.4 中所示系统的前二阶固有频率及主振型。

解: 系统的质量矩阵、刚度矩阵和柔度矩阵已在例 7.4 中求出。

现取假设振型

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0.250 & 0.250 & 0.750 & 1.000 \\ 1.000 & 1.000 & 0.000 & -0.900 \end{bmatrix}^T$$

由动力矩阵迭代得到

$$\Delta \mathbf{M} \mathbf{A}_0 = \frac{m}{k} \begin{bmatrix} 2.500 & 4.750 & 6.500 & 7.500 \\ 1.100 & 1.200 & 0.300 & -0.600 \end{bmatrix}^T$$

将各列分别归一化得

$$\boldsymbol{\psi}_1 = \begin{bmatrix} 0.3333 & 0.6333 & 0.8667 & 1.0000 \\ 0.9167 & 1.0000 & 0.2500 & -0.5000 \end{bmatrix}^T$$

求得 \mathbf{M}_1^* 和 \mathbf{K}_1^* 分别为

$$\mathbf{M}_1^* = \boldsymbol{\psi}_1^T \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_1 = m \begin{bmatrix} 2.2633 & 0.6556 \\ 0.6556 & 0.1528 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_1^* = \boldsymbol{\psi}_1^T \mathbf{K} \boldsymbol{\psi}_1 = k \begin{bmatrix} 0.2733 & 0.0556 \\ 0.0556 & 1.9722 \end{bmatrix}$$

再由李兹法得特征值问题为

$$(\mathbf{K}_1^* - \omega^2 \mathbf{M}_1^*) \mathbf{A}_1^* = \mathbf{0}$$

即

$$\begin{bmatrix} 0.2733 - 2.3633\alpha & 0.0556 - 0.6556\alpha \\ 0.0556 - 0.6556\alpha & 1.9722 - 2.1528\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^* \\ A_2^* \end{bmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中, $\alpha = \frac{m\omega^2}{k}$ 。由上述方程有非零解的条件,得频率方程为

$$4.4427\alpha^2 - 4.9794\alpha + 0.5360 = 0$$

解出

$$\alpha_1 = 0.1206, \quad \alpha_2 = 1.0002$$

相应的主振型为

$$\mathbf{A}_1^{*(1)} = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.0137 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_1^{*(2)} = \begin{pmatrix} -0.3015 \\ 1.0000 \end{pmatrix}$$

所以

$$\psi_I A_I^* = \begin{bmatrix} 0.3333 & 0.9167 \\ 0.6333 & 1.0000 \\ 0.8667 & 0.2500 \\ 1.0000 & -0.5000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.3015 \\ 0.0137 & 1.0000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3459 & 0.8162 \\ 0.6472 & 0.8090 \\ 0.8701 & -0.0113 \\ 0.9931 & -0.8015 \end{bmatrix}$$

各列分别归一化后,得

$$A_I = \begin{bmatrix} 0.3483 & 0.6515 & 0.8761 & 1.0000 \\ 1.0000 & 0.9913 & -0.0139 & -0.9820 \end{bmatrix}^T$$

重复上述过程进行第二次迭代。由

$$\Delta M A_I = \frac{m}{k} \begin{bmatrix} 2.8760 & 5.4036 & 7.2798 & 8.2798 \\ 0.9954 & 0.9980 & -0.0051 & -0.9871 \end{bmatrix}^T$$

归一化后得

$$\psi_{II} = \begin{bmatrix} 0.3473 & 0.6526 & 0.8792 & 1.0000 \\ 1.0000 & 0.9954 & -0.0051 & -0.9917 \end{bmatrix}^T$$

则有

$$M_{II}^* = \psi_{II}^T M \psi_{II} = m \begin{bmatrix} 2.2196 & 0.0007 \\ 0.0007 & 2.9743 \end{bmatrix}$$

$$K_{II}^* = \psi_{II}^T K \psi_{II} = k \begin{bmatrix} 0.2788 & 0.0001 \\ 0.0001 & 2.9744 \end{bmatrix}$$

由

$$(K_{II}^* - \omega^2 M_{II}^*) A_{II}^* = 0$$

即

$$\begin{bmatrix} 2.2798 - 2.3196\alpha & 0.0001 - 0.0007\alpha \\ 0.0001 - 0.0007\alpha & 2.9744 - 2.9743\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1^* \\ A_2^* \end{Bmatrix}_{II} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

得频率方程为

$$6.8991\alpha^2 - 7.7315\alpha + 0.8321 = 0$$

解得

$$\alpha_1 = 0.1206, \quad \alpha_2 = 1.0000$$

相应的主振型为

$$A_{II}^{*(1)} = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.0001 \end{pmatrix}, \quad A_{II}^{*(2)} = \begin{pmatrix} -0.0003 \\ 1.0000 \end{pmatrix}$$

$$\psi_{II} A_{II}^* = \begin{bmatrix} 0.3473 & 1.0000 \\ 0.6526 & 0.9954 \\ 0.8792 & -0.0051 \\ 1.0000 & -0.9917 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.0003 \\ 0.0001 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

由于 A_{II}^* 近似于单位矩阵,所以有

$$\mathbf{A}_{\parallel} = \boldsymbol{\psi}_{\parallel} \mathbf{A}_{\parallel}^* = \boldsymbol{\psi}_{\parallel}$$

本次迭代的结果(两个固有频率和主振型 \mathbf{A}_{\parallel})与第一次迭代的结果已相差不大,所以可以结束迭代。故系统的前二阶固有频率及相应的主振型的近似分别为

$$\omega_1^2 = 0.1206 \frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{k}{m}$$

$$\mathbf{A}^{(1)} = (0.3473 \quad 0.6526 \quad 0.8792 \quad 1.0000)^T$$

$$\mathbf{A}^{(2)} = (1.0000 \quad 0.9954 \quad -0.0051 \quad 0.9917)^T$$

7.9 标准特征值问题

在以前各章,特征值问题被描述为

$$\mathbf{k}\mathbf{X} = \omega^2 \mathbf{m}\mathbf{X} \quad (7.61)$$

上式可以重新写成如下标准特征值问题的形式^[7.19]

$$\mathbf{D}\mathbf{X} = \lambda \mathbf{X} \quad (7.62)$$

式中,

$$\mathbf{D} = \mathbf{k}^{-1} \mathbf{m} \quad (7.63)$$

和

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2} \quad (7.64)$$

一般来说,尽管矩阵 \mathbf{k} 和 \mathbf{m} 都是对称的,但矩阵 \mathbf{D} 是非对称的。由于雅可比方法(在 7.7 节已介绍)只适于对称矩阵 \mathbf{D} ,我们可以采取如下步骤来得到非对称矩阵 \mathbf{D} 的标准特征值问题。

假设矩阵 \mathbf{k} 是对称的,并且是正定的。利用切比雪夫(Chebyshev)分解(见 7.9.1 节),可得

$$\mathbf{k} = \mathbf{U}^T \mathbf{U} \quad (7.65)$$

式中, \mathbf{U} 是上三角矩阵。利用这个关系,特征值问题(7.61)可以写成

$$\lambda \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{X} = \mathbf{m} \mathbf{X} \quad (7.66)$$

上式两边左乘 $(\mathbf{U}^T)^{-1}$, 得

$$\lambda \mathbf{U} \mathbf{X} = (\mathbf{U}^T)^{-1} \mathbf{m} \mathbf{X} = (\mathbf{U}^T)^{-1} \mathbf{m} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{U} \mathbf{X} \quad (7.67)$$

定义一个新的矢量 \mathbf{Y} 为

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U} \mathbf{X} \quad (7.68)$$

则式(7.67)可以重新写成如下标准特征值问题:

$$\mathbf{D} \mathbf{Y} = \lambda \mathbf{Y} \quad (7.69)$$

式中,

$$\mathbf{D} = (\mathbf{U}^T)^{-1} \mathbf{m} \mathbf{U}^{-1} \quad (7.70)$$

所以,为了根据式(7.70)确定矩阵 \mathbf{D} ,需要首先像(7.65)那样将对称矩阵 \mathbf{k} 进行分解,再求 \mathbf{U}^{-1} 和 $(\mathbf{U}^T)^{-1} = (\mathbf{U}^{-1})^T$,这将在接下来的 7.9.1 节介绍。最后如式(7.70)那样作矩阵乘法。形如式(7.69)的标准特征值问题的解为 λ_i 和 $\mathbf{Y}^{(i)}$ 。再利用逆变换就可以得到所期望的特征值:

$$\mathbf{X}^{(i)} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{Y}^{(i)} \quad (7.71)$$

7.9.1 切比雪夫(Chebyshev)分解

任何对称的 $n \times n$ 阶正定矩阵 \mathbf{A} 都可以唯一地分解为如下形式^[7.20]:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}^T \mathbf{U} \quad (7.72)$$

式中, \mathbf{U} 是如下形式的上三角矩阵:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \quad (7.73)$$

且

$$\begin{cases} u_{11} = (a_{11})^{1/2} \\ u_{1j} = \frac{a_{1j}}{u_{11}}, \quad j = 2, 3, \cdots, n \\ u_{ij} = \frac{1}{u_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} u_{kj} \right), \quad i = 2, 3, \cdots, n \text{ 和 } j = i+1, i+2, \cdots, n \\ u_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^2 \right)^{1/2}, \quad i = 2, 3, \cdots, n \\ u_{ij} = 0, \quad i > j \end{cases} \quad (7.74)$$

如果上三角矩阵 \mathbf{U} 的逆矩阵记为 $[\alpha_{ij}]$,则可以根据下列关系确定其元素:

$$\mathbf{U}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{I} \quad (7.75)$$

由上式得

$$\begin{cases} \alpha_{ii} = \frac{1}{u_{ii}} \\ \alpha_{ij} = -\frac{1}{u_{ii}} \left(\sum_{k=i+1}^j u_{ik} \alpha_{kj} \right), \quad i < j \\ \alpha_{ij} = 0, \quad i > j \end{cases} \quad (7.76)$$

所以一个上三角矩阵的上三角矩阵还是上三角矩阵。

例 7.9 将下列矩阵分解成式(7.72)的形式:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

解: 由式(7.74)得

$$u_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{5} = 2.236\ 068\ 0$$

$$u_{12} = a_{12}/u_{11} = 1/2.236\ 068 = 0.447\ 213\ 6$$

$$u_{13} = a_{13}/u_{11} = 0$$

$$u_{22} = (a_{22}/u_{12}^2)^{1/2} = (3 - 0.447\ 213\ 6^2)^{1/2} = 1.673\ 320\ 1$$

$$u_{33} = (a_{33} - u_{13}^2 - u_{23}^2)^{1/2}$$

式中,

$$u_{23} = (a_{23} - u_{12}u_{13})/u_{22} = (2 - 0.447\ 213\ 6 \times 0)/1.673\ 320\ 1 = 1.195\ 228\ 6$$

$$u_{33} = (8 - 0^2 - 1.195\ 228\ 6^2)^{1/2} = 2.563\ 479\ 9$$

由于 $u_{ii}=0$ 对 $i>j$, 所以有

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2.236\ 068\ 0 & 0.447\ 213\ 6 & 0.0 \\ 0.0 & 1.673\ 320\ 1 & 1.195\ 228\ 6 \\ 0.0 & 0.0 & 2.563\ 479\ 9 \end{bmatrix}$$

7.9.2 其他解法

为了求特征值问题的数值解,已经发展了一些方法^[7.18,7.21]。巴斯(Bathe)和威尔逊(Wilson)^[7.22]对这些方法进行了比较研究。最近一段时间,此方面的研究重点是大型特征值问题的实用解^[7.23,7.24]。在文献[7.25]和[7.26]中,给出了如何利用 Sturm 序列对固有频率进行估算。另一种解决一类具有集中参数的机械振动问题的拓扑方法可以参阅文献[7.27]。

7.10 利用 MATLAB 求解的例子

例 7.10 用 MATLAB 求下列矩阵的特征值和特征向量:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

解: 在 MATLAB 的指令窗口(command window)直接输入矩阵和求解特征问题的指令即可,不用编程。显示结果如下:

```
>> A=[3 -1 0; -2 4 -3; 0 -1 1]
```



```

A=
     3     -1     0
    -2      4    -3
     0     -1     1
>> [V, D]= eig(A)
V=
   -0.3665   -0.8305    0.2262
    0.9080   -0.4584    0.6616
   -0.2028    0.3165    0.7149
D=
    5.4774         0         0
         0    2.4481         0
         0         0    0.0746
>>

```

例 7.11 编写一个命名为 Program9.m 的 MATLAB 程序, 利用雅可比法求下列对称矩阵的特征值和特征向量:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

解: 程序 Program9.m 中要用到以下数据:

n ——矩阵的阶数

d ——给定的 $n \times n$ 矩阵

eps ——收敛判据, 10^{-5} 量级的一个小量

itmax ——允许的最大迭代次数

程序的执行结果如下:

```

>> program9
Eigenvalue solution by Jacobi Method
Given matrix
    1.00000000e+000    1.00000000e+000    1.00000000e+000
    1.00000000e+000    2.00000000e+000    2.00000000e+000
    1.00000000e+000    2.00000000e+000    3.00000000e+000

Eigen values are
    5.04891734e+000    6.43104132e-001    3.07978528e-001

Eigen vectors are
      First              Second              Third
    3.27984948e-001    -7.36976229e-001    5.91009231e-001

```

```

5.91009458e-001      -3.27985278e-001      -7.36975900e-001
7.36976047e-001      5.91009048e-001      3.27985688e-001

```

例 7.12 编写一个命名为 Program10.m 的 MATLAB 程序,利用矩阵迭代法求例 7.11 中矩阵 A 的特征值和特征向量。

解: 程序 Program10.m 中要用到以下数据:

n ——矩阵的阶数

d ——给定的 $n \times n$ 矩阵

xs ——初选的 n 维向量

$nvec$ ——待求特征值和特征向量的个数

xm —— $n \times n$ 阶的质量矩阵

eps ——收敛判据, 10^{-5} 量级的一个小量

程序输出的结果包括:

$freq$ ——维数为 $nvec$ 的一个行阵,包含求得的固有频率

eig ——维数为 $n \times nvec$ 的行列式,包含求得的特征向量

程序的执行结果如下:

```

>> program10
Solution of eigenvalue problem by matrix iteration method
Natural frequencies:
      4.450424e-001      1.246983e+000      1.801938e+000

Mode shapes (Columnwise):
      1.000000e+000      1.000000e+000      1.000000e+000
      1.801937e+000      4.450328e-001      -1.247007e+000
      2.246979e+000      -8.019327e-001      5.549798e-001

```

例 7.13 编写一个命名为 Program11.m 的通用 MATLAB 程序,求解下列一般特征值问题:

$$kX = \omega^2 mX$$

其中

$$k = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解: Program11.m 中首先把问题 $kX = \omega^2 mX$ 转化成特定的特征值问题 $DY = \frac{1}{\omega^2} IY$ 。式

中, $D = (U^T)^{-1} m U^{-1}$, $k = U^T U$ 。程序中要用到以下数据:

nd ——特征值问题的维数,即刚度矩阵和质量矩阵的维数

bk - $nd \times nd$ 维的刚度矩阵

bm - $nd \times nd$ 维的质量矩阵

程序输出的结果包括上三角矩阵 $[bk]$ 、 $[bk]$ 的逆矩阵 $[ui]$ 、矩阵 $[uti][bm][ui]$ ($[uti]$ 是 $[ui]$ 的转置矩阵)和该问题的特征值与特征向量。

程序的执行结果如下:

```
>> program11
Upper triangular matrix [U]:

1.414214e+000    -7.071068e-001    0.000000e+000
0.000000e+000    1.224745e+000    -8.164966e-001
0.000000e+000    0.000000e+000    5.773503e-001

Inverse of the upper triangular matrix:
7.071068e-001    4.082483e-001    5.773503e-001
0.000000e+000    8.164966e-001    1.154701e+000
0.000000e+000    0.000000e+000    1.732051e+000

Matrix [UMU]=[UTI][M][UI]:
5.000000e-001    2.886751e-001    4.082483e-001
2.886751e-001    8.333333e-001    1.178511e+000
4.082483e-001    1.178511e+000    4.666667e+000

Eigenvectors:
5.048917e+000    6.431041e-001    3.079785e-001

Eigenvectors (Columnwise):
7.369762e-001    -5.910090e-001    3.279853e-001
1.327985e+000    -2.630237e-001    -4.089910e-001
1.655971e+000    4.739525e-001    1.820181e-001
```

7.11 C++ 程序

本节给出 3 个交互式的 C++ 程序用来求解特征值问题。Program9.cpp 基于雅可比法;Program10.cpp 基于矩阵迭代法;Program11.cpp 可用来求解一般的特征值问题,但首先是把一般的特征值问题转化为特殊的特征值问题。这 3 个程序中的输入与输出和 Program9.m,Program10.m,Program11.m 的输入与输出类似。

例 7.14 用 Program9.cpp(雅可比法)求例 7.11 中矩阵的特征值和特征向量。

解: 程序执行后需要通过键盘将输入数据键入,程序的输入和输出如下:

```

Please input N:
3
Please input matrix D row by row:
1.0      1.0      1.0
1.0      2.0      2.0
1.0      2.0      3.0
EIGENVALUE SOLITION BY JACOBI METHOD
GIVEN MATRIX
1.000000      1.000000      1.000000
1.000000      2.000000      2.000000
1.000000      2.000000      3.000000
EIGEN VALUES ARE
5.04891734      0.64310413      0.30797853
EIGEN VECTORS
FIRST      SECOND      THIRD
0.32798495      -0.73697623      0.59100923
0.59100946      -0.32798528      -0.73697590
0.73697605      0.59100905      0.32798569

```

例 7.15 用 Program10.cpp(矩阵迭代法)求例 7.12 中矩阵的特征值和特征向量。

解: 程序执行后需要通过键盘将输入数据键入,程序的输入和输出如下:

```

Please input N and NVEC:
3 3
Please input matrix D row by row:
1      1      1
1      2      2
1      2      3
Please input matrix XM row by row:
1      0      0
0      1      0
0      0      1
SOLUTION OF EIGENVALUE PROBLEM BY MATRIX ITERATION METHOD
NATURAL FREQUENCIES:
0.445042      1.246981      1.801938
MODE SHAPES (COLUMNWISE):
1.000000      1.000000      1.000000
1.801937      0.445037      -1.246993
2.246979      -0.801936      0.554969

```

例 7.16 用 Program11.cpp 求例 7.13 中一般特征值问题的特征值和特征向量。

解: 程序执行后需要通过键盘将输入数据键入,程序的输入和输出如下:

```

Please input ND:
3
Please input BK matrix row by row:
    2.0    -1.0     0.0
   -1.0     2.0    -1.0
    0.0    -1.0     1.0
Please input BM matrix row by row:
    1.0     0.0     0.0
    0.0     1.0     0.0
    0.0     0.0     1.0
UPPER TRIANGULAR MATRIX [U]:
    1.41421356    -0.70710678     0.00000000
    0.00000000     1.22474487    -0.81649658
    0.00000000     0.00000000     0.57735027
INVERSE OF THE UPPER TRIANGULAR MATRIX, [UI]:
    0.70710678     0.40824829     0.57735027
    0.00000000     0.81649658     1.15470054
    0.00000000     0.00000000     1.73205081
MATRIX [UMU]=[UTI] [M] [UI]:
    0.50000000     0.28867513     0.40824829
    0.28867513     0.83333333     1.17851130
    0.40824829     1.17851130     4.66666667
EIGENVALUES:
    5.04891734     0.64310413     0.30797853
EIGENVECTORS (COLUMNWISE):
    0.73697624    -0.59100904     0.32798528
    1.32798528    -0.26302375    -0.40899095
    1.65597055     0.47395249     0.18201810

```

7.12 Fortran 程序

本节给出 3 个 Fortran 程序用来求解特征值问题。PROGRAM9.F 是针对对称矩阵的雅可比法;PROGRAM10.F 是针对矩阵迭代法的;PROGRAM11.F 可用来求解一般的特征值问题。这 3 个程序中的输入与输出和 Program9.m,Program10.m,Program11.m 的输入与输出类似。

例 7.17 用 PROGRAM9.F(雅可比法)求例 7.11 中矩阵的特征值和特征向量。

解: 程序的输出如下:

```
EIGENVALUE SOLUTION BY JACOBI METHOD
GIVEN MATRIX
  0.100000E+01      0.100000E+01      0.100000E+01
  0.100000E+01      0.200000E+01      0.200000E+01
  0.100000E+01      0.200000E+01      0.300000E+01

EIGEN VALUES ARE
  0.504892E+01      0.643104E+00      0.307979E+00

EIGEN VECTORS
      FIRST          SECOND          THIRD
  0.327985E+00      -0.736984E+00      0.590999E+00
  0.591007E+00      -0.327977E+00      -0.736981E+00
  0.736978E+00      0.591004E+00      0.327991E+00
```

例 7.18 用 PROGRAM10.F(矩阵迭代法)求例 7.12 中矩阵的特征值和特征向量。

解: 程序的输出如下:

```
SOLUTION OF EIGENVALUE PROBLEM BY MATRIX ITERATION METHOD
NATURAL FREQUENCIES
  0.44504240E+00      0.12469811E+01      0.18019377E+01
MODE SHAPES (COLUMNWISE):
  0.10000000E+01      0.10000000E+01      0.10000000E+01
  0.18019372E+01      0.44503731E+00      -0.12469926E+01
  0.22469788E+01      -0.80193609E+00      0.55496848E+00
```

例 7.19 用 PROGRAM11.F(基于刚度矩阵的分解)求例 7.13 中特征值问题的解。

解: 程序的输出如下:

```
UPPER TRIANGULAR MATRIX [U]:
  0.141421E+01      -0.707107E+00      0.000000E+00
  0.000000E+00      0.122474E+01      -0.816497E+00
  0.000000E+00      0.000000E+00      0.577350E+00

INVERSE OF THE UPPER TRIANGULAR MATRIX, [UI]:
  0.707107E+00      0.408248E+00      0.577350E+00
  0.000000E+00      0.816497E+00      0.115470E+01
  0.000000E+00      0.000000E+00      0.173205E+01

MATRIX [UMU] = [UTI] [M] [UI]:
```

0.500000E+00	0.288675E+00	0.408248E+00
0.288675E+00	0.833333E+00	0.117851E+01
0.408248E+00	0.117851E+01	0.466667E+01
EIGENVALUES:		
0.504892E+01	0.643104E+00	0.307979E+00
EIGENVECTORS (COLUMNWISE):		
0.736973E+00	-0.590976E+00	0.328051E+00
0.132799E+01	-0.263064E+00	-0.408952E+00
0.165597E+01	0.473971E+00	0.181988E+00

参 考 文 献

- 7.1 S. Dunkerley, "On the whirling and vibration of shafts," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1894, Series A, Vol. 185, Part I, pp. 279-360.
- 7.2 B. Atzori, "Dunkerley's formula for finding the lowest frequency of vibration of elastic systems," letter to the editor, *Journal of Sound and Vibration*, 1974, Vol. 36, pp. 563-564.
- 7.3 H. H. Jeffcott, "The periods of lateral vibration of loaded shafts—The rational derivation of Dunkerley's empirical rule for determining whirling speeds," *Proceedings of the Royal Society of London*, 1919, Series A, Vol. 95, No. A666, pp. 106-115.
- 7.4 M. Endo and O. Taniguchi, "An extension of the Southwell-Dunkerley methods for synthesizing frequencies," *Journal of Sound and Vibration*, 1976, "Part I: Principles," Vol. 49, pp. 501-516, and "Part II: Applications," Vol. 49, pp. 517-533.
- 7.5 A. Rutenberg, "A lower bound for Dunkerley's formula in continuous elastic systems," *Journal of Sound and Vibration*, 1976, Vol. 45, pp. 249-252.
- 7.6 G. Temple and W. G. Bickley, *Rayleigh's Principle and Its Applications to Engineering*, Dover, New York, 1956.
- 7.7 N. G. Stephen, "Rayleigh's, Dunkerley's, and Southwell's methods," *International Journal of Mechanical Engineering Education*, January 1983, Vol. 11, pp. 45-51.
- 7.8 A. Rutenberg, "Dunkerley's formula and alternative approximations," letter to the editor, *Journal of Sound and Vibration*, 1975, Vol. 39, pp. 530-531.
- 7.9 R. Jones, "Approximate expressions for the fundamental frequency of vibration of several dynamic systems," *Journal of Sound and Vibration*, 1976, Vol. 44, pp. 475-478.
- 7.10 R. W. Fitzgerald, *Mechanics of Materials* (2nd ed.), Addison-Wesley, Reading, Mass., 1982.
- 7.11 H. Holzer, *Die Berechnung der Drehschwingungen*, Julius Springer, Berlin, 1921.
- 7.12 H. E. Fettis, "A modification of the Holzer method for computing uncoupled torsion and bending modes," *Journal of the Aeronautical Sciences*, October 1949, pp. 625-634; May 1954, pp. 359-360.
- 7.13 S. H. Crandall and W. G. Strang, "An improvement of the Holzer table based on a suggestion of Rayleigh's," *Journal of Applied Mechanics*, 1957, Vol. 24, p. 228.

- 7.14 S. Mahalingam, "An improvement of the Holzer method," *Journal of Applied Mechanics*, 1958, Vol. 25, p. 618.
- 7.15 S. Mahalingam, "Iterative procedures for torsional vibration analysis and their relationships," *Journal of Sound and Vibration*, 1980, Vol. 68, pp. 465-467.
- 7.16 L. Meirovitch, *Computational Methods in Structural Dynamics*, Sijthoff and Noordhoff, The Netherlands, 1980.
- 7.17 J. H. Wilkinson and G. Reinsch, *Linear Algebra*, Springer Verlag, New York, 1971.
- 7.18 J. W. Wilkinson, *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Oxford University Press, London, 1965.
- 7.19 R. S. Martin and J. H. Wilkinson, "Reduction of a symmetric eigenproblem $Ax = \lambda Bx$ and related problems to standard form," *Numerical Mathematics*, 1968, Vol. 11, pp. 99-110.
- 7.20 G. B. Haggerty, *Elementary Numerical Analysis with Programming*, Allyn and Bacon, Boston, 1972.
- 7.21 A. Jennings, "Eigenvalue methods for vibration analysis," *Shock and Vibration Digest*, Part I, February 1980, Vol. 12, pp. 3-16; Part II, January 1984, Vol. 16, pp. 25-33.
- 7.22 K. Bathe and E. L. Wilson, "Solution methods for eigenvalue problems in structural mechanics," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1973, Vol. 6, pp. 213-226.
- 7.23 E. Cohen and H. McCallion, "Economical methods for finding eigenvalues and eigenvectors," *Journal of Sound and Vibration*, 1967, Vol. 5, pp. 397-406.
- 7.24 A. J. Fricker, "A method for solving high-order real symmetric eigenvalue problems," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1983, Vol. 19, pp. 1131-1138.
- 7.25 G. Longbottom and K. F. Gill, "The estimation of natural frequencies by use of Sturm sequences," *International Journal of Mechanical Engineering Education*, 1976, Vol. 4, pp. 319-329.
- 7.26 K. K. Gupta, "Solution of eigenvalue problems by sturm sequence method," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1972, Vol. 4, pp. 379-404.
- 7.27 W. K. Chen and F. Y. Chen, "Topological analysis of a class of lumped vibrational systems," *Journal of Sound and Vibration*, 1969, Vol. 10, pp. 198-207.
- 7.28 郑兆昌. 机械振动(上册). 北京: 机械工业出版社, 1980
- 7.29 刘习军, 贾启芬, 张文德. 工程振动与测试技术. 天津: 天津大学出版社, 1999

思 考 题

7.1 简答题

1. 列举几种求多自由度系统第一阶固有频率的近似方法。
2. 推导邓克莱公式时最基本的假设是什么?
3. 什么是瑞利原理?
4. 利用邓克莱公式和瑞利法时, 分别求得系统基频的上限还是下限?
5. 什么是瑞利商?

6. 霍尔茨方法的基本原理是什么?
7. 什么是矩阵迭代法?
8. 在矩阵迭代法中,可以用任意的初选向量求最高阶固有频率吗?
9. 在矩阵迭代法中,如何求除最低阶和最高阶固有频率之外的其他各阶固有频率?
10. 矩阵迭代法和雅可比法的区别是什么?
11. 什么是旋转矩阵?在雅可比方法中它的作用是什么?
12. 什么是标准特征值问题?
13. 在推导标准特征值问题时,切比雪夫(Chebyshev)分解的作用是什么?
14. 如何求一个上三角矩阵的逆矩阵?

7.2 判断题

1. 邓克莱公式给出的基频总是大于准确值。 ()
2. 瑞利法给出的基频总是大于准确值。 ()
3. $\mathbf{AX}=\lambda\mathbf{BX}$ 是一个标准特征值问题。 ()
4. $\mathbf{AX}=\lambda\mathbf{IBX}$ 是一个标准特征值问题。 ()
5. 雅可比法只能求得对称矩阵的特征值。 ()
6. 雅可比法中要用到旋转矩阵。 ()
7. 矩阵迭代法要求系统的各阶固有频率互不相等,且不很接近。 ()
8. 在矩阵迭代法中,任何计算误差都不会导致不正确的结果。 ()
9. 在矩阵迭代法中,永远不会不收敛到较高阶固有频率。 ()
10. 当利用瑞利法讨论带有几个转子的轴的振动时,可以用静变形曲线作为主振型的近似值。 ()
11. 可以认为瑞利法与系统的机械能守恒原理是一致的。 ()

7.3 填空题

1. 任何一个对称正定矩阵 \mathbf{A} 都可以分解成 $\mathbf{A}=\mathbf{U}^T\mathbf{U}$ 的形式,其中 \mathbf{U} 是一个 _____ 三角矩阵。
2. 把一个对称正定矩阵 \mathbf{A} 分解成 $\mathbf{A}=\mathbf{U}^T\mathbf{U}$ 的形式,称为 _____ 方法。
3. 雅可比法中的每一步使一对非对角线元素成为 _____。
4. _____ 原理认为任何一个向量都可以看成是系统各阶特征向量的线性组合。
5. 在矩阵迭代法中,如果 $\mathbf{DX}=\lambda\mathbf{X}$ 收敛于特征值的最小值,那么 $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{X}=\mu\mathbf{X}$ 将收敛于特征值的最 _____ 值。
6. 瑞利商给出的是 ω_1^2 的 _____ 限和 ω_n^2 的 _____ 限。
7. 瑞利商在 _____ 附近有一个平稳值。
8. 对于一个带有若干集中质量 m_1, m_2, \dots 的轴来说,瑞利法给出的基频的近似值为

$$\omega = \left\{ \frac{g(m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \cdots)}{m_1\omega_1^2 + m_2\omega_2^2 + \cdots} \right\}^{1/2}$$

其中, $\omega_1, \omega_2, \cdots$ 分别代表 m_1, m_2, \cdots 的 _____ 变形。

9. 霍尔茨方法基本上可以看成是一个 _____ 方法。

10. _____ 方法可以更广泛地应用于扭振系统, 虽然该方法完全可以应用于沿直线方向振动的系统。

11. 在矩阵迭代法中, 计算较高阶固有频率时包含一个被称为 _____ 的过程。

7.4 选择题

1. 在利用矩阵迭代法, 以试选的列向量 $\mathbf{X}^{(1)} = (1 \ 1 \ 1)^T$ 求解下列特征值问题时,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{X} = \lambda \mathbf{X}$$

迭代一次后的结果为 _____。

(a) $\begin{Bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{Bmatrix}$

(b) $\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

(c) $\begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{Bmatrix}$

2. 对于一个半正定系统, 霍尔茨法中最后的公式代表 _____。

(a) 在端部的振幅为零

(b) 惯性力的和为零

(c) 运动微分方程

3. 邓克莱公式的形式为 _____。

(a) $\omega_1^2 \approx a_{11}m_1 + a_{22}m_2 + \cdots + a_{mm}m_n$

(b) $\frac{1}{\omega_1^2} \approx a_{11}m_1 + a_{22}m_2 + \cdots + a_{mm}m_n$

(c) $\frac{1}{\omega_1^2} \approx k_{11}m_1 + k_{22}m_2 + \cdots + k_{mm}m_n$

4. 瑞利第一商的形式为 _____。

(a) $\frac{\mathbf{X}^T \mathbf{k} \mathbf{X}}{\mathbf{X}^T \mathbf{m} \mathbf{X}}$

(b) $\frac{\mathbf{X}^T \mathbf{m} \mathbf{X}}{\mathbf{X}^T \mathbf{k} \mathbf{X}}$

(c) $\frac{\mathbf{X}^T \mathbf{k} \mathbf{X}}{\dot{\mathbf{X}}^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{X}}}$

5. 瑞利第一商满足 _____。

(a) $R(\mathbf{X}) \leq \omega_1^2$

(b) $R(\mathbf{X}) \geq \omega_n^2$

(c) $R(\mathbf{X}) \geq \omega_1^2$

6. 一个振动系统的刚度矩阵和质量矩阵分别为

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

根据瑞利商 $R(\mathbf{X}) = \frac{\mathbf{X}^T \mathbf{k} \mathbf{X}}{\mathbf{X}^T \mathbf{m} \mathbf{X}}$, 与第一阶主振型最接近的近似值为 _____。

$$(a) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$(b) \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$(c) \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

7.5 连线题

- | | |
|----------|--|
| 1. 邓克莱公式 | (a) 求系统的每一阶固有频率和每一阶主振型, 每次只能求得一阶。对每一频率, 要借助于几个不同的初选向量。 |
| 2. 瑞利法 | (b) 借助于初选的向量和矩阵压缩过程, 可求得系统的全部固有频率。 |
| 3. 霍尔茨法 | (c) 不必借助于初选的向量就可以同时求得所有特征值和特征向量。 |
| 4. 矩阵迭代法 | (d) 求组合系统基频的近似值。 |
| 5. 雅可比法 | (e) 求系统基频的近似值, 所得结果总是大于准确值。 |

习 题

- 7.1 用邓克莱公式估算图 6.9 所示系统的基频, 数据如下: (a) $m_1 = m_3 = 5m, m_2 = m$; (b) $m_1 = m_3 = m, m_2 = 5m$ 。
- 7.2 用邓克莱公式估算图 6.11 所示扭振系统的基频, 数据如下: (a) $J_1 = J_2 = J_3 = J_0, k_{11} = k_{12} = k_{13} = k_1$; (b) $J_1 = J_0, J_2 = 2J_0, J_3 = 3J_0, k_{11} = k_1, k_{12} = 2k_1, k_{13} = 3k_1$ 。
- 7.3 用邓克莱公式估算图 6.9 所示系统的基频, 数据如下: $m_1 = m, m_2 = 2m, m_3 = 3m, l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l/4$ 。
- 7.4 一架军用飞机的机翼发生弯曲振动时的固有频率为 20 Hz。如图 7.9 所示, 求在机翼的自由端搭载重量为 2000 lbf 的武器时的固有频率。已知机翼的弯曲刚度为 50 000 lbf/ft。

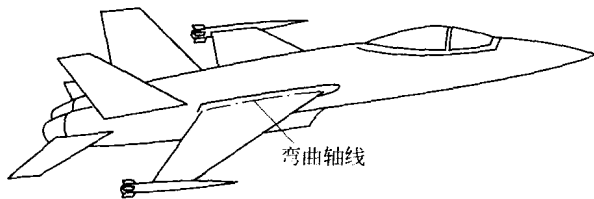


图 7.9 习题 7.4 图

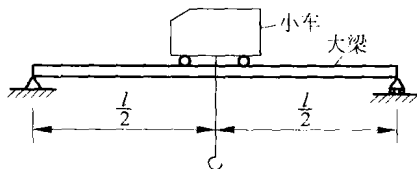


图 7.10 习题 7.5 图

- 7.5 桥式起重机中(见图 7.10), 滑动小车的重量是大梁重量的 10 倍, 用邓克莱公式估算系统的基频。
- 7.6 用邓克莱公式估算图 5.29 所示张紧弦的基频, 数据如下: $m_1 = m_2 = m, l_1 = l_2 = l_3 = l$ 。

- 7.7 用瑞利法估算图 7.11 所示振动系统的基频,数据如下: $m_1 = m, m_2 = 2m, m_3 = 3m$, $k_1 = k, k_2 = 2k, k_3 = 3k$ 。
- 7.8 用瑞利法估算图 6.11 所示扭振系统的基频,数据如下: $J_1 = J_0, J_2 = 2J_0, J_3 = 3J_0$, $k_{11} = k_{12} = k_{13} = k_1$ 。
- 7.9 用瑞利法求解习题 7.6。
- 7.10 用瑞利法求图 5.29 所示系统的第 1 阶固有频率。假设: $l_1 = l_2 = l_3 = l, m_1 = m, m_2 = 5m$ 。
- 7.11 在刚性水平梁和弹性立柱假设下,一个两层抗剪建筑物的模型如图 7.12 所示。用瑞利法计算其第一阶固有频率。假设振型取在与各层重量成比例的载荷作用下所引起的静变形, $m_1 = 2m, m_2 = m, h_1 = h_2 = h, k_1 = k_2 = 3EI/h^3$ 。

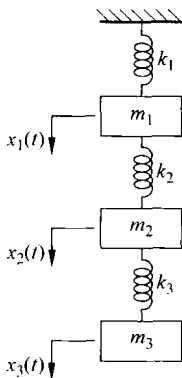


图 7.11 习题 7.7 图

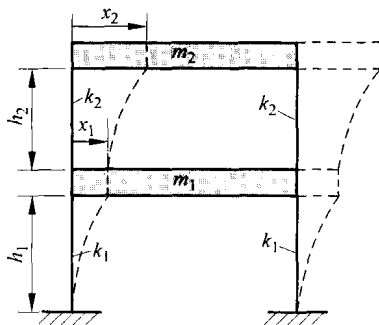


图 7.12 习题 7.11 图

- 7.12 证明瑞利商不可能比最高阶固有频率大。
- 7.13 用霍尔茨法求图 6.13 所示系统的各阶主振型和各阶固有频率。假设: $k_1 = 8000 \text{ N/m}$, $k_2 = 4000 \text{ N/m}$, $m_1 = 100 \text{ kg}$, $m_2 = 20 \text{ kg}$, $m_3 = 200 \text{ kg}$ 。
- 7.14 系统的刚度矩阵和质量矩阵分别为

$$\mathbf{k} = k \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m} = m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

用霍尔茨法求各阶主振型和固有频率。

- 7.15 用霍尔茨法求图 6.11 所示扭振系统的某一阶主振型和相应的固有频率。假设: $k_{11} = k_{12} = k_{13} = k_1, J_1 = J_2 = J_3 = J_0$ 。
- 7.16 利用霍尔茨法求图 7.12 所示受剪建筑物框架的各阶主振型和各阶固有频率。假设: $k_1 = 2k, k_2 = k, m_1 = 2m, m_2 = m, h_1 = h_2 = h, k = 3EI/h^3$ 。
- 7.17 利用霍尔茨法求图 6.42 所示系统的各阶主振型和各阶固有频率。假设: $J_1 = 10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, J_2 = 5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, J_3 = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, k_{11} = k_{12} = 1 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$ 。

7.18 已知下列矩阵的最大特征值是 $\lambda = 10.38068$:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2.5 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 10 \end{bmatrix}$$

用矩阵迭代法求其他特征值和特征向量, 假设 $\mathbf{m} = \mathbf{I}$ 。

7.19 一个弹簧-质量系统的刚度矩阵和质量矩阵分别为

$$\mathbf{k} = k \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m} = m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

用矩阵迭代法求全部特征值和特征向量。

7.20 利用矩阵迭代法求图 6.6 所示系统的各阶主振型和各阶固有频率。已知: $m_1 = m_2 = m_3 = m, k_1 = k, k_2 = 2k, k_3 = 3k$ 。

7.21 利用矩阵迭代法求图 6.27 中所示系统的各阶固有频率。假设: $J_{d1} = J_{d2} = J_{d3} = J_0, l_i = l, (GJ)_i = GJ, i = 1, 2, 3, 4$ 。

7.22 利用矩阵迭代法, 求解习题 7.6。

7.23 一个振动系统的刚度矩阵和质量矩阵分别为

$$\mathbf{k} = k \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m} = m \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

用矩阵迭代法求第一阶主振型和第一阶固有频率。

7.24 利用李兹法求习题 7.19 中所述系统的前两阶固有频率和主振型。

7.25 利用子空间迭代法求习题 7.23 中所述系统的前两阶固有频率和主振型。

7.26 利用雅可比法求下列矩阵的特征值和特征向量:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

7.27 利用雅可比法求下列矩阵的特征值和特征向量:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

7.28 对下列矩阵进行切比雪夫分解:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 & 4 \\ -2 & 2 & -1 & 3 \\ 6 & -1 & 22 & 13 \\ 4 & 3 & 13 & 46 \end{bmatrix}$$

7.29 利用切比雪夫分解 $\mathbf{A} = \mathbf{U}^T \mathbf{U}$, 求下列矩阵的逆矩阵:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

7.30 利用切比雪夫分解求下列矩阵的逆矩阵:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 5 & 16 & 28 \\ 8 & 28 & 54 \end{bmatrix}$$

7.31 利用雅可比法求习题 7.28 中矩阵 \mathbf{A} 的特征值。

7.32 把习题 7.23 转换成一个对称矩阵的标准特征值问题。

7.33 利用切比雪夫分解, 把下列矩阵表示成两个三角矩阵的积:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 16 & -20 & -24 \\ -20 & 89 & -50 \\ -24 & -50 & 280 \end{bmatrix}$$

7.34* 设计图 7.13 中空心轴的最小重量, 使得系统的基频为 0.5 Hz。假设: $m_1 = 20 \text{ kg}$, $m_2 = 50 \text{ kg}$, $m_3 = 40 \text{ kg}$, $l_1 = 1 \text{ m}$, $l_2 = 3 \text{ m}$, $l_3 = 4 \text{ m}$, $l_4 = 2 \text{ m}$, $E = 2.07 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ 。

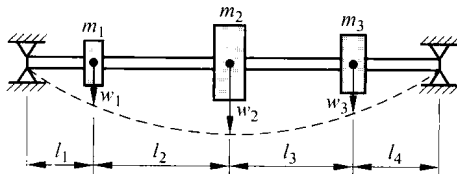


图 7.13 习题 7.34 图

7.35 利用 MATLAB 求下列矩阵的特征值和特征向量:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

7.36 利用 MATLAB 求下列矩阵的特征值和特征向量:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 1 & -9 & -1 \\ 2 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

7.37 利用程序 Program9.m, 求习题 7.18 中矩阵 \mathbf{D} 的特征值和特征向量。

7.38 利用程序 Program10.m, 求习题 7.27 中矩阵 \mathbf{D} 的特征值和特征向量。

7.39 利用程序 Program11.m, 求习题 7.23 中的特征值问题。已知 $k = m = 1$ 。

7.40 利用程序 Program9.cpp, 求下列矩阵的特征值和特征向量:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

7.41 利用程序 Program10.cpp, 求解习题 7.40。

7.42 利用程序 Program11.cpp, 求解下列特征值问题:

$$\omega^2 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 10 & -4 & 0 \\ -4 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{X}$$

7.43 利用程序 PROGRAM9.F 求解习题 7.40。

7.44 利用程序 PROGRAM10.F 求解习题 7.40。

7.45 利用程序 PROGRAM11.F 求解习题 7.42。

7.46 利用程序 PROGRAM9.F 求解习题 7.29。

7.47 利用程序 PROGRAM9.F 求解习题 7.33。

7.48 利用程序 PROGRAM11.F 求解习题 7.14 中所述的一般特征值问题。

7.49 利用程序 PROGRAM11.F 求解习题 7.19 中所述的一般特征值问题。

7.50 利用程序 PROGRAM11.F 求解习题 7.23 中所述的一般特征值问题。

设计题目

7.51 如图 7.14 所示, 质量分别为 $m_1 = 100 \text{ kg}$ 的飞轮和 $m_2 = 50 \text{ kg}$ 的滑轮固定在一个长为 $l = 2 \text{ m}$ 的轴上。确定位置尺寸 l_1 和 l_2 , 使该系统的第 1 阶固有频率最小。

7.52 桥式起重机的简化模型如图 7.15 所示, 钢质大梁的横截面为矩形, 钢丝绳的横截面为圆形。设计大梁和钢丝绳的横截面尺寸, 使系统的固有角频率大于固定在滑动小车上的电机的转速 1500 r/min 。

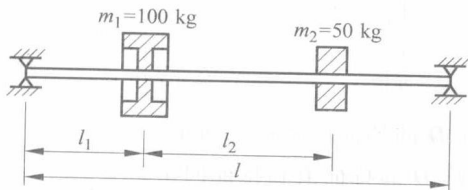


图 7.14 设计题目 7.51 图

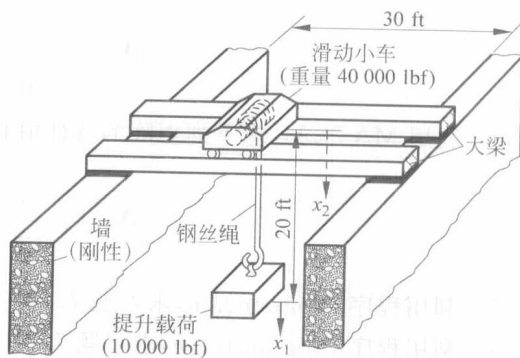


图 7.15 设计题目 7.52 图



铁摩辛柯 (Stephen Prokf'yevich Timoshenko, 1878—1972), 工程师, 出生于俄罗斯, 后移民美国。是在弹性理论、材料强度理论和机械振动理论方面著述中, 最广为人知的作者之一。曾先后任密歇根 (Michigan) 大学和斯坦福 (Stanford) 大学的力学教授。在美国被公认为工程力学之父。1921 年, 他对梁的振动理论提出了重大改进, 被称为铁摩辛柯梁理论。

(照片经 Applied Mechanics Reviews 授权使用。)

第 8 章 连续系统的振动

8.1 引言

前面各章讨论的离散系统都是假定质量、阻尼、弹簧仅出现在系统的某些离散点处。有许多称为分布系统或连续系统的例子, 它们不能视为离散质量、阻尼或弹簧, 因此必须考虑质量、阻尼与弹簧的连续分布, 同时假定系统的无限个点是可以振动的, 这就是为什么连续系统也称为无限自由度系统的原因。

如果系统可以模型化为离散系统, 则控制方程是常微分方程, 相对易于求解。另一方面, 若系统模型化为连续系统, 则控制方程为偏微分方程, 一般难以求解。然而, 从系统的离散模型获得的信息也许不如从系统的连续模型获得的信息精确。究竟选择哪种模型, 必须综合考虑分析的目的、分析对设计的影响以及计算时间。

本章将讨论简单连续系统如弦、杆、轴、梁和薄膜的振动问题。在文献[8.1~8.3]中, 给出了更特殊的连续结构单元振动问题的处理方法。一般来说, 与离散系统的有限个数目的频率与模态相反, 连续系统的频率方程为超越方程, 因而有无限多个数目的固有频率与模态。此外, 确定连续系统的固有频率需要利用边界条件。而边界条件问题在讨论离散系统的振动问题时并不涉及, 除非是利用间接方法, 因为影响系数依赖于系统的支撑方式。

8.2 弦或索的横向振动

8.2.1 运动微分方程

考虑长为 l 的弹性弦或索, 每单位长度上受大小为 $f(x, t)$ 的横向力作用, 如图 8.1(a)

所示。假定弦的横向位移 $w(x, t)$ 较小, 沿 z 方向力的平衡如图 8.1(b) 所示。

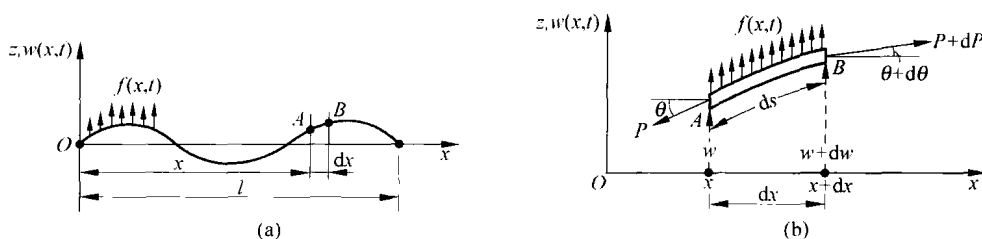


图 8.1 振动的弦

作用在单元上的外力等于作用在单元上的惯性力, 即

$$(P + dP) \sin(\theta + d\theta) + f dx - P \sin \theta = \rho dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (8.1)$$

其中, P 是张力; ρ 为每单位长度的质量; θ 为弦相对于 x 轴偏离的角度。对微长度 dx , 有

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx \quad (8.2)$$

$$\sin \theta \simeq \tan \theta = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (8.3)$$

和

$$\sin(\theta + d\theta) \simeq \tan(\theta + d\theta) = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \quad (8.4)$$

因此非均匀弦受迫振动的运动微分方程式(8.1)可以简化为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[P \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right] + f(x, t) = \rho(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \quad (8.5)$$

如果弦是均匀的, 且张力为常力, 则式(8.5)可简化为

$$P \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t) = \rho \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \quad (8.6)$$

如果 $f(x, t) = 0$, 则得自由振动方程为

$$P \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \quad (8.7)$$

或

$$c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (8.8)$$

其中

$$c = \left(\frac{P}{\rho} \right)^{1/2} \quad (8.9)$$

式(8.8)即为著名的波动方程。

8.2.2 初始条件与边界条件

运动微分方程式(8.5)或其特殊形式(8.6)与式(8.7)是二阶偏微分方程。由于该方程中 w 对于 x 与 t 的最高阶导数为二阶, 所以需要确定两个边界条件和两个初始条件后方可求解 $w(x, t)$ 。若弦在时间 $t=0$ 时, 挠度 $w_0(x)$ 与速度 $\dot{w}_0(x)$ 已知, 则初始条件为

$$\left. \begin{aligned} w(x, t=0) &= w_0(x) \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x, t=0) &= \dot{w}_0(x) \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

若该弦的一端($x=0$)固定, 则边界条件为

$$w(x=0, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (8.11)$$

若弦或索与一个能沿垂直方向运动的销钉相连, 如图 8.2 所示, 该端点不能承受横向力, 因此边界条件为

$$P(x) \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (8.12)$$

若端点 $x=0$ 是自由的, 且 P 为常量, 则式(8.12)为

$$\frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = 0, \quad t \geq 0 \quad (8.13)$$

若端点 $x=l$ 为如图 8.3 所示的弹性约束, 则边界条件为

$$P(x) \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = -k w(x, t) \Big|_{x=l}, \quad t \geq 0 \quad (8.14)$$

其中, k 为弹性常数。

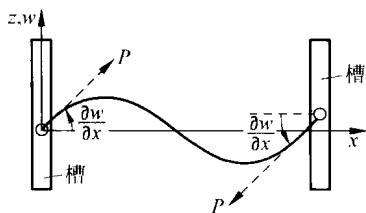


图 8.2 末端与销钉相连的弦

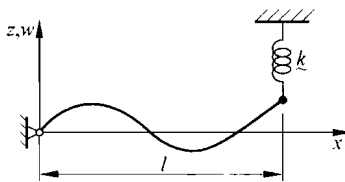


图 8.3 带弹性约束的弦

8.2.3 等截面弦的自由振动

自由振动微分方程即式(8.8)可以通过分离变量的方法求解。在该方法中, 将解写为函数 $W(x)$ (仅取决于 x) 与函数 $T(t)$ (仅取决于 t) 的乘积, 即

$$w(x, t) = W(x)T(t) \quad (8.15)$$

将式(8.15)代入式(8.8)中, 得

$$\frac{c^2}{W} \frac{d^2 W}{dx^2} = \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} \quad (8.16)$$

由于该式的左边仅取决于 x , 右边仅取决于 t , 其共同的值必为一常数, 令为 a , 则有

$$\frac{c^2}{W} \frac{d^2 W}{dx^2} = \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = a \quad (8.17)$$

则式(8.17)可以写为

$$\frac{d^2 W}{dx^2} - \frac{a}{c^2} W = 0 \quad (8.18)$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} - aT = 0 \quad (8.19)$$

由于常量 a 一般为负值(见习题 8.9), 可令 $a = -\omega^2$, 则式(8.18)与式(8.19)可以表示为

$$\frac{d^2 W}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} W = 0 \quad (8.20)$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \quad (8.21)$$

这两个方程的解分别为

$$W(x) = A \cos \frac{\omega x}{c} + B \sin \frac{\omega x}{c} \quad (8.22)$$

$$T(t) = C \cos \omega t + D \sin \omega t \quad (8.23)$$

其中, ω 为振动的固有频率; 常数 A, B, C 与 D 可以根据边界条件与初始条件求得。

8.2.4 两端固定弦的自由振动

若弦的两端均为固定端, 则边界条件为 $w(0, t) = w(l, t) = 0$ (对于所有 $t \geq 0$)。由式(8.15)可得

$$W(0) = 0 \quad (8.24)$$

$$W(l) = 0 \quad (8.25)$$

为了满足式(8.24), 式(8.22)中的 A 必为零。由式(8.25)得

$$B \sin \frac{\omega l}{c} = 0 \quad (8.26)$$

由于 B 不为零, 则

$$\sin \frac{\omega l}{c} = 0 \quad (8.27)$$

式(8.27)称为频率方程或特征方程。由此可求得 n 个 ω 的值, 称为特征值或固有频率。第 n 阶固有频率为

$$\frac{\omega_n l}{c} = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

或

$$\omega_n = \frac{nc\pi}{l}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.28)$$

相对于 ω_n , $w_n(x, t)$ 的解可以表示为

$$w_n(x, t) = W_n(x) T_n(t) = \sin \frac{n\pi x}{l} \left[C_n \cos \frac{nc\pi t}{l} + D_n \sin \frac{nc\pi t}{l} \right] \quad (8.29)$$

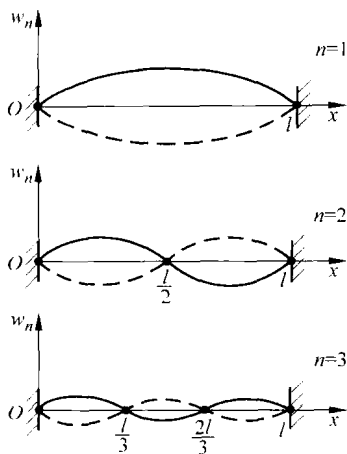


图 8.4 弦的振型

其中, C_n 与 D_n 是任意常数。解 $w_n(x, t)$ 称为弦的第 n 阶主振动或固有振动。在该阶振动中, 弦的每点振动的振幅与该点的 W_n 值成比例, 其圆频率为 $\omega_n = \frac{nc\pi}{l}$ 。函数 $W_n(x)$ 称为第 n 阶(主)固有振型或特征函数, 图 8.4 中给出了前 3 阶振型的形状。相对于 $n=1$ 的振型称为基本振型, ω_1 叫做基频, 与其相对应的周期为

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2l}{c}$$

在所有时刻 $w_n = 0$ 的点称为结点, 于是第一阶振型有 $x=0$ 与 $x=l$ 处的两个结点, 第 2 阶振型有 $x=0, x=l/2$ 与 $x=l$ 处的 3 个结点。

满足边界条件式(8.24)与式(8.25)的式(8.8)的通解, 可以通过对所有 $w_n(x, t)$ 叠加表示为

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \left[C_n \cos \frac{nc\pi t}{l} + D_n \sin \frac{nc\pi t}{l} \right] \quad (8.30)$$

该式给出了弦的所有可能的振动形式, 而具体的振动形式则要由给定的初始条件唯一确定。 C_n 与 D_n 的值可以通过初始条件唯一地确定下来。若初始条件给定为式(8.10), 则得

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{l} = w_0(x) \quad (8.31)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nc\pi}{l} D_n \sin \frac{n\pi x}{l} = \dot{w}_0(x) \quad (8.32)$$

这就是 $w_0(x)$ 与 $\dot{w}_0(x)$ 在区间 $0 \leq x \leq l$ 上的傅里叶正弦级数展开。 C_n 与 D_n 的值可以通过式(8.31)与式(8.32)乘以 $\sin \frac{n\pi x}{l}$, 然后对 x 从 0 积分到 l 得到, 即

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l w_0(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (8.33)$$

$$D_n = \frac{2}{nc\pi} \int_0^l \dot{w}_0(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (8.34)$$

注意: 形如式(8.30)的解表明响应可以表示为固有振型的叠加, 这与第 6 章所述的振型叠加法是一致的。该方法不仅可以用于求连续系统自由振动的解, 也可以用于求强迫振动的解。

例 8.1 若长为 l 的弦的两端固定, 如图 8.5 所示,

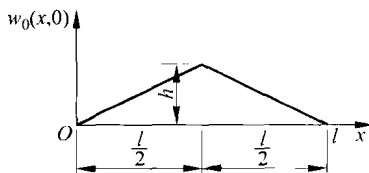


图 8.5 弦的初始变形

在中点处施加一个力,使其产生位置的改变,然后释放,确定其随后的运动。

解:解的形式如式(8.30)。其中的 C_n 与 D_n 可以分别由式(8.33)与式(8.34)确定。由于没有初速度 $\dot{w}_0(x)=0$, 则 $D_n=0$, 因此形如式(8.30)的解简化为

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi t}{l} \quad (\text{E. 1})$$

其中

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l w_0(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (\text{E. 2})$$

初始挠度 $w_0(x)$ 为

$$w_0(x) = \begin{cases} \frac{2hx}{l}, & 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ \frac{2h(l-x)}{l}, & \frac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases} \quad (\text{E. 3})$$

将式(E.3)代入式(E.2)中,则 C_n 为

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{l} \left\{ \int_0^{l/2} \frac{2hx}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \int_{l/2}^l \frac{2h}{l} (l-x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right\} \\ &= \begin{cases} \frac{8h}{\pi^2 n^2} \sin \frac{n\pi}{2}, & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{E. 4})$$

利用关系

$$\sin \frac{n\pi}{2} = (-1)^{(n-1)/2}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (\text{E. 5})$$

所期望的解可以表示为

$$w(x, t) = \frac{8h}{\pi^2} \left\{ \sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi ct}{l} - \frac{1}{9} \sin \frac{3\pi x}{l} \cos \frac{3\pi ct}{l} + \dots \right\} \quad (\text{E. 6})$$

此种情况下,偶函数形式的振型函数都没有被激发。

8.2.5 行波的解

对一无限长的弦,其波动方程式(8.8)的解可以表示为

$$w(x, t) = w_1(x-ct) + w_2(x+ct) \quad (8.35)$$

其中, w_1 与 w_2 分别为 $(x-ct)$ 与 $(x+ct)$ 的任意函数。为说明式(8.35)是方程式(8.8)的解, 首先对式(8.35)求导:

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = w_1''(x-ct) + w_2''(x+ct) \quad (8.36)$$

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = c^2 w_1''(x-ct) + c^2 w_2''(x+ct) \quad (8.37)$$

将以上两式代入式(8.8), 显然波动方程是满足的。在式(8.35)中, $w_1(x-ct)$ 与 $w_2(x+ct)$

分别表示波在 x 轴的正向与负向传播,其速度为 c 。

对某一给定问题,任意函数 w_1 与 w_2 可以根据初始条件式(8.10)确定。将式(8.35)代入式(8.10)中,给定 $t=0$,则有

$$w_1(x) + w_2(x) = w_0(x) \quad (8.38)$$

$$-cw_1'(x) + cw_2'(x) = \dot{w}_0(x) \quad (8.39)$$

式中,撇号代表 $t=0$ 时关于相应变量(即 x)的导数。对式(8.39)积分,有

$$-w_1(x) + w_2(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x \dot{w}_0(x') dx' \quad (8.40)$$

其中, x_0 为常量。由式(8.38)与式(8.40),可解得 w_1 与 w_2 为

$$w_1(x) = \frac{1}{2} \left[w_0(x) - \frac{1}{c} \int_{x_0}^x \dot{w}_0(x') dx' \right] \quad (8.41)$$

$$w_2(x) = \frac{1}{2} \left[w_0(x) + \frac{1}{c} \int_{x_0}^x \dot{w}_0(x') dx' \right] \quad (8.42)$$

在式(8.41)与式(8.42)中,分别用 $(x-ct)$ 与 $(x+ct)$ 替换 x ,则得全解为

$$\begin{aligned} w(x,t) &= w_1(x-ct) + w_2(x+ct) \\ &= \frac{1}{2} [w_0(x-ct) + w_0(x+ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \dot{w}_0(x') dx' \end{aligned} \quad (8.43)$$

下面几点应该加以注意:

(1) 从式(8.43)可知,这是一个不必应用边界条件来确定解的问题。

(2) 问题的解即式(8.43)可以表示为

$$w(x,t) = w_D(x,t) + w_V(x,t) \quad (8.44)$$

其中, $w_D(x,t)$ 表示已知初始位移 $w_0(x)$ 与零初始速度引起的波的传播; $w_V(x,t)$ 表示仅在已知初始速度 $\dot{w}_0(x)$ 与零初始位移条件下的波的传播。

参考文献[8.6]讨论了两端固定的弦在其上某中间点受弹性载荷的横向冲击作用产生的横向振动。参考文献[8.7]是 Triantafy Uou 所写的一篇关于索和链的动力学研究的一篇综述。

8.3 杆的纵向振动

8.3.1 运动微分方程及其解

考虑图 8.6 所示的长为 l 、横截面面积为 $A(x)$ 的弹性杆,该杆微单元横截面上的作用力用 P 与 $P+dP$ 表示:

$$P = \sigma A = EA \frac{\partial u}{\partial x} \quad (8.45)$$

其中, σ 为轴向应力; E 为弹性模量; u 为轴向位移, $\partial u / \partial x$ 为轴向应变。若 $f(x,t)$ 表示每单

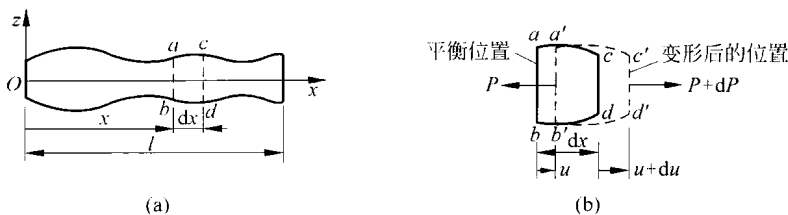


图 8.6 杆的纵向振动

位长度上作用的外力,则根据 x 方向的力的总和可以得到如下的运动微分方程:

$$(P + dP) + f dx - P = \rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (8.46)$$

其中, ρ 为杆的质量密度。应用 $dP = (\partial P / \partial x) dx$ 与式(8.45)的关系,变截面杆的纵向强迫振动的运动微分方程即式(8.46)可以表示为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[EA(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] + f(x, t) = \rho(x) A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \quad (8.47)$$

对等截面杆,式(8.47)简化为

$$EA \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t) = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \quad (8.48)$$

根据式(8.48),自由振动方程(令 $f=0$)为

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \quad (8.49)$$

其中

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (8.50)$$

注意: 式(8.47)~式(8.50)分别类似于式(8.5)、式(8.6)、式(8.8)与式(8.9)。如同式(8.8)的情况,式(8.49)的解可以表示为

$$u(x, t) = U(x)T(t) \equiv \left(\underline{A} \cos \frac{\omega x}{c} + \underline{B} \sin \frac{\omega x}{c} \right) (C \cos \omega t + D \sin \omega t) \quad (8.51)$$

其中,函数 $U(x)$ 表示固有振型,仅取决于 x ; 函数 $T(t)$ 仅取决于 t 。若已知杆的初始轴向位移 $u_0(x)$ 和初始速度 $\dot{u}_0(x)$, 则初始条件可以表示为

$$\left. \begin{aligned} u(x, t=0) &= u_0(x) \\ \frac{\partial u(x, t=0)}{\partial t} &= \dot{u}_0(x) \end{aligned} \right\} \quad (8.52)$$

等截面杆纵向振动的边界条件与相应的频率方程如表 8.1 所示。

① 本节采用 \underline{A} 与 \underline{B} , 而 A 用于表示杆的横截面积。

表 8.1 杆的纵向振动中常用的边界条件

杆的端点条件	边界条件	频率方程	振型(函数)	固有圆频率
固定 自由 	$u(0, t) = 0$ $\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0$	$\cos \frac{\omega l}{c} = 0$	$U_n(x) = C_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}$	$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi c}{2l}, \quad n=0, 1, 2, \dots$
自由 自由 	$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$ $\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0$	$\sin \frac{\omega l}{c} = 0$	$U_n(x) = C_n \cos \frac{n\pi x}{l}$	$\omega_n = \frac{n\pi c}{l}, \quad n=0, 1, 2, \dots$
固定 固定 	$u(0, t) = 0$ $u(l, t) = 0$	$\sin \frac{\omega l}{c} = 0$	$U_n(x) = C_n \cos \frac{n\pi x}{l}$	$\omega_n = \frac{n\pi c}{l}, \quad n=1, 2, 3, \dots$

例 8.2 横截面面积为 A 、长为 l 、弹性模量为 E 的等截面杆, 两端与弹簧、阻尼器和质量相连, 如图 8.7(a) 所示, 指出其边界条件。

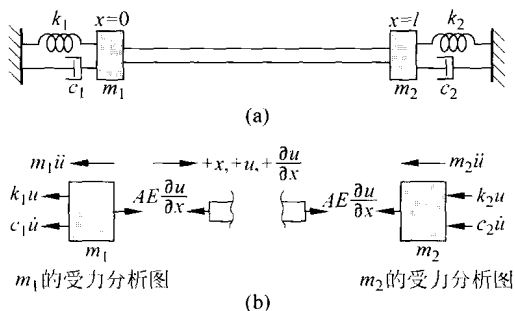


图 8.7 两端与弹簧-质量-阻尼系统相连的杆

解: 质量块 m_1 与 m_2 的受力如图 8.7(b) 所示, 据此可以解出左端 ($x=0$) 处, 杆由于正的纵向位移 u 与纵向? 变 $\partial u / \partial x$ 所受的力必定等于弹簧力、阻尼力与惯性力的总合, 即

$$AE \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = k_1 u(0, t) + c_1 \frac{\partial u}{\partial t}(0, t) + m_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, t) \quad (\text{E. 1})$$

类似地, 在右端 ($x=l$) 处, 由于正的 u 与 $\partial u / \partial x$, 杆所受的力必定等于弹簧力、阻尼力与惯性力的和的负值, 即

$$AE \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -k_2 u(l, t) - c_2 \frac{\partial u}{\partial t}(l, t) - m_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(l, t) \quad (\text{E. 2})$$

8.3.2 振型函数的正交性

杆的纵向振动的振型函数满足正交关系

$$\int_0^l U_i(x) U_j(x) dx = 0 \quad (8.53)$$

其中, $U_i(x)$ 与 $U_j(x)$ 分别表示相对于第 i 阶与第 j 阶固有频率 ω_i 与 ω_j 的振型函数。若 $u(x, t) = U_i(x)T(t)$ 与 $u(x, t) = U_j(x)T(t)$ 假设为方程的解, 则式(8.49)为

$$c^2 \frac{d^2 U_i(x)}{dx^2} + \omega_i^2 U_i(x) = 0 \quad \text{或} \quad c^2 U_i''(x) + \omega_i^2 U_i(x) = 0 \quad (8.54)$$

和

$$c^2 \frac{d^2 U_j(x)}{dx^2} + \omega_j^2 U_j(x) = 0 \quad \text{或} \quad c^2 U_j''(x) + \omega_j^2 U_j(x) = 0 \quad (8.55)$$

其中, $U_i'' = \frac{d^2 U_i}{dx^2}$ 和 $U_j'' = \frac{d^2 U_j}{dx^2}$ 。将式(8.54)乘以 U_j , 式(8.55)乘以 U_i , 则有

$$c^2 U_j'' U_i + \omega_i^2 U_i U_j = 0 \quad (8.56)$$

$$c^2 U_i'' U_j + \omega_j^2 U_j U_i = 0 \quad (8.57)$$

从式(8.56)减去式(8.57), 并在 $0 \sim l$ 区间内积分得

$$\begin{aligned} \int_0^l U_i U_j dx &= -\frac{c^2}{\omega_i^2 - \omega_j^2} \int_0^l (U_i'' U_j - U_j'' U_i) dx \\ &= -\frac{c^2}{\omega_i^2 - \omega_j^2} (U_i' U_j - U_j' U_i) \Big|_0^l \end{aligned} \quad (8.58)$$

式(8.58)的右边对边界条件的任意组合, 都容易验证等于零。例如, 杆在 $x=0$ 端固定, 在 $x=l$ 处自由, 则有

$$u(0, t) = 0, t \geq 0 \quad \text{或} \quad U(0) = 0 \quad (8.59)$$

$$\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0, t \geq 0 \quad \text{或} \quad U'(l) = 0 \quad (8.60)$$

由于式(8.60)中 $U' = 0$, 则 $(U_i' U_j - U_j' U_i)|_{x=l} = 0$; 由于式(8.59)中 $U = 0$, 则 $(U_i' U_j - U_j' U_i)|_{x=0} = 0$ 。故式(8.58)可以简化为式(8.53), 这就是振型函数的正交性。

例 8.3 求一端固定、另一端自由的杆的固有频率与自由振动的解。

解: 令杆在 $x=0$ 处固定, 在 $x=l$ 处为自由端, 则边界条件可以表示为

$$u(0, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (E.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (E.2)$$

将式(E.1)代入式(8.51)中可得 $A=0$, 得用式(E.2)可得

$$B \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega l}{c} = 0 \quad \text{或} \quad \cos \frac{\omega l}{c} = 0 \quad (E.3)$$

因此固有频率为

$$\frac{\omega_n l}{c} = (2n+1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

或

$$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi c}{2l}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{E. 4})$$

于是式(8.49)的全解(自由振动)运用振型叠加法可以表示为

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \left[C_n \cos \frac{(2n+1)c\pi t}{2l} + D_n \sin \frac{(2n+1)c\pi t}{2l} \right] \end{aligned} \quad (\text{E. 5})$$

其中, 常量 C_n 与 D_n 的值可以根据初始条件确定, 见式(8.33)与式(8.34):

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx \quad (\text{E. 6})$$

$$D_n = \frac{4}{(2n+1)c\pi} \int_0^l \dot{u}_0(x) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx \quad (\text{E. 7})$$

例 8.4 求一端为固定端、另一端附着一质量块的杆的固有频率, 如图 8.8 所示。

解: 杆轴向振动的控制方程由式(8.49)给出, 其解由式(8.51)给出。固定端($x=0$)处的边界条件为

$$u(0, t) = 0 \quad (\text{E. 1})$$

由此可知式(8.51)中 $A=0$ 。在 $x=l$ 处, 杆所受拉力等于振动质量 M 的惯性力, 则

$$AE \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(l, t) \quad (\text{E. 2})$$

根据式(8.51), 式(E.2)可以表示为

$$AE \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega l}{c} (C \cos \omega t + D \sin \omega t) = M \omega^2 \sin \frac{\omega l}{c} (C \cos \omega t + D \sin \omega t)$$

即

$$AE \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega l}{c} = M \omega^2 \sin \frac{\omega l}{c}$$

或

$$\alpha \tan \alpha = \beta \quad (\text{E. 3})$$

其中

$$\alpha = \frac{\omega l}{c} \quad (\text{E. 4})$$

$$\beta = \frac{AE l}{c^2 M} = \frac{A \rho l}{M} = \frac{m}{M} \quad (\text{E. 5})$$

式中, m 为杆的质量。式(E.3)即为频率方程, 其解为系统的固有频率。对不同的参数 β 的值, 前 2 阶固有频率在表 8.2 中给出。

若杆的质量相对于附加质量可以忽略, 即 $m \approx 0$, 则

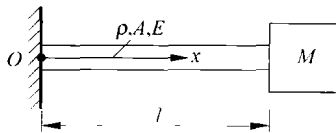


图 8.8 端部具有集中质量的杆

表 8.2 对不同参数 β 值的前2阶固有频率

α 取值	参数 β 的值				
	0.01	0.1	1.0	10.0	100.0
α_1 的值, 其中 $\omega_1 = \frac{\alpha_1 c}{l}$	0.1000	0.3113	0.8602	1.4291	1.5549
α_2 的值, 其中 $\omega_2 = \frac{\alpha_2 c}{l}$	3.1448	3.1736	3.4267	4.3063	4.6658

$$c = \left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2} = \left(\frac{EA l}{m}\right)^{1/2} \rightarrow \infty \quad \text{以及} \quad \alpha = \frac{\omega l}{c} \rightarrow 0$$

在这种情况下,

$$\tan \frac{\omega l}{c} \simeq \frac{\omega l}{c}$$

频率方程式(E.3)可以改写为

$$\left(\frac{\omega l}{c}\right)^2 = \beta$$

此式给出了基频的近似值,即

$$\omega_1 = \frac{c}{l} \beta^{1/2} = \frac{c}{l} \left(\frac{\rho A l}{M}\right)^{1/2} = \left(\frac{EA}{l M}\right)^{1/2} = \left(\frac{g}{\delta_s}\right)^{1/2}$$

其中 $\delta_s = \frac{M g l}{EA}$ 表示在载荷 $M g$ 的作用下,杆的静伸长。

例 8.5 横截面面积为 A 、密度为 ρ 、弹性模量为 E 、长为 l 的等截面杆,一端固定、另一端自由,其自由端受轴力 F_0 的作用,如图 8.9(a)所示。若 F_0 突然去掉,求其振动规律。

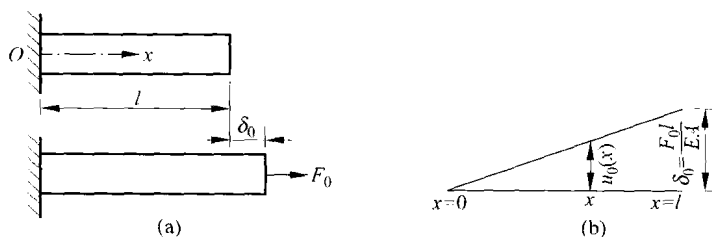


图 8.9 末端承受轴向力的杆

解: 由于 F_0 的作用,杆的拉应变为

$$\epsilon = \frac{F_0}{EA}$$

在力 F_0 去掉前杆的位移(初始位移)为(见图 8.9(b))

$$u_0 = u(x, 0) = \varepsilon x = \frac{F_0 x}{EA}, \quad 0 \leq x \leq l \quad (\text{E. 1})$$

由于初始速度为零, 则有

$$\dot{u}_0 = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l \quad (\text{E. 2})$$

一端固定、另一端自由的杆的通解由例 8.3 中的式(E.5)给定:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \left[C_n \cos \frac{(2n+1)c\pi t}{2l} + D_n \sin \frac{(2n+1)c\pi t}{2l} \right] \end{aligned} \quad (\text{E. 3})$$

其中, C_n 与 D_n 可由例 8.3 中的式(E.6)与式(E.7)给定。由于 $\dot{u}_0 = 0$, 则 $D_n = 0$ 。利用例 8.3 中的式(E.6), 则有

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{F_0 x}{EA} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx = \frac{8F_0 l}{EA\pi^2} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \quad (\text{E. 4})$$

代入式(E.3)后得

$$u(x, t) = \frac{8F_0 l}{EA\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2n+1)c\pi t}{2l} \quad (\text{E. 5})$$

式(E.3)和式(E.5)表示杆上某点 $x=x_0$ 处的运动是振幅为 $C_n \sin \frac{(2n+1)\pi x_0}{2l}$, 相应的圆频率为 $\frac{(2n+1)\pi c}{2l}$ 的各次谐波的合成。

8.4 圆杆或轴的扭转振动

图 8.10 所示为在单位长度上所受的力为 $f(x, t)$ 的变截面轴。若 $\theta(x, t)$ 表示横截面的扭转角, 则扭转变形与扭矩 $M_t(x, t)$ 之间的关系为

$$M_t(x, t) = GJ(x) \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \quad (8.61)$$

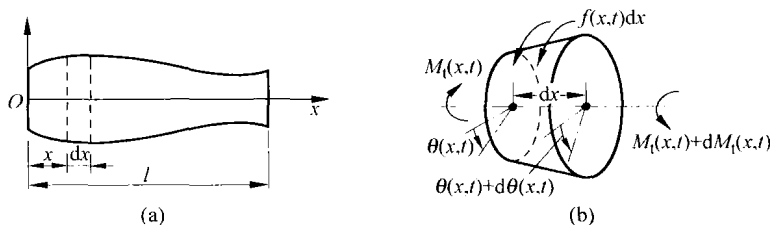


图 8.10 轴的扭转振动

其中, G 为剪切弹性模量; $GJ(x)$ 为扭转刚度; $J(x)$ 表示圆形横截面的极惯性矩。若轴的单位长度的转动惯量为 I_0 , 则作用在长为 dx 的单元上的惯性扭矩为

$$I_0 dx \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

因为作用在微单元上的外力为 $f(x, t)$, 则应用牛顿第二运动定律得运动微分方程为

$$(M_l + dM_l) + f dx - M_l = I_0 dx \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (8.62)$$

将 dM_l 表示为

$$\frac{\partial M_l}{\partial x} dx$$

利用式(8.61), 则变截面轴的强迫扭转振动的微分方程为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[GJ(x) \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \right] + f(x, t) = I_0(x) \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} \quad (8.63)$$

对于等截面轴, 式(8.63)变为如下形式:

$$GJ \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t) = I_0 \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} \quad (8.64)$$

自由振动时, 上式简化为

$$c^2 \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} \quad (8.65)$$

其中

$$c = \sqrt{\frac{GJ}{I_0}} \quad (8.66)$$

注意: 式(8.63)~(8.66)类似于弦的横向振动与杆的纵向振动的相应表达式。若轴的横截面不变, $I_0 = \rho J$, 则式(8.66)变为

$$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (8.67)$$

若轴在 $t=0$ 时的角位移为 $\theta_0(x)$, 角速度为 $\dot{\theta}_0(x)$, 则初始条件表示为

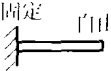

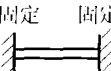
$$\left. \begin{aligned} \theta(x, t=0) &= \theta_0(x) \\ \frac{\partial \theta}{\partial t}(x, t=0) &= \dot{\theta}_0(x) \end{aligned} \right\} \quad (8.68)$$

式(8.65)的通解可以表示为

$$\theta(x, t) = \left(A \cos \frac{\omega x}{c} + B \sin \frac{\omega x}{c} \right) (C \cos \omega t + D \sin \omega t) \quad (8.69)$$

等截面轴的边界条件, 相应的频率方程及振型函数如表 8.3 所示。

表 8.3 等截面轴扭转振动的边界条件

杆的端点条件	边界条件	频率方程	振型函数	固有频率
固定 自由 	$\theta(0, t) = 0$ $\frac{\partial \theta}{\partial x}(l, t) = 0$	$\cos \frac{\omega l}{c} = 0$	$\Theta(x) = C_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}$	$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi c}{2l}, \quad n=0, 1, 2, \dots$
自由 自由 	$\frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) = 0$ $\frac{\partial \theta}{\partial x}(l, t) = 0$	$\sin \frac{\omega l}{c} = 0$	$\Theta(x) = C_n \cos \frac{n\pi x}{l}$	$\omega_n = \frac{n\pi c}{l}, \quad n=0, 1, 2, \dots$
固定 固定 	$\theta(0, t) = 0$ $\theta(l, t) = 0$	$\sin \frac{\omega l}{c} = 0$	$\Theta(x) = C_n \cos \frac{n\pi x}{l}$	$\omega_n = \frac{n\pi c}{l}, \quad n=1, 2, 3, \dots$

例 8.6 求图 8.11 所示的平面铣刀当自由端固定时刀杆的固有频率。假设刀杆的扭转刚度为 GJ , 铣刀的转动惯量为 I_0 。

解: 根据式 (8.69) 给出的通解, 利用固定端的边界条件 $\theta(0, t) = 0$, 得 $A = 0$ 。 $x = l$ 处的边界条件可以表述为

$$GJ \frac{\partial \theta(l, t)}{\partial x} = -I_0 \frac{\partial^2 \theta(l, t)}{\partial t^2} \quad (\text{E. 1})$$

即

$$BGJ \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega l}{c} = BI_0 \omega^2 \sin \frac{\omega l}{c}$$

或

$$\frac{\omega l}{c} \tan \frac{\omega l}{c} = \frac{J_{\text{rod}}}{I_0} = \frac{J_{\text{rod}}}{I_0} \quad (\text{E. 2})$$

其中, $J_{\text{rod}} = J\rho l$ 。式 (E. 2) 可以表示为

$$\alpha \tan \alpha = \beta, \quad \text{其中 } \alpha = \frac{\omega l}{c}, \beta = \frac{J_{\text{rod}}}{I_0} \quad (\text{E. 3})$$

式 (E. 3) 的解, 即系统的固有频率, 可类似于例 8.4 求得。

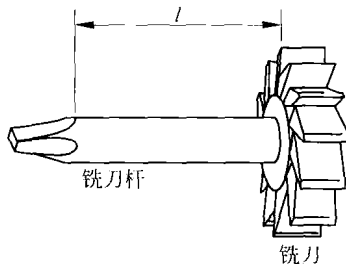


图 8.11 平面铣刀

8.5 梁的横向振动

8.5.1 运动微分方程

考虑如图 8.12(b) 所示的梁单元的受力, 其中, $M(x, t)$ 为弯矩, $V(x, t)$ 是剪力, $f(x, t)$ 是梁单位长度上作用的外力。由于梁单元的惯性力为

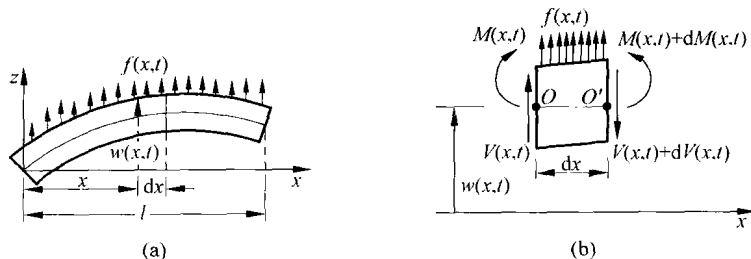


图 8.12 梁的弯曲

$$\rho A(x) dx \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}$$

沿 z 方向的作用力方程为

$$-(V + dV) + f(x,t)dx + V = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (8.70)$$

其中, ρ 为质量密度; $A(x)$ 为梁横截面的面积。微单元中各力对过 O 点的 y 轴的力矩方程为

$$(M + dM) - (V + dV)dx + f(x,t)dx \frac{dx}{2} - M = 0 \quad (8.71)$$

其中

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx, \quad dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx$$

忽略含 dx 高次幂的项, 式(8.70)与式(8.71)可以写为

$$-\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} + f(x,t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (8.72)$$

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} - V(x,t) = 0 \quad (8.73)$$

利用式(8.73)中的关系 $V = \partial M / \partial x$, 式(8.72)变为

$$-\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (8.74)$$

由梁弯曲的基本理论(即著名的欧拉-伯努利理论或细梁理论), 弯矩与挠度间的关系可以表示为

$$M(x,t) = EI(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \quad (8.75)$$

其中, E 为弹性模量; $I(x)$ 为梁横截面对 y 轴的惯性矩。将式(8.75)代入式(8.74)中, 得变截面梁横向强迫振动的运动微分方程为

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] + \rho A(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t) \quad (8.76)$$

对等截面梁,式(8.76)简化为

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t) \quad (8.77)$$

对自由振动, $f(x,t)=0$, 于是运动微分方程变为

$$c^2 \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (8.78)$$

其中

$$c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (8.79)$$

8.5.2 初始条件

由于运动微分方程涉及对时间 t 的二阶导数与对 x 的四阶导数, 因而为得到唯一确定的解 $w(x,t)$, 需要 2 个初始条件与 4 个边界条件。通常把在 $t=0$ 时的横向位移与速度值分别记为 $w_0(x)$ 与 $\dot{w}_0(x)$, 于是初始条件为

$$w(x, t=0) = w_0(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x, t=0) = \dot{w}_0(x) \quad (8.80)$$

8.5.3 自由振动

可以利用分离变量法求自由振动的解, 即令

$$w(x, t) = W(x)T(t) \quad (8.81)$$

将式(8.81)代入式(8.78), 经整理后有

$$\frac{c^2}{W(x)} \frac{d^4 W(x)}{dx^4} = -\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = a = \omega^2 \quad (8.82)$$

其中, $a = \omega^2$ 为正的常量(见习题 8.43)。式(8.82)可以表示为两个式子:

$$\frac{d^4 W(x)}{dx^4} - \beta^4 W(x) = 0 \quad (8.83)$$

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0 \quad (8.84)$$

其中

$$\beta^4 = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \quad (8.85)$$

式(8.84)的解可以表示为

$$T(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (8.86)$$

其中, A 与 B 为常量, 可以根据初始条件确定。为求式(8.83)的解, 假定

$$W(x) = C e^{sx} \quad (8.87)$$

其中, C 与 s 为常量。将式(8.87)代入(8.83)后得

$$s^4 - \beta^4 = 0 \quad (8.88)$$

该方程的根为

$$s_{1,2} = \pm \beta, \quad s_{3,4} = \pm i\beta \quad (8.89)$$

因此方程(8.83)的解为

$$W(x) = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} + C_3 e^{i\beta x} + C_4 e^{-i\beta x} \quad (8.90)$$

其中, C_1, C_2, C_3 与 C_4 为常量。式(8.90)也可以表示为

$$W(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x + C_3 \cosh \beta x + C_4 \sinh \beta x \quad (8.91)$$

或

$$\begin{aligned} W(x) = & C_1 (\cos \beta x + \cosh \beta x) + C_2 (\cos \beta x - \cosh \beta x) \\ & + C_3 (\sin \beta x + \sinh \beta x) + C_4 (\sin \beta x - \sinh \beta x) \end{aligned} \quad (8.92)$$

在每种不同的形式下, C_1, C_2, C_3 与 C_4 为不同的常量。可以由边界条件确定。梁的固有频率可由式(8.85)计算, 即

$$\omega = \beta^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = (\beta l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \quad (8.93)$$

函数 $W(x)$ 称为梁的固有振型函数, ω 为振动的固有频率。式(8.91)或式(8.92)中的未知常量 C_1, C_2, C_3 与 C_4 以及式(8.93)中的 β 值可以根据梁的边界条件确定。

8.5.4 边界条件

常见的梁的边界条件如下:

(1) 自由端: 弯矩和剪力分别为零, 即

$$M(x) = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad V(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (8.94)$$

(2) 简支(铰支)端: 挠度和弯矩分别为零, 即

$$w = 0, \quad M(x) = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (8.95)$$

(3) 固定端: 挠度和转角分别为零, 即

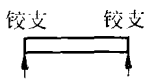
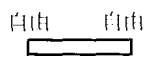
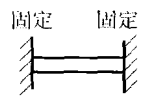
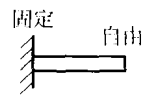
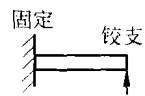
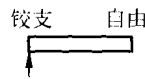
$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (8.96)$$

具有常见边界条件的梁的频率方程、振型与固有频率见表 8.4。现在考虑梁的其他一些可能的边界条件。

(4) 梁的两端与弹簧、阻尼器和质量块相连(见图 8.13(a))。当梁的末端产生横向位移 w 、转角 $\partial w / \partial x$ 、速度 $\partial w / \partial t$ 与加速度 $\partial^2 w / \partial t^2$ 时, 由于弹簧、阻尼器以及质量块所受的阻力分别与 w 、 $\partial w / \partial t$ 与 $\partial^2 w / \partial t^2$ 成比例, 而在该末端阻力由剪力来平衡, 于是

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = a \left[kw + c \frac{\partial w}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] \quad (8.97)$$

表 8.4 常见的横向振动梁的边界条件

梁的端点条件	频率方程	振型函数	$\beta_n l$ 的值
	$\sin \beta_n l = 0$	$W_n(x) = C_n [\sin \beta_n x]$	$\beta_1 l = \pi$ $\beta_2 l = 2\pi$ $\beta_3 l = 3\pi$ $\beta_4 l = 4\pi$
	$\cos \beta_n l \cosh \beta_n l = 1$	$W_n(x) = C_n [\sin \beta_n x + \sinh \beta_n x + \alpha_n (\cos \beta_n x + \cosh \beta_n x)]$, 其中 $\alpha_n = \frac{\sin \beta_n l - \sinh \beta_n l}{\cosh \beta_n l - \cos \beta_n l}$	$\beta_1 l = 4.730\ 041$ $\beta_2 l = 7.853\ 205$ $\beta_3 l = 10.995\ 608$ $\beta_4 l = 14.137\ 165$ (对刚体振型, $\beta l = 0$)
	$\cos \beta_n l \cosh \beta_n l = 1$	$W_n(x) = C_n [\sinh \beta_n x - \sin \beta_n x + \alpha_n (\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x)]$, 其中 $\alpha_n = \frac{\sinh \beta_n l - \sin \beta_n l}{\cos \beta_n l - \cosh \beta_n l}$	$\beta_1 l = 4.730\ 041$ $\beta_2 l = 7.853\ 205$ $\beta_3 l = 10.995\ 608$ $\beta_4 l = 14.137\ 165$
	$\cos \beta_n l \cosh \beta_n l = -1$	$W_n(x) = C_n [\sin \beta_n x - \sinh \beta_n x - \alpha_n (\cos \beta_n x - \cosh \beta_n x)]$, 其中 $\alpha_n = \frac{\sin \beta_n l + \sinh \beta_n l}{\cosh \beta_n l + \cos \beta_n l}$	$\beta_1 l = 1.875\ 104$ $\beta_2 l = 4.694\ 091$ $\beta_3 l = 7.854\ 757$ $\beta_4 l = 10.995\ 541$
	$\tan \beta_n l - \tanh \beta_n l = 0$	$W_n(x) = C_n [\sin \beta_n x - \sinh \beta_n x + \alpha_n (\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x)]$, 其中 $\alpha_n = \frac{\sin \beta_n l - \sinh \beta_n l}{\cos \beta_n l - \cosh \beta_n l}$	$\beta_1 l = 3.926\ 602$ $\beta_2 l = 7.068\ 583$ $\beta_3 l = 10.210\ 176$ $\beta_4 l = 13.351\ 768$
	$\tan \beta_n l - \tanh \beta_n l = 0$	$W_n(x) = C_n (\sin \beta_n x + \alpha_n \sinh \beta_n x)$, 其中 $\alpha_n = \frac{\sin \beta_n l}{\sinh \beta_n l}$	$\beta_1 l = 3.926\ 602$ $\beta_2 l = 7.068\ 583$ $\beta_3 l = 10.210\ 176$ $\beta_4 l = 13.351\ 768$ (对刚体振型, $\beta l = 0$)

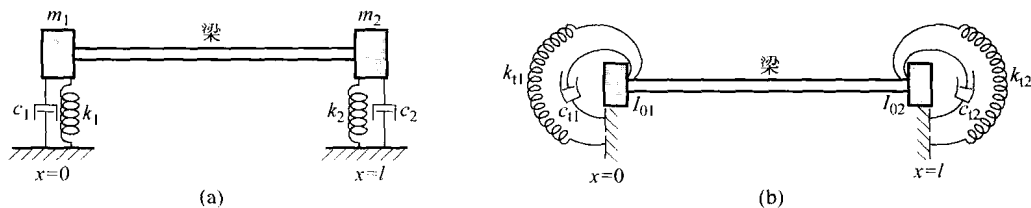


图 8.13 两端与弹簧-阻尼-质量块相连的梁

其中,对梁的左端 $a = -1$,对右端 $a = 1$ 。此外,弯矩必为零,因此

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (8.98)$$

(5) 梁的末端与扭转弹簧、扭转阻尼器与转动惯性元件相连(见图 8.16(b))。这种情况下,边界条件为

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = a \left[k_t \frac{\partial w}{\partial x} + c_t \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + I_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \right] \quad (8.99)$$

其中对梁左端 $a = -1$, 对梁的右端 $a = 1$, 以及

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (8.100)$$

8.5.5 振型函数的正交性

振型函数 $W(x)$ 满足式(8.83):

$$c^2 \frac{d^4 W(x)}{dx^4} - \omega^2 W(x) = 0 \quad (8.101)$$

令 $W_i(x)$ 与 $W_j(x)$ 为相对于固有频率 ω_i 与 ω_j ($i \neq j$) 的振型函数, 则

$$c^2 \frac{d^4 W_i}{dx^4} - \omega_i^2 W_i = 0 \quad (8.102)$$

以及

$$c^2 \frac{d^4 W_j}{dx^4} - \omega_j^2 W_j = 0 \quad (8.103)$$

式(8.102)乘以 W_j , 式(8.103)乘以 W_i , 然后将所得的方程相减后, 从 0 积分到 l , 得

$$\int_0^l \left[c^2 \frac{d^4 W_i}{dx^4} W_j - \omega_i^2 W_i W_j \right] dx - \int_0^l \left[c^2 \frac{d^4 W_j}{dx^4} W_i - \omega_j^2 W_j W_i \right] dx = 0$$

或

$$\int_0^l W_i W_j dx = - \frac{c^2}{\omega_i^2 - \omega_j^2} \int_0^l [W_i''' W_j - W_i W_j'''] dx \quad (8.104)$$

式中撇号“'”代表对 x 的导数。式(8.104)的右边可以通过分步积分求得:

$$\int_0^l W_i W_j dx = - \frac{c^2}{\omega_i^2 - \omega_j^2} [W_i W_j''' - W_j W_i''' + W_j' W_i'' - W_i' W_j''] \Big|_0^l \quad (8.105)$$

可以证明式(8.105)的右边对于自由、固定或简支条件的任意组合均为零。在自由端, 弯矩和剪力等于零, 则

$$W'' = 0, \quad W''' = 0 \quad (8.106)$$

对固定端, 挠度与转角等于零, 即

$$W = 0, \quad W' = 0 \quad (8.107)$$

在简支端, 弯矩与挠度等于零, 即

$$W'' = 0, \quad W = 0 \quad (8.108)$$

故对于式(8.106)~式(8.108)中各边界条件的任意组合,在 $x=0$ 与 $x=l$ 处,式(8.105)中等号右边的每一项均为零,因此式(8.105)简化为

$$\int_0^l W_i W_j dx = 0 \quad (8.109)$$

这就是梁横向振动振型函数正交性的含义。

例 8.7 确定在 $x=0$ 处固定、 $x=l$ 处简支的等截面梁振动的固有频率。

解: 边界条件可以表示为

$$W(0) = 0 \quad (E.1)$$

$$\frac{dW}{dx}(0) = 0 \quad (E.2)$$

$$W(l) = 0 \quad (E.3)$$

$$EI \frac{d^2 W}{dx^2}(l) = 0 \quad \text{或} \quad \frac{d^2 W}{dx^2}(l) = 0 \quad (E.4)$$

将条件(E.1)代入式(8.91)得

$$C_1 + C_3 = 0 \quad (E.5)$$

由式(E.2)与式(8.91)得

$$\left. \frac{dW}{dx} \right|_{x=0} = \beta [-C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x + C_3 \sinh \beta x + C_4 \cosh \beta x]_{x=0} = 0$$

或

$$\beta [C_2 + C_4] = 0 \quad (E.6)$$

于是解,即式(8.91)变为

$$W(x) = C_1 (\cos \beta x - \cosh \beta x) + C_2 (\sin \beta x - \sinh \beta x) \quad (E.7)$$

将边界条件式(E.3)~式(E.4)代入式(E.7),有

$$C_1 (\cos \beta l - \cosh \beta l) + C_2 (\sin \beta l - \sinh \beta l) = 0 \quad (E.8)$$

$$-C_1 (\cos \beta l + \cosh \beta l) - C_2 (\sin \beta l + \sinh \beta l) = 0 \quad (E.9)$$

因为要求 C_1 与 C_2 有非零解,则它们的系数行列式必为零,即

$$\begin{vmatrix} \cos \beta l - \cosh \beta l & \sin \beta l - \sinh \beta l \\ -(\cos \beta l + \cosh \beta l) & -(\sin \beta l + \sinh \beta l) \end{vmatrix} = 0 \quad (E.10)$$

展开行列式,则得频率方程为

$$\cos \beta l \sinh \beta l - \sin \beta l \cosh \beta l = 0 \quad \text{或} \quad \tan \beta l = \tanh \beta l \quad (E.11)$$

该方程的根 $\beta_n l$ 表示振动系统的固有频率:

$$\omega_n = (\beta_n l)^2 \left(\frac{EI}{\rho A l^4} \right)^{1/2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (E.12)$$

其中,满足式(E.11)的各 $\beta_n l$ ($n=1, 2, \dots$) 的值已在表 8.4 中给出。若相对于 β_n 的 C_2 值表示为 C_{2n} , 根据式(E.8)中的 C_{1n} , C_{2n} 可以表示为

$$C_{2n} = -C_{1n} \left(\frac{\cos \beta_n l - \cosh \beta_n l}{\sin \beta_n l - \sinh \beta_n l} \right) \quad (E.13)$$

因此式(E.7)为

$$W_n(x) = C_{1n} \left[(\cos \beta_n x - \cosh \beta_n x) - \frac{\cos \beta_n l - \cosh \beta_n l}{\sin \beta_n l - \sinh \beta_n l} (\sin \beta_n x - \sinh \beta_n x) \right] \quad (\text{E. 14})$$

根据式(8.81),系统的固有振动为

$$w_n(x, t) = W_n(x) (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \quad (\text{E. 15})$$

$W_n(x)$ 由式(E.14)给出。固定-简支梁的通解可以表示为固有振动的和,即

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x, t) \quad (\text{E. 16})$$

8.5.6 强迫振动

可以运用振型叠加法求梁的强迫振动解。假设梁的挠度为

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) q_n(t) \quad (8.110)$$

其中, $W_n(x)$ 为第 n 阶固有振型函数或满足微分方程(8.101)的特征函数:

$$EI \frac{d^4 W_n(x)}{dx^4} - \omega_n^2 \rho A W_n(x) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.111)$$

$q_n(t)$ 为对应的广义坐标。将式(8.110)代入强迫振动方程(8.77)中,得

$$EI \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^4 W_n(x)}{dx^4} q_n(t) + \rho A \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) \frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} = f(x, t) \quad (8.112)$$

根据式(8.111),式(8.112)可以表示为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 W_n(x) q_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) \frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} = \frac{1}{\rho A} f(x, t) \quad (8.113)$$

用 $W_m(x)$ 乘以式(8.113),再从 0 积分到 l ,利用正交条件即式(8.109),得

$$\frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 q_n(t) = \frac{1}{\rho A b} Q_n(t) \quad (8.114)$$

其中, $Q_n(t)$ 称为相对于 $q_n(t)$ 的广义力,其值为

$$Q_n(t) = \int_0^l f(x, t) W_n(x) dx \quad (8.115)$$

常量 b 为

$$b = \int_0^l W_n^2(x) dx \quad (8.116)$$

本质上,式(8.114)可以视为无阻尼单自由度系统的运动方程。运用杜哈美积分,式(8.114)的解可以表示为

$$q_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t + \frac{1}{\rho A b \omega_n} \int_0^t Q_n(\tau) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau \quad (8.117)$$

其中,式(8.117)右边的前两项表示瞬态或自由振动(由初始条件引起),第3项表示稳

态振动(由力函数引起)。式(8.117)对于 $n=1, 2, \dots$ 一旦解出, 根据式(8.110)就可以求得全解。

例 8.8 求如图 8.14 所示简支梁在 $x=a$ 处受简谐力 $f(x, t)=f_0 \sin \omega t$ 作用时的稳态响应。

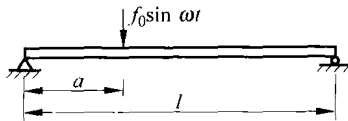


图 8.14 简谐力作用下的简支梁

解: 简支梁的固有振型函数为(见表 8.4 或习题 8.31)

$$W_n(x) = \sin \beta_n x = \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (\text{E. 1})$$

其中

$$\beta_n l = n\pi \quad (\text{E. 2})$$

由式(8.115)确定的广义力为

$$Q_n(t) = \int_0^l f(x, t) \sin \beta_n x dx = f_0 \sin \frac{n\pi a}{l} \sin \omega t \quad (\text{E. 3})$$

由式(8.117)确定的梁的稳态响应为:

$$q_n(t) = \frac{1}{\rho A b \omega_n} \int_0^t Q_n(\tau) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau \quad (\text{E. 4})$$

其中

$$b = \int_0^l W_n^2(x) dx = \int_0^l \sin^2 \beta_n x dx = \frac{l}{2} \quad (\text{E. 5})$$

故形如式(E. 4)的解可以表示为

$$q_n(t) = \frac{2f_0}{\rho A l} \frac{\sin \frac{n\pi a}{l}}{\omega_n^2 - \omega^2} \sin \omega t \quad (\text{E. 6})$$

则由式(8.110)确定的梁的响应为

$$w(x, t) = \frac{2f_0}{\rho A l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2} \sin \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \omega t \quad (\text{E. 7})$$

8.5.7 轴向力的影响

讨论在轴向力作用下梁的振动问题可以利用索的振动理论。例如, 虽然索的振动可以简化为等效的弦来处理, 但许多索会发生交变挠曲导致的疲劳失效。这个交变的挠曲是由于微风中旋涡不断从索中脱落引起的。因而在研究索的疲劳失效时, 必须考虑轴向力与弯曲刚度对横向振动的影响。

为讨论轴向力 $P(x, t)$ 对梁弯曲振动的影响, 考虑图 8.15 所示的梁单元的运动方程。对于垂向振动, 有

$$-(V + dV) + f dx + V + (P + dP) \sin(\theta + d\theta) - P \sin \theta = \rho A dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (8.118)$$

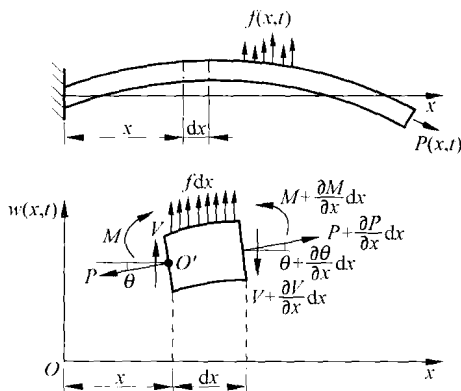


图 8.15 在轴力作用下的梁单元

类似地, 对于相对于 O' 点的转动, 有

$$(M + dM) - (V + dV) dx + f dx \frac{dx}{2} - M = 0 \quad (8.119)$$

对于小变形, 可作下列近似

$$\begin{aligned} \sin(\theta + d\theta) &\simeq \theta + d\theta = \theta + \frac{\partial \theta}{\partial x} dx \\ &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \end{aligned}$$

根据上式和式(8.118)、式(8.119)与式(8.75), 可得轴向力 P 为常量时的运动微分方程

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f \quad (8.120)$$

对于等截面梁, 若无横向外力, 式(8.120)简化为

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (8.121)$$

可以采用分离变量法求式(8.121)的解, 即令

$$w(x, t) = W(x)(A \cos \omega t + B \sin \omega t) \quad (8.122)$$

将式(8.122)代入式(8.121), 有

$$EI \frac{d^4 W}{dx^4} - P \frac{d^2 W}{dx^2} - \rho A \omega^2 W = 0 \quad (8.123)$$

假设方程(8.123)的解 $W(x)$ 为

$$W(x) = C e^{sx} \quad (8.124)$$

则得特征方程为

$$s^4 - \frac{P}{EI} s^2 - \frac{\rho A \omega^2}{EI} = 0 \quad (8.125)$$

方程(8.125)的根为

$$s_1^2, s_2^2 = \frac{P}{2EI} \pm \left(\frac{P^2}{4E^2 I^2} + \frac{\rho A \omega^2}{EI} \right)^{1/2} \quad (8.126)$$

于是方程(8.123)的解可以表示为

$$W(x) = C_1 \cosh s_1 x + C_2 \sinh s_1 x + C_3 \cosh s_2 x + C_4 \sinh s_2 x \quad (8.127)$$

其中, 常量 $C_1 \sim C_4$ 可以根据边界条件确定。

例 8.9 求简支梁受轴向压力作用时横向振动的固有频率。

解: 边界条件为

$$W(0) = 0 \quad (\text{E. 1})$$

$$\frac{d^2 W}{dx^2}(0) = 0 \quad (\text{E. 2})$$

$$W(l) = 0 \quad (\text{E. 3})$$

$$\frac{d^2 W}{dx^2}(l) = 0 \quad (\text{E. 4})$$

根据式(E. 1)与式(E. 2), 可得 $C_1 = C_3 = 0$, 于是

$$W(x) = C_2 \sinh s_1 x + C_4 \sin s_2 x \quad (\text{E. 5})$$

将式(E. 3)~式(E. 4)代入式(E. 5), 可得

$$\sinh s_1 l \sin s_2 l = 0 \quad (\text{E. 6})$$

由于 $\sinh s_1 l > 0$ (对于所有 $s_1 l \neq 0$), 该方程的唯一根为

$$s_2 l = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{E. 7})$$

于是式(E. 7)与式(8.126)给出了振动的固有频率:

$$\omega_n = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \left(n^4 + \frac{n^2 Pl^2}{\pi^2 EI} \right)^{1/2} \quad (\text{E. 8})$$

由于此处轴向力 P 为压力, 故应为负。此外, 由材料力学的知识可知, 简支梁的最小欧拉临界载荷为

$$P_{\text{cri}} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (\text{E. 9})$$

所以式(E. 8)可以写为

$$\omega_n = \frac{\pi^2}{l^2} \left(\frac{EI}{\rho A} \right)^{1/2} \left(n^4 - n^2 \frac{P}{P_{\text{cri}}} \right)^{1/2} \quad (\text{E. 10})$$

从该例可以得出下列结论:

- (1) 若 $P=0$, 则固有频率与表 8.4 所给简支梁的固有频率相同。
- (2) 若 $EI=0$, 则固有频率(见式(E. 8))退化为张紧弦的固有频率。
- (3) 若 $P>0$, 则固有频率随拉力使梁硬化而增加。
- (4) 当 $P \rightarrow P_{\text{cri}}$ 时, 对于 $n=1$, 固有频率趋于零。

8.5.8 转动惯量与剪切变形的影响

如果与梁的长度相比, 横截面的尺寸并不很小, 则需要考虑转动惯量和剪切变形的影响。该表述是由铁摩辛柯提出的^[8.10], 即为著名的粗梁理论或铁摩辛柯梁理论。考虑图 8.16 所示的梁单元, 若忽略剪切变形的影响, 则挠曲中心线 $O'T$ 的切线与面 $Q'R'$ 的法线

重合。由于剪切变形,挠曲中心线 $O'T$ 的切线不会垂直于面 $O'R'$ 。挠曲中心线 $O'T$ 的切线与面 $Q'R'$ 的法线 $D'N$ 间的夹角 γ 表示微单元的剪切变形。由于右侧面 $Q'R'$ 上的正的剪力向下,如图 8.16 所示,故有

$$\gamma = \phi - \frac{\partial w}{\partial x} \quad (8.128)$$

其中, ϕ 表示仅有弯曲变形时挠曲线的斜率。若只受剪力作用,则单元体的两侧面间只发生相对错动而不发生相对转动。弯矩 M 、剪力 V 与 ϕ 和 w 的关系可以表示为^①

$$M = EI \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (8.129)$$

和

$$V = kAG\gamma = kAG\left(\phi - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad (8.130)$$

其中, G 表示梁材料的剪切弹性模量; k 为常数,也称为铁摩辛柯剪切系数,其值取决于横截面的形状,对矩形截面, $k=5/6$, 圆形截面 $k=9/10$ ^[8,11]。

图 8.16 所示的微单元的运动微分方程可以推导如下:

(1) 对 z 方向的平动,有

$$\begin{aligned} & -[V(x,t) + dV(x,t)] + f(x,t)dx + V(x,t) \\ & = \rho A(x)dx \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = \text{微单元的平动惯性力} \end{aligned} \quad (8.131)$$

(2) 对绕过 D 点且平行于 y 轴的直线的转动,有

$$\begin{aligned} & [M(x,t) + dM(x,t)] + [V(x,t) + dV(x,t)]dx + f(x,t)dx \frac{dx}{2} - M(x,t) \\ & = \rho I(x)dx \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \text{微单元的转动惯性力矩} \end{aligned} \quad (8.132)$$

利用关系

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx \quad \text{和} \quad dM = \frac{\partial M}{\partial x}dx$$

以及式(8.129)和式(8.130),并忽略 dx 的二次项,式(8.131)与式(8.132)可以表示为

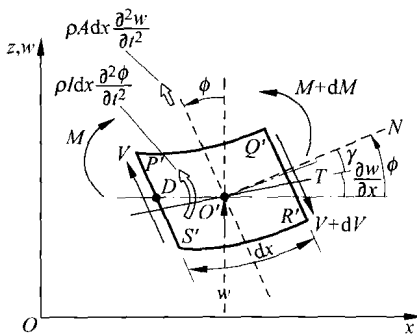


图 8.16 铁摩辛柯梁单元

① 式(8.129)与式(8.75)相似。式(8.130)可通过如下推导得到:

$$\text{剪力} = \text{剪应力} \times \text{面积} = \text{剪应变} \times \text{剪切模量} \times \text{面积}$$

或

$$V = \gamma GA$$

考虑横截面形状的影响,在其右端引入系数 k ,上式修正为 $V = k\gamma GA$ 。

$$-kAG\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+f(x,t)=\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (8.133)$$

$$EI\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-kAG\left(\phi-\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\rho I\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \quad (8.134)$$

求出式(8.133)中的 $\partial\phi/\partial x$ 后,将其代入式(8.134),则可得到等截面梁强迫振动的运动微分方程为

$$\begin{aligned} EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\rho I\left(1+\frac{E}{kG}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\rho^2 I}{kG}\frac{\partial^4 w}{\partial t^4} \\ +\frac{EI}{kAG}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\rho I}{kAG}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-f=0 \end{aligned} \quad (8.135)$$

对自由振动, $f=0$, 式(8.135)简化为

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\rho I\left(1+\frac{E}{kG}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\rho^2 I}{kG}\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}=0 \quad (8.136)$$

下列边界条件可用于求解方程(8.135)或方程(8.136):

(1) 固定端

$$\phi=w=0$$

(2) 简支(铰支)端

$$EI\frac{\partial\phi}{\partial x}=w=0$$

(3) 自由端

$$kAG\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\phi\right)=EI\frac{\partial\phi}{\partial x}=0$$

例 8.10 讨论转动惯量与剪切变形对简支梁固有频率的影响。

解: 定义

$$\alpha^2=\frac{EI}{\rho A} \quad \text{与} \quad r^2=\frac{I}{A} \quad (\text{E.1})$$

方程(8.136)可以写为

$$\alpha^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-r^2\left(1+\frac{E}{kG}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\rho r^2}{kG}\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}=0 \quad (\text{E.2})$$

可将式(E.2)的解表示为

$$w(x,t)=C\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\omega_n t \quad (\text{E.3})$$

容易验证它满足在 $x=0$ 与 $x=l$ 处的边界条件。此处 C 为常量, ω_n 为第 n 阶固有圆频率。

将式(E.3)代入式(E.2),则得频率方程为

$$\omega_n^4\left(\frac{\rho r^2}{kG}\right)-\omega_n^2\left(1+\frac{n^2\pi^2 r^2}{l^2}+\frac{n^2\pi^2 r^2}{l^2}\frac{E}{kG}\right)+\frac{\alpha^2 n^4\pi^4}{l^4}=0 \quad (\text{E.4})$$

不难看出,式(E.4)对于任意给定的 n 值为 ω_n^2 的二次方程式,显然有两个 ω_n 值满足

式(E.4)。较小的值对应于弯曲变形的振型,较大的值对应于剪切变形的振型。

对于3个不同的 E/kG 的值,由式(E.4)给出的 ω_n 与由经典理论给定的固有频率的比值绘制在图 8.17 中。^①

转动惯量与剪切变形的影响具有下列特点:

(1) 若只单独考虑转动惯量的影响,运动微分方程中将不包含剪切系数 k ,因而由式(8.136)得

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho I \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \quad (\text{E.5})$$

此种情况下,频率方程(E.4)简化为

$$\omega_n^2 = \frac{\alpha^2 n^4 \pi^4}{l^4 \left(1 + \frac{n^2 \pi^2 r^2}{l^2} \right)} \quad (\text{E.6})$$

(2) 若只考虑剪切变形的影响,运动微分方程将不包含源自式(8.134)的 $\rho I (\partial^2 \phi / \partial t^2)$ 项,于是得运动微分方程为

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{EI \rho}{kG} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \quad (\text{E.7})$$

相应的频率方程为

$$\omega_n^2 = \frac{\alpha^2 n^4 \pi^4}{l^4 \left(1 + \frac{n^2 \pi^2 r^2}{l^2} \frac{E}{kG} \right)} \quad (\text{E.8})$$

(3) 若转动惯量与剪切变形的影响均忽略,式(8.136)退化为经典的运动微分方程式(8.78),即

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{E.9})$$

式(E.4)变为

$$\omega_n^2 = \frac{\alpha^2 n^4 \pi^4}{l^4} \quad (\text{E.10})$$

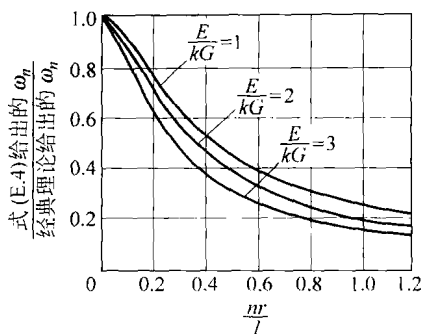


图 8.17 固有频率比的变化

8.5.9 其他影响

在文献[8.12]和[8.14]中,给出了关于变截面梁横向振动的讨论。在文献[8.15]中,给出了关于连续梁固有频率的讨论。在文献[8.16]中,讨论了置于弹性地基上的梁的动力学响应。在文献[8.18]和[8.19]中,讨论了支承弹性对梁固有频率的影响。在文献[8.20]中,讨论了弹性连接的铁摩辛柯梁固有振动问题的处理方法。在文献[8.30]中,作者对振动梁的精确解和近似解进行了比较。在文献[8.21]中,讨论了阻尼梁的稳态振动问题。

^① 推导运动微分方程(8.76)时,忽略了转动惯量与剪切变形的影响,该理论称为经典或欧拉-伯努利(Euler-Bernoulli)或细长梁理论。

8.6 薄膜的振动

薄膜是一受拉伸同时可忽略弯曲阻力的板,所以薄膜和板之间的关系与绳和梁之间的关系是一样的。鼓的蒙皮可以视为薄膜的例子。

8.6.1 运动微分方程

为推导薄膜的运动微分方程,考虑图 8.18 所示的在 xy 平面内边界曲线为 S 的薄膜。令 $f(x, y, t)$ 表示沿 z 方向作用的压力, P 表示在某点处张力的密度,它等于拉应力与薄膜厚度的乘积, P 的大小通常为常量。若考虑一单元面积 $dx dy$, 则作用在该单元与 y 轴和 x 轴平行的边上的力分别为 $P dx$ 和 $P dy$, 如图 8.18 所示。由于这些力的作用而引起的沿 z 方向的力分别为

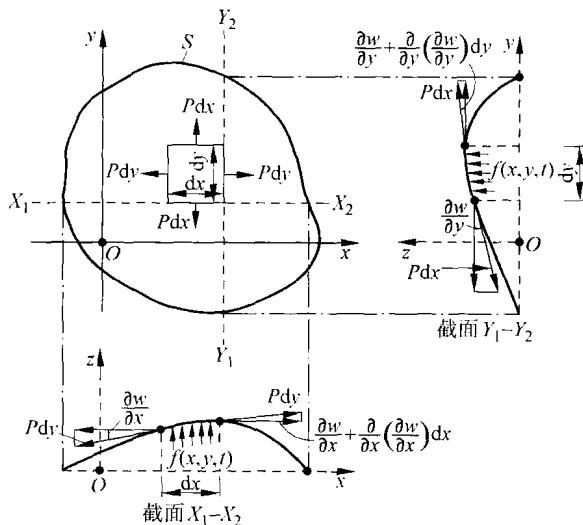


图 8.18 均匀张力作用下的薄膜

$$P \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy \quad \text{与} \quad P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy$$

沿 z 方向的压力为 $f(x, y, t) dx dy$, 惯性力为

$$\rho(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx dy$$

其中, $\rho(x, y)$ 为单位面积的质量。故薄膜横向强迫振动的运动微分方程为

$$P \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + f = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (8.137)$$

如果外力 $f(x, y, t) = 0$, 则可由式(8.137)得自由振动方程:

$$c^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (8.138)$$

其中

$$c = \left(\frac{P}{\rho} \right)^{1/2} \quad (8.139)$$

方程(8.137)与式(8.138)可以表示为

$$P \nabla^2 w + f = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (8.140)$$

与

$$c^2 \nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (8.141)$$

其中

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (8.142)$$

为拉普拉斯算子。

8.6.2 初始条件与边界条件

由于运动微方程(8.137)或(8.138)涉及关于 t, x 与 y 的二阶偏微分, 所以需要确定 2 个初始条件与 4 个边界条件以得到方程的唯一解。通常在 $t=0$ 时刻, 薄膜的位移与速度为 $w_0(x, y)$ 与 $\dot{w}_0(x, y)$, 因此初始条件可以表示为

$$w(x, y, 0) = w_0(x, y), \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x, y, 0) = \dot{w}_0(x, y) \quad (8.143)$$

边界条件一般为如下形式:

(1) 若薄膜在边界上的任意点 (x_1, y_1) 处固定, 有

$$w(x_1, y_1, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (8.144)$$

(2) 若薄膜在边界上的另一点 (x_2, y_2) 处沿 z 方向的横向变形是自由的, 则沿 z 方向的力必为零, 于是

$$P \frac{\partial w}{\partial n}(x_2, y_2, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (8.145)$$

其中, $\partial w / \partial n$ 表示 w 关于方向 n 的导数 (n 为点 (x_2, y_2) 处与边界垂直的方向)。

求薄膜振动微分方程的解见参考文献[8.23]~[8.25]。

例 8.11 求沿 x 与 y 轴方向边长分别为 a 与 b 的矩形薄膜自由振动的解。

解: 采用分离变量法, 假定 $w(x, y, t)$ 可以表示为

$$w(x, y, t) = W(x, y)T(t) = X(x)Y(y)T(t) \quad (E.1)$$

根据式(E.1)与式(8.138), 得

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \alpha^2 X(x) = 0 \quad (\text{E. 2})$$

$$\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \beta^2 Y(y) = 0 \quad (\text{E. 3})$$

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0 \quad (\text{E. 4})$$

其中, α^2 和 β^2 为常量, 与 ω^2 的关系如下:

$$\beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2 \quad (\text{E. 5})$$

式(E. 2)~式(E. 4)的解分别为

$$X(x) = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x \quad (\text{E. 6})$$

$$Y(y) = C_3 \cos \beta y + C_4 \sin \beta y \quad (\text{E. 7})$$

$$T(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (\text{E. 8})$$

其中, 常量 $C_1 \sim C_4$, A 与 B 可以根据边界条件与初始条件确定。

8.7 瑞利法

可以应用瑞利法求连续系统的基频。对于具有变化的分布质量与分布刚度系统, 该方法要比精确的分析简单得多。虽然瑞利法可以应用于所有的连续系统, 但在本节仅利用该方法讨论梁的振动问题。^① 考虑图 8.14 所示的梁, 为了应用瑞利法, 需要推导最大动能、最大势能以及瑞利商的表达式。梁的动能可以表示为

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \dot{w}^2 dm = \frac{1}{2} \int_0^l \dot{w}^2 \rho A(x) dx \quad (8.146)$$

设横向变形随时间按简谐规律变化, 即 $w(x, t) = W(x) \cos \omega t$, 故最大动能为

$$T_{\max} = \frac{\omega^2}{2} \int_0^l \rho A(x) W^2(x) dx \quad (8.147)$$

梁的势能 V 等于梁在变形时力所做的功。若忽略剪力所做的功, 则有

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l M d\theta \quad (8.148)$$

其中, M 为式(8.75)所确定的弯矩; θ 为变形梁的斜率, 可表示为 $\theta = \partial w / \partial x$ 。于是, 式(8.148)可以重新表示为

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (8.149)$$

由于 $w(x, t)$ 的最大值为 $W(x)$, 所以 V 的最大值为

$$V_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) \left(\frac{d^2 W(x)}{dx^2} \right)^2 dx \quad (8.150)$$

① 采用积分方程方法求解振动梁的基频的方法由 Penny 与 Reed 提出^[8.26]。

由于 $T_{\max} = V_{\max}$, 则得瑞利商为

$$R(\omega) = \omega^2 = \frac{\int_0^l EI \left(\frac{d^2 W(x)}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^l \rho A (W(x))^2 dx} \quad (8.151)$$

于是只要知道挠曲线方程 $W(x)$, 即可得到梁的固有频率。一般情况下, $W(x)$ 是未知的, 需要预先假定。为了得到基频, 一般假定 $W(x)$ 为静变形曲线。注意: 该假设振型相当于增加了系统的约束(因而提高了系统的刚度), 故由式(8.151)求得的频率比精确值要高。

对于阶梯梁, 式(8.151)可以更方便地表示为

$$R(\omega) = \omega^2 = \frac{E_1 I_1 \int_0^{l_1} \left(\frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 dx + E_2 I_2 \int_{l_1}^{l_2} \left(\frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 dx + \dots}{\rho A_1 \int_0^{l_1} W^2 dx + \rho A_2 \int_{l_1}^{l_2} W^2 dx + \dots} \quad (8.152)$$

其中, E_i, I_i, A_i 与 l_i 对应于第 i 段 ($i=1, 2, \dots$) 的弹性模量、横截面的惯性矩、横截面面积和长度。

例 8.12 利用假设振型 $W(x) = (1-x/l)^2$ 求图 8.19 所示的变截面悬臂梁横向振动的基频。

解: 所假定的振型可以证明满足梁的边界条件。梁的横截面面积 A 与惯性矩 I 可以表示为

$$A(x) = \frac{hx}{l}, \quad I(x) = \frac{1}{12} \left(\frac{hx}{l} \right)^3 \quad (E.1)$$

故瑞利商为

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l E \left(\frac{h^3 x^3}{12l^3} \right) \left(\frac{2}{l^2} \right)^2 dx}{\int_0^l \rho \left(\frac{hx}{l} \right) \left(1 - \frac{x}{l} \right)^4 dx} = 2.5 \frac{Eh^2}{\rho l^4}$$

或

$$\omega = 1.5811 \left(\frac{Eh^2}{\rho l^4} \right)^{1/2} \quad (E.2)$$

对此种情况, 频率的精确值为^[8.2]

$$\omega_1 = 1.5343 \left(\frac{Eh^2}{\rho l^4} \right)^{1/2} \quad (E.3)$$

于是, 由瑞利法求得的 ω_1 的值比精确值高 3.0503%。

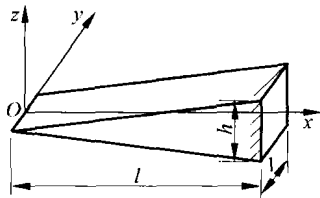


图 8.19 楔形悬臂梁

8.8 瑞利-李兹法

瑞利-李兹法是李兹法的一种延伸, 它基于这样一个前提, 即通过多个假定振型的叠加, 要比瑞利法中单个假定振型更近似于系统的固有振型。若合适地选择假定振型, 则该方法

不仅可以得到基频的近似值,而且可以近似地得到高阶固有频率与高阶振型。假设振型的个数是任意的,所求固有频率的个数与假设振型的个数相等。尽管这样做会导致更大的计算量,但却可以得到更精确的结果。

对梁的横向振动,若选择 n 个函数来近似变形方程 $W(x)$,即令

$$W(x) = c_1 w_1(x) + c_2 w_2(x) + \cdots + c_n w_n(x) \quad (8.153)$$

其中, $w_1(x), w_2(x), \cdots, w_n(x)$ 是关于空间坐标 x 的线性不相关的函数,它们满足问题的所有边界条件, c_1, c_2, \cdots, c_n 是待定的系数。在求解系数 c_i 时,应使得函数 $w_i(x)$ 能提供固有振型的最可能的近似。为得到这些近似,要求调整系数 c_i 从而保证与固有振型对应的固有频率保持不变。为此,将式(8.153)代入瑞利商即式(8.151)中,再将所得表达式求关于各系数 c_i 的偏导数。为使固有频率保持不变,令每个偏导数等于零,则得

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial c_i} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n \quad (8.154)$$

式(8.154)是一组关于系数 c_1, c_2, \cdots, c_n 的线性代数方程,也包含待定量 ω^2 。这相当于定义了一个代数特征值问题,与多自由度系统的特征值问题类似。该特征值问题的解一般包含了 n 个固有频率 $\omega_i^2 (i=1, 2, \cdots, n)$ 和 n 个特征向量(每一个均包含一组 c_1, c_2, \cdots, c_n)。例如,与 c_i 相对应的第 i 阶特征向量可以表示为

$$\mathbf{C}^{(i)} = \begin{Bmatrix} c_1^{(i)} \\ c_2^{(i)} \\ \vdots \\ c_n^{(i)} \end{Bmatrix} \quad (8.155)$$

将该特征向量,即将 $c_1^{(i)}, c_2^{(i)}, \cdots, c_n^{(i)}$ 的值代入式(8.153)中,则得梁的第 i 阶振型的最可能近似值。在文献[8.28]中,给出了瑞利-李兹法中对特征值问题降维的说明。在文献[8.29]中,给出了一种将瑞利-李兹法与有限单元法结合起来的新方法。下面通过一个例题来说明瑞利-李兹法的基本步骤。

例 8.13 应用瑞利-李兹法求例 8.12 中楔形悬臂梁的固有频率。

解: 假设振型函数 $w_i(x)$ 分别为

$$w_1(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \quad (\text{E. 1})$$

$$w_2(x) = \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \quad (\text{E. 2})$$

$$w_3(x) = \frac{x^2}{l^2} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \quad (\text{E. 3})$$

\vdots

若只利用一项近似变形方程,即

$$W(x) = c_1 \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \quad (\text{E. 4})$$

则所得基频与例 8.12 中得到的结果一致。现采用两项来近似变形方程,即

$$W(x) = c_1 \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 + c_2 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \quad (\text{E. 5})$$

此时的瑞利商为

$$R[W(x)] = \omega^2 = \frac{X}{Y} \quad (\text{E. 6})$$

其中

$$X = \int_0^l EI(x) \left(\frac{d^2 W(x)}{dx^2} \right)^2 dx \quad (\text{E. 7})$$

$$Y = \int_0^l \rho A(x) [W(x)]^2 dx \quad (\text{E. 8})$$

若将式(E. 5)代入式(E. 6),则式(E. 6)变为 c_1 与 c_2 的函数。使 ω^2 或 $R[W(x)]$ 保持不变的条件为

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial c_1} = \frac{Y \frac{\partial X}{\partial c_1} - X \frac{\partial Y}{\partial c_1}}{Y^2} = 0 \quad (\text{E. 9})$$

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial c_2} = \frac{Y \frac{\partial X}{\partial c_2} - X \frac{\partial Y}{\partial c_2}}{Y^2} = 0 \quad (\text{E. 10})$$

这些方程可以重写为

$$\frac{\partial X}{\partial c_1} - \frac{X}{Y} \frac{\partial Y}{\partial c_1} = \frac{\partial X}{\partial c_1} - \omega^2 \frac{\partial Y}{\partial c_1} = 0 \quad (\text{E. 11})$$

$$\frac{\partial X}{\partial c_2} - \frac{X}{Y} \frac{\partial Y}{\partial c_2} = \frac{\partial X}{\partial c_2} - \omega^2 \frac{\partial Y}{\partial c_2} = 0 \quad (\text{E. 12})$$

将式(E. 5)代入式(E. 7)与(E. 8),得

$$X = \frac{Eh^3}{3l^3} \left(\frac{c_1^2}{4} + \frac{c_2^2}{10} + \frac{c_1 c_2}{5} \right) \quad (\text{E. 13})$$

$$Y = \rho h l \left(\frac{c_1^2}{30} + \frac{c_2^2}{280} + \frac{2c_1 c_2}{105} \right) \quad (\text{E. 14})$$

根据式(E. 13)与式(E. 14),式(E. 11)与式(E. 12)可以表示为

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \omega^2 \frac{1}{15} & \frac{1}{5} - \omega^2 \frac{2}{105} \\ \frac{1}{5} - \omega^2 \frac{2}{105} & \frac{1}{5} - \omega^2 \frac{1}{140} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{E. 15})$$

其中

$$\omega^2 = \frac{3\omega^2 \rho l^4}{Eh^2} \quad (\text{E. 16})$$

在式(E. 15)中,令系数矩阵的行列式为零,则得频率方程为

$$\frac{1}{8820}\omega^4 - \frac{13}{1400}\omega^2 + \frac{3}{50} = 0 \quad (\text{E. 17})$$

式(E. 17)的两个根为 $\omega_1 = 2.6599$ 与 $\omega_2 = 8.6492$, 于是楔形梁的固有频率为

$$\omega_1 \approx 1.5367 \left(\frac{Eh^2}{\rho l^4} \right)^{1/2} \quad (\text{E. 18})$$

和

$$\omega_2 \approx 4.9936 \left(\frac{Eh^2}{\rho l^4} \right)^{1/2} \quad (\text{E. 19})$$

8.9 利用 MATLAB 求解的例子

例 8.14 利用 MATLAB, 根据例 8.8 中式(E. 7)作图表示简支-简支梁的稳态响应, 取 $n=1, 2, 5$ 。

解: 作图表示例 8.8 中式(E. 7)的 MATLAB 程序如下, 其中取 $x=20, n=1, 2, 5$:

```
%Ex8_14.m
x=20;
f0=100;
a=10;
A=1;
l=40;
ro=0.283/386.4;
w=100;
n=1;
wn=(n^2)*360.393674;
for i=1:1001
    t(i)=3*(i-1)/1000;
    w1(i)=(2*f0/(ro*A*l))*sin(n*pi*a/l)*sin(n*pi*x/l)*sin
        (w*t(i))/(wn^2-w^2);
end
n=2;
for i=1:1001
    t(i)=3*(i-1)/1000;
    w2(i)=(2*f0/(ro*A*l))*(sin(pi*a/l)*sin(pi*x/l)*sin
        (w*t(i))/(360.393674^2-w^2)+sin(2*pi*a/l)*sin
        (2*pi*x/l)*sin(w*t(i))/((2*360.393674)^2-w^2));
end
for i=1:1001
    t(i)=3*(i-1)/1000;
    w3(i)=(2*f0/(ro*A*l))*(sin(pi*a/l)*sin(pi*x/l)*sin
```

```

(w * t(i)) / (360.393674^2 - w^2) + sin(2 * pi * a / l) * sin
(2 * pi * x / l) * sin(w * t(i)) / ((2 * 360.393674)^2 - w^2) + sin
(5 * pi * a / l) * sin(5 * pi * x / l) * sin(w * t(i)) /
((5 * 360.393674)^2 - w^2));
end
subplot('311');
plot(t, w1);
ylabel('w(x,t)');
title('x=20, n=1');
subplot('312');
plot(t, w2);
ylabel('w(x,t)');
title('x=20, n=1,2');
subplot('313');
plot(t, w3);
xlabel('t');
ylabel('w(x,t)');
title('x=20, n=1,2,5');

```

所绘曲线如图 8.20 所示。

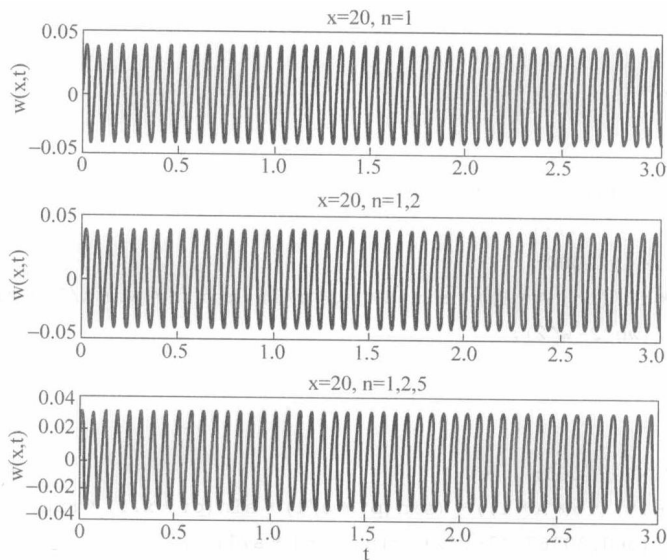


图 8.20 例 8.14 图

例 8.15 利用 MATLAB, 求一端固定一端简支梁频率方程

$$\tan \beta_n l - \tanh \beta_n l = 0$$

的根。初始值取 $\beta_0 l = 3.0$ 。

解：

```
>>x=fzero(inline('tan(y)-tanh(y)'),3.0)
x=
    3.92660231204792
>>tan(x)-tanh(x)
ans=
   -4.440892098500626e-016
```

例 8.16 编写一个命名为 Program12.m 的通用 MATLAB 程序,求解非线性超越方程,并用其求解下列方程:

$$\tan \beta l - \tanh \beta l = 0 \quad (\text{E. 1})$$

解: 程序执行后需要输入下列数据:

n——要求的根的数目

xs——第 1 个根的假设值

xinc——对根进行搜索时的初始增量

nint——子区间的最大数目(通常取 50)

iter——对根进行搜索时允许迭代的次数(通常取 100)

eps——停止迭代的判据(通常取 10^{-6})

用一个命名为 function.m 的子程序定义所给的非线性方程,程序以输出的形式给出计算结果。

```
>>program12
Roots of nonlinear equation
Data:
n=5
xs=2.000000e+000
xinc=1.000000e-001
nint=50
iter=100
eps=1.000000e-006

Roots:
    3.926602e+000
    7.068583e+000
    1.021018e+001
    1.335177e+001
    1.649336e+001
```

8.10 C++ 程序

例 8.17 编写一个命名为 Program12.cpp 的通用 C++ 程序求非线性方程的根,并用其求解例 8.16 中的方程(E.1)。

解: 程序执行后会显示需要录入的输入数据。程序的输入和输出与 Program12.m 中的输入和输出类似。

```
Please input N:
5
Please input XS and XINC:
2.0  0.1
ROOTS OF NONLINEAR EQUATION
DATA:
N=5
XS=2
XINC=0.1
NINT=50
ITER=100
EPS=1e-006

ROOTS:
  3.92660231
  7.06858276
 10.21017612
 13.35176878
 16.49336143
```

8.11 Fortran 程序

例 8.18 编写一个命名为 NONEQN.F 的 Fortran 子程序求非线性超越方程的根,并用其求解例 8.16 中的方程(E.1)。

解: 调用子程序 NONEQN.F 的主程序命名为 PROGRAM12.F。程序的输入和输出与 Program12.m 中的输入和输出类似。执行后,PROGRAM12.F 的显示结果如下:

```
ROOTS OF NONLINEAR EQUATION
DATA:
N=5
XS=0.200000E+01
```

```

XINC=0.100000E+00
NINT=50
ITER=100
EPS=0.100000E-05

```

ROOTS:

```

0.392660E+01
0.706858E+01
0.102102E+02
0.133518E+02
0.164934E+02

```

参 考 文 献

- 8.1 S. K. Clark, *Dynamics of Continuous Elements*, Prntice Hall, Englewood Cliffs, N. J. ,1972.
- 8.2 S. Timoshenko, D. H. Young, and W. Weaver, Jr. , *Vibration Problems in Engineering* (4th ed.) , Wiley, New York, 1974.
- 8.3 A. Leissa, *Vibration of Plates*, NASA SP-160, Washington, D. C. , 1969.
- 8.4 I. S. Habib, *Engineering Analysis Methods*, Lexington Books, Lexington, Mass. , 1975.
- 8.5 J. D. Achenbach, *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland Publishing, Amsterdam. , 1973.
- 8.6 K. K. Deb, "Dynamics of a string and an elastic hammer," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 40, 1975, pp. 243-248.
- 8.7 M. S. Triantafyllou, "Linear dynamics of cables and chains," *Shock and Vibration Digest*, Vol. 16, March 1984, pp. 9-17.
- 8.8 R. W. Fitzgerald, *Mechanics of Materials* (2nd ed.) , Addison-Wesley, Reading, Mass. , 1982.
- 8.9 S. P. Timoshenko and J. Gere, *Theory of Elastic Stability* (2nd ed.) , McGraw-Hill, New York, 1961.
- 8.10 S. P. Timoshenko, "On the correction for shear of the differential equation for transverse vibration of prismatic bars," *Philosophical Magazine*, Series 6, Vol. 41, 1921, pp. 744-746.
- 8.11 G. R. Cowper, "The shear coefficient in Timoshenko ' s beam theory," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 33, 1966, pp. 335-340.
- 8.12 G. W. Housner and W. O. Keightley, "Vibrations of linearly tapered beams," Part I, *Transactions of ASCE*, Vol. 128, 1963, pp. 1020-1048.
- 8.13 C. M. Harris(ed.) , *Shock and Vibration Handbook* (3rd ed.) , McGraw-Hill, New York, 1988.
- 8.14 J. H. Gaines and E. Volterra, "Transverse vibrations of cantilever bars of variable cross section," *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 39, 1966, pp. 674-679.
- 8.15 T. M. Wang, "Natural frequencies of continuous Timoshenko beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 13, 1970, pp. 409-414.
- 8.16 S. L. Grassie, R. W. Gregory, D. Harrison, and K. L. Johnson, "The dynamic response of railway track

- to high frequency vertical excitation," *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 24, June 1982, pp. 77-90.
8. 17 A. Dimarogonas, *Vibration Engineering*, West Publishing, Saint Paul, 1976.
 8. 18 T. Justine and A. Krishnan, "Effect of support flexibility on fundamental frequency of beams," *Journal of sound and Vibration*, Vol. 68, 1980, pp. 310-312.
 8. 19 K. A. R. Perkins, "The effect of support flexibility on the natural frequencies of a uniform cantilever," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 4, 1966, pp. 1-8.
 8. 20 S. S. Rao, "Natural frequencies of systems of elastically connected Timoshenko beams," *Journal of the Acoustical society of America*, Vol. 55, 1974, pp. 1232-1237.
 8. 21 A. M. Ebner and D. P. Billington, "Steady-state vibration of damped Timoshenko beams," *Journal of Structural Division (ASCE)*, Vol. 3, 1968, p. 737.
 8. 22 M. Levinson and D. W. Cooke, "On the frequency spectra of timoshenko beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 84, 1982, pp. 319-326.
 8. 23 N. Y. Olcer, "General solution to the equation of the vibrating membrane," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 6, 1967, pp. 365-374.
 8. 24 G. R. Sharp, "Finite transform solution of the vibrating ammular membrane," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 6, 1967, pp. 117-128.
 8. 25 J. Mazumdar, "A review of approximate methods for determining the vibrational modes of membranes," *Shock and Vibration Digest*, Vol. 14, February 1982, pp. 11-17.
 8. 26 J. E. Penny and J. R. Reed, "An integral equation approach to the fundamental frequency of vibrating beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 19, 1971, pp. 393-400.
 8. 27 G. Temple and W. G. Bickley, *Rayleigh's Principle and Its Application to Engineering*, Dover, New York, 1956.
 8. 28 W. L. Craver, Jr. and D. M. Egle, "A method for selection of significant terms in the assumed solution in a Rayleigh-Ritz analysis," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 22, 1972, pp. 133-142.
 8. 29 L. Klein, "Transverse vibrations of non-uniform beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 37, 1974, pp. 491-505.
 8. 30 J. R. Hutchinson, "Transverse vibrations of beams: Exact versus aproximate solutions," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 48, 1981, pp. 923-928.

思 考 题

8.1 简答题

1. 从运动微分方程的性质上看,连续系统与离散系统有怎样的不同?
2. 一个连续系统有多少个固有频率?
3. 边界条件在离散系统中重要吗? 为什么?
4. 什么是波动方程? 什么是行波解?

5. 波的速度有什么意义?
6. 分别根据细长梁理论与铁摩辛柯梁理论,简述简支梁的边界条件。
7. 简述弦的两端可能出现的边界条件。
8. 离散系统与连续系统在频率方程上的主要区别是什么?
9. 拉力对梁的固有频率有什么影响?
10. 在什么情况下,受轴向载荷作用的梁的固有振动频率等于零?
11. 考虑剪切变形与转动惯量的影响后,为什么梁的固有频率会降低?
12. 给出薄膜振动的两个实例。
13. 瑞利法的基本原理是什么?
14. 为什么采用瑞利法求得的固有频率总比 ω_1 的真实值要大?
15. 瑞利法与瑞利-李兹法的区别是什么?
16. 什么是瑞利商?

8.2 判断题

1. 连续系统与分布参数系统是相同的。 ()
2. 可以认为连续系统有无限多个自由度。 ()
3. 连续系统的控制方程是一个常微分方程。 ()
4. 与弦的横向振动、杆的纵向振动以及轴的扭转振动相对应的自由振动方程,具有相同的形式。 ()
5. 连续系统的固有振型是正交的。 ()
6. 薄膜没有弯曲抗力。 ()
7. 瑞利法可以视为能量守恒方法。 ()
8. 瑞利-李兹法假定问题的解是满足其边界条件的一组函数。 ()
9. 对于离散系统,也同样要用到边界条件。 ()
10. 欧拉-伯努利梁理论比铁摩辛柯梁理论更精确。 ()

8.3 填空题

1. 索的自由振动方程也叫做_____方程。
2. 频率方程也叫做_____方程。
3. 分离变量法是将索自由振动的解表示为 x 的函数与 t 的函数的_____。
4. 边界条件与_____条件要同时用来求连续振动系统的解。
5. 在行波解 $w(x, t) = w_1(x - ct) + w_2(x + ct)$ 中,第1项表示沿 x 的_____方向上传播的波。
6. EI 与 GJ 分别称为_____刚度与_____刚度。
7. 细梁理论也称为_____理论。

8. 细梁横向振动的控制方程是关于空间坐标的_____阶偏微分方程。
9. 当受轴向力拉伸时,梁的固有频率将_____。
10. 铁摩辛柯梁理论可以视为_____梁理论。
11. 鼓的蒙皮可视为_____。
12. 弦与梁之间的关系,和薄膜与_____之间的关系是相同的。
13. 瑞利法可以用来估计连续系统的_____固有频率。
14. $EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ 表示梁的_____。
15. 对于离散系统而言,控制方程是_____微分方程。
16. 轴向拉伸载荷将使梁的弯曲_____增加。
17. 梁的_____能可以表示为 $\frac{1}{2} \int_0^l \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx$ 。
18. 梁的_____能可以表示为 $\frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx$ 。

8.4 选择题

1. 连续系统的频率方程是_____。
 (a) 多项式方程 (b) 超越方程 (c) 微分方程
2. 连续系统的固有频率的数目是_____。
 (a) 无限个 (b) 一个 (c) 有限个
3. 当轴向载荷接近欧拉屈曲载荷时,梁的基频将是_____。
 (a) 无穷大 (b) 张紧弦的频率 (c) 零
4. 铁摩辛柯剪切系数的值取决于_____。
 (a) 横截面的形状 (b) 横截面的尺寸 (c) 梁的长度
5. 拉普拉斯算子的表达式为_____。
 (a) $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ (b) $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ (c) $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$
6. 杆作纵向振动时,自由端的边界条件为_____。
 (a) $u(0, t) = 0$
 (b) $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$
 (c) $AE \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) - u(0, t) = 0$
7. 杆作纵向振动时,其振型函数正交性的含义为_____。
 (a) $\int_0^l U_i(x) U_j(x) dx = 0$

$$(b) \int_0^l (U'_i U_j - U'_j U_i) dx = 0$$

$$(c) \int_0^l (U_i(x) + U_j(x)) dx = 0$$

8.5 连线题(关于细长梁的边界条件)

- | | |
|----------|---------------------|
| 1. 自由端 | (a) 弯矩等于零, 剪力等于弹簧力。 |
| 2. 铰支端 | (b) 挠度等于零, 转角等于零。 |
| 3. 固定端 | (c) 挠度等于零, 弯矩等于零。 |
| 4. 弹性约束端 | (d) 弯矩等于零, 剪力等于零。 |

8.6 连线题(关于等截面梁)

- | | |
|-------------|-----------|
| 1. $W=0$ | (a) 零弯矩 |
| 2. $W'=0$ | (b) 零横向位移 |
| 3. $W''=0$ | (c) 零剪力 |
| 4. $W'''=0$ | (d) 零转角 |

8.7 连线题(关于波动方程 $c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$)

- | | |
|--|------------|
| 1. $c = \left(\frac{P}{\rho}\right)^{1/2}$ | (a) 杆的纵向振动 |
| 2. $c = \left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2}$ | (b) 轴的扭转振动 |
| 3. $c = \left(\frac{G}{\rho}\right)^{1/2}$ | (c) 弦的横向振动 |

习 题

- 8.1 索的质量密度为 $\rho=5 \text{ kg/m}$, 在拉力 $P=4000 \text{ N}$ 作用下张紧, 试确定波的传播速度。
- 8.2 直径为 2 mm 的钢丝绳, 在两点被固定, 这两点之间的距离为 2 m 。绳的张力为 250 N 。试确定: (a) 振动的基频; (b) 绳上波的传播速度。
- 8.3 张紧索的长度为 2 m , 基频为 3000 Hz , 求第 3 阶振型对应的频率。若所受张力增加 20% , 则基频与第 3 阶振型对应的频率分别变为多少?
- 8.4 求横波沿输电线从一个杆塔传播到距离为 300 m 的另一个杆塔所需的时间。假设输电线所受拉力的水平分量为 $30\,000 \text{ N}$, 单位长度的质量为 2 kg/m 。
- 8.5 长为 l 、单位长度的质量为 ρ 的张紧索所受拉力为 P , 其一端与质量块 m 相连, 该质量块可以在无摩擦的槽内运动, 其另一端系在刚度为 k 的弹簧上, 如图 8.21 所示。试推

导该索横向振动的频率方程。

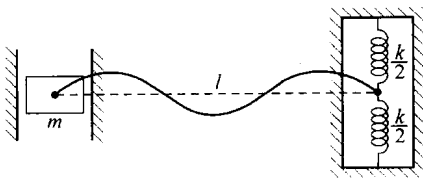


图 8.21 习题 8.5 图

- 8.6 乐器的弦两端固定, 长为 2 m, 直径为 0.5 mm, 质量密度为 7800 kg/m^3 。为使基频为 1 Hz 与 5 Hz, 试分别求张紧力的大小。
- 8.7 长为 l 、单位长度的质量为 ρ 的索在拉力 P 作用下张紧。其一端固定, 一端与一销钉相连, 该销钉可以在一无摩擦的槽中移动。求索的固有振动频率。
- 8.8 求两端固定弦的自由振动解。已知初始条件为: 当 $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$ 时, $w(x, 0) = 0$;
 $\frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = \frac{2ax}{l}$; 当 $\frac{l}{2} \leq x \leq l$ 时, $\frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = 2a\left(1 - \frac{x}{l}\right)$ 。
- 8.9 试证明对于通常的边界条件, 式 (8.18) 与式 (8.19) 中的常数 a 为负数。(提示: 将式 (8.18) 乘以 $W(x)$, 并对 x 从 0 积分到 l 。)
- 8.10* 两电力输送塔之间的电缆长 2000 m, 两端夹紧后的张力为 P , 如图 8.22 所示。电缆材料的密度为 8890 kg/m^3 。如果要求前 4 阶固有频率在 0~20 Hz 之间, 确定电缆的横截面面积以及初始张力。

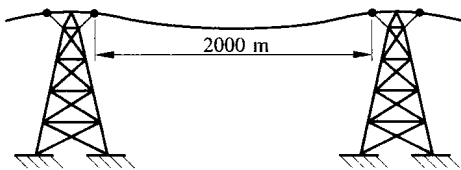


图 8.22 习题 8.10 图

- 8.11 两端固定、长为 l 的弦, 在 $x=l/3$ 处受到初始横向位移 h 后释放, 试确定其随后的运动。取级数解的前四项比较 $t=0, l/(4c), l/(3c), l/(2c)$ 和 $l/(c)$ 时弦的变形曲线。
- 8.12 若长为 l 的弦在黏性介质中振动, 推导其运动微分方程。
- 8.13 两端固定的弦, 初始条件为 $w(x, 0) = w_0 \sin(\pi x/l)$ 与 $(\partial w / \partial t)(x, 0) = 0$, 试确定其自由振动解。
- 8.14 试推导两端自由的等截面杆纵向振动的主振型方程。
- 8.15 推导图 8.23 所示杆纵向振动的频率方程。
- 8.16* 长为 l 、质量为 m 的细长杆一端固定, 一端自由。为使纵向振动的第一阶固有频率降

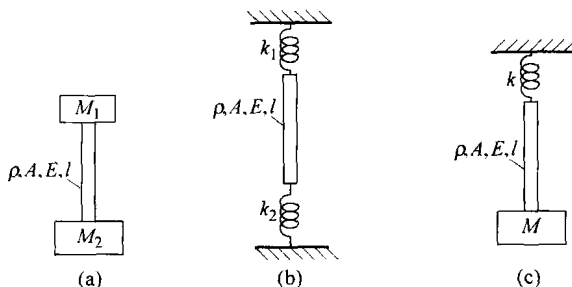


图 8.23 习题 8.15 图

低 50%，试确定必须在自由端附加的质量块 M 的大小。

8.17 试证明图 8.24 所示杆的纵向振动的振型函数是正交的。

8.18 阶梯杆的两段横截面面积分别为 A_1 与 A_2 ，所对应的长度分别为 l_1 与 l_2 。假定该杆两端分别为固定端与自由端，试推导其纵向振动的频率方程。

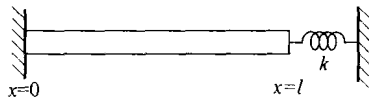


图 8.24 习题 8.17 图

8.19 直径为 d 、长度为 l 的钢轴，一端固定，另一端装

有一质量为 m 、转动惯量为 J_0 的螺旋桨，如图 8.25 所示。(a) 确定轴在轴向振动时的基频；(b) 确定轴在扭转振动时的基频。已知数据为： $d=5\text{ cm}$ ， $l=1\text{ m}$ ， $m=100\text{ kg}$ ， $J_0=10\text{ kg}\cdot\text{m}^2$ 。

8.20 一扭振系统由一根轴及安装在该轴中点、转动惯量为 I_0 的圆盘组成。若轴的两端固定，试确定该系统在自由扭转振动下的响应。假定圆盘的初始角位移为零，初始角速度为 $\dot{\theta}_0$ 。

8.21 试求两端固定轴扭转振动的固有频率。

8.22 长为 l 、扭转刚度为 GJ 的等截面轴两端分别装有一个圆盘，并与扭转弹簧、扭转阻尼器相连，如图 8.26 所示，试写出其边界条件。

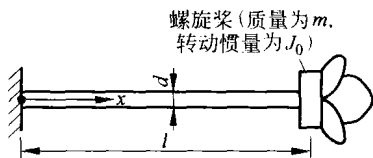
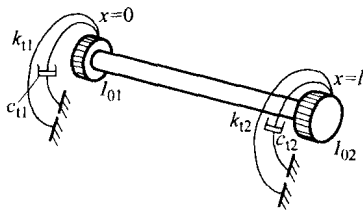


图 8.25 习题 8.19 图



8.26 习题 8.22 图

8.23 若轴的一端固定，另一端自由，试重新求解习题 8.21。

8.24 等截面轴的两端分别装有转动惯量为 I_{01} 与 I_{02} 的转子，求该轴扭转振动的频率

方程。

- 8.25 外扭矩 $M_t(t) = M_{t0} \cos \omega t$ 作用在等截面轴的自由端, 该轴的一端为固定端。试求该轴的稳态振动响应。
- 8.26 长为 2 m、直径为 50 mm 的轴, 两端固定, 试求其扭转振动的基频。已知材料的密度为 7800 kg/m^3 , 剪切弹性模量为 $0.8 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ 。
- 8.27 等截面轴在 $x=0$ 处具有以角速度 ω 旋转的支承, 另一端 ($x=l$) 为自由端。若此支承突然停止转动, 试确定该轴随后的角位移响应。
- 8.28 等截面梁的横截面为矩形, 其面积为 $100 \text{ mm} \times 300 \text{ mm}$, 长度为 $l=2 \text{ m}$, 弹性模量为 $E=20.5 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, 密度为 $\rho=7.83 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 。试计算其在下列 4 种条件下, 横向振动的前 3 阶固有频率及相应的振型, 并给出图形。(a) 两端均为铰支; (b) 两端均为固定端; (c) 一端固定, 另一端自由; (d) 两端均为自由端。
- 8.29 等截面梁一端固定, 一端自由, 试推导其横向振动的固有频率表达式。
- 8.30 证明如图 8.27 所示等截面梁的振型函数是正交的。
- 8.31 某等截面梁的两端均为简支端, 试推导其横向振动的固有频率表达式。
- 8.32 某等截面梁一端由细线悬挂(类似于摆), 忽略自重的影响, 试推导其横向振动的固有频率表达式。
- 8.33 长为 1 m 的简支钢质梁, 为使其前 3 阶固有频率在 $1500 \sim 5000 \text{ Hz}$ 之间, 试求横截面积 A 与横截面的惯性矩 I 。
- 8.34 等截面梁两端简支, 以第 1 阶振型振动时, 其中点振幅为 10 mm 。若 $A=120 \text{ mm}^2$, $I=1000 \text{ mm}^4$, $E=20.5 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, $\rho=7.83 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $l=1 \text{ m}$, 试确定梁的最大弯矩。
- 8.35 推导如图 8.28 所示两端置于弹簧上的等截面梁横向振动的频率方程。弹簧仅在垂向发生变形, 在平衡位置梁处于水平位置。
- 8.36 长为 l 的简支梁在其中点附有一质量块 M , 不计质量块的尺寸, 试求系统的频率方程。
- 8.37 两端固定, 长为 $2l$ 的等截面梁在中点处简支, 试推导该梁横向振动的频率方程。
- 8.38 简支梁承受的初始均布载荷的集度为 f_0 , 若该载荷突然去掉, 试求梁的振动响应。
- 8.39 估算悬臂梁的基频, 该梁的横截面面积与惯性矩随 x 发生变化: $A(x) = A_0 \frac{x}{l}$ 与 $I(x) = \bar{I} \frac{x}{l}$, 其中 x 是从自由端量起的距离。

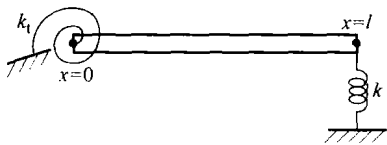


图 8.27 习题 8.30 图

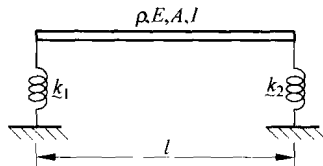


图 8.28 习题 8.35 图

- 8.40 (a)试推导受任意力作用的等截面梁的响应的一般表达式。(b)若在 $x=a$ 处受简谐力 $F_0 \sin \omega t$ 的作用,利用(a)中的结果,求等截面简支梁的响应,假定初始条件为 $w(x,0)=(\partial w/\partial t)(x,0)=0$ 。
- 8.41 推导例 8.10 中的式(E.5)与式(E.6)。
- 8.42 推导例 8.10 中的式(E.7)与式(E.8)。
- 8.43 试证明对于通常的边界条件,式(8.82)中的常数 a 为正数。(提示:将式(8.83)的两边乘以 $W(x)$,并对 x 从 0 积分到 l 。)
- 8.44 求简支梁在均布简谐变化载荷作用下的响应。
- 8.45 两端固定梁的正中间位置安装着一个质量为 100 kg、工作速度为 3000 r/min 的电动机,如图 8.29 所示。如果电动机的不平衡质量与其偏心距的乘积为 $0.5 \text{ kg} \cdot \text{m}$,求梁的稳态响应。假定梁的长度 $l=2 \text{ m}$,横截面为 $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ 的正方形,材料为钢。
- 8.46 直径为 2 cm、长为 1 m 的钢质悬臂梁,如图 8.30 所示,在自由端受一个按指数规律衰减的力 $100e^{-0.1t}$,求梁的稳态响应。假设钢的密度与弹性模量分别为 7500 kg/m^3 和 $210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ 。

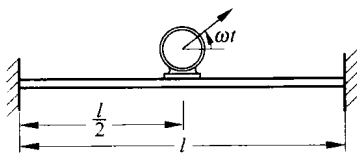


图 8.29 习题 8.45 图

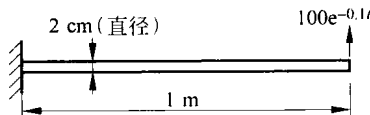


图 8.30 习题 8.46 图

- 8.47 悬臂梁的自由端受一个大小为 M_0 的突加阶跃弯矩的作用,试求梁的稳态响应。
- 8.48 长为 l 、密度为 ρ 、弹性模量为 E 、横截面面积为 A 、惯性矩为 I 的悬臂梁在其自由端附有一集中质量 M 。试推导梁横向振动的频率方程。
- 8.49 证明圆形薄膜的横向振动方程为 $\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = \frac{\rho}{P} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ 。
- 8.50 利用习题 8.49 所给的运动微分方程,求半径为 R ,在 $r=R$ 圆周上固定的圆形薄膜的固有频率。
- 8.51 两边长分别为 a 与 b 的矩形薄膜,各边均固定。(a)推导该薄膜在任意压力 $f(x,y,t)$ 作用下的挠度 $w(x,y,t)$ 表达式;(b)当 $f(x,y,t)$ 均为均布压力 f_0 时,试求该薄膜的振动响应,假定初始时刻薄膜静止。
- 8.52 求各边均固定的矩形薄膜的自由振动解与固有频率。该薄膜沿 x 与 y 方向的尺寸分别为 a 与 b 。
- 8.53 矩形薄膜的两边长分别为 a 与 b ,初始条件如下:

$$w(x,y,0) = w_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x,y,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$$

求其自由振动响应。

- 8.54 求矩形薄膜的自由振动响应。假定该矩形薄膜的边长分别为 a 与 b , 初始条件如下:

$$\begin{cases} w(x, y, 0) = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x, y, 0) = \dot{w}_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}, \quad 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b \end{cases}$$

假定矩形薄膜的各边均固定。

- 8.55 试比较具有下列形状的薄膜横向振动的固有频率。(a) 方形; (b) 圆形; (c) 边长之比为 2:1 的矩形。假设所有这些薄膜的各边均固定, 面积、材料以及所受张力均相同。
- 8.56 考虑图 8.31(a) 所示的行驶在铁轨上的列车。轨道可以模型化为一静止在弹性基础上的无限长梁, 列车可以理想化为一移动载荷 $F_0(x, t)$ (见图 8.31(b))。若每单位长度土壤的刚度为 k , 机车的常速度为 v_0 。试证明梁的运动微分方程为

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + kw(x, t) = F_0(x - v_0 t)$$

若移动载荷的大小为常数, 试说明如何求解该运动微分方程。

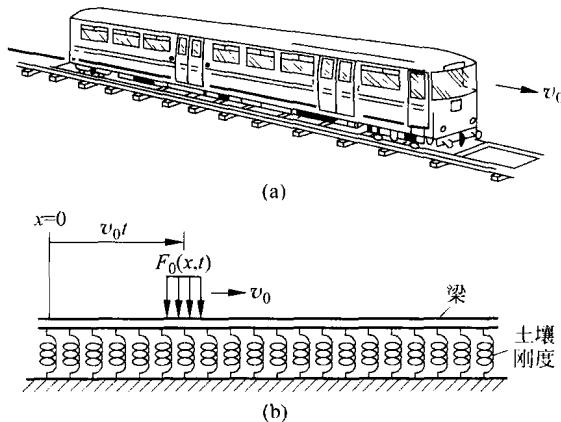


图 8.31 习题 8.56 图

- 8.57 利用静态挠曲线方程 $W(x) = \frac{c_0 x^2}{24EI} (1-x)^2$, 其中 c_0 为常量, 求两端固定梁的基频。
- 8.58 利用挠曲线方程 $W(x) = c_0 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right)$, 其中 c_0 为常数, 求解习题 8.57。
- 8.59 求长为 l 、一端固定、另一端简支的等截面梁的第一阶固有频率。假设该梁的振型曲线与梁在自身重力作用下引起的挠曲线相同。(提示: 梁在自身重力作用下的静态挠曲线方程为 $EI \frac{d^4 W(x)}{dx^4} = \rho g A$, 其中 ρ 为密度, g 是重力加速度, A 是梁横截面面积。该方程的解可以利用直接积分并根据任意已知的边界条件得到。)

8.60 两端固定的等截面梁在中点附有一质量为 M 的质量块, 根据静态挠曲线方程 $W(x)$, 利用瑞利法, 求该梁的基频。

8.61 利用瑞利法求悬臂梁(在 $x=l$ 处固定)的基频。该梁的横截面面积 $A(x)$ 与惯性矩 $I(x)$ 随 x 的变化分别为 $A(x)=A_0 x/l$ 与 $I(x)=I_0 x/l$ 。

8.62 利用瑞利法求图 8.32 所示梁横向振动的基频。

注: 弹簧 k 中的回复力与位移成正比, 弹簧 k_t 中的回复力矩与角位移成正比。

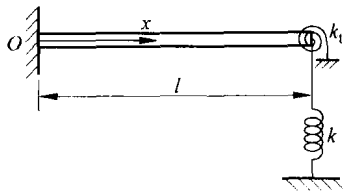


图 8.32 习题 8.62 图

8.64 利用瑞利法并假设振型为 $U(x)=c_1 \sin \frac{\pi x}{2l}$, 求图 8.33

所示锥形杆纵向振动的基频。该杆每单位长度的质量为 $m(x)=2m_0\left(1-\frac{x}{l}\right)$, 梁的刚度为 $EA(x)=2EA_0\left(1-\frac{x}{l}\right)$ 。

8.65 利用瑞利法并设 $W(x, y)=c_1 xy(x-a)(y-b)$, 估计四边均有支承的矩形薄膜的基频。(提示: $V=\frac{P}{2}\iint\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]dx dy$, $T=\frac{\rho}{2}\iint\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dx dy$)

8.66 利用瑞利法, 求图 8.34 所示系统的基频。

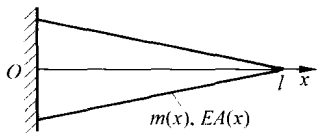


图 8.33 习题 8.64 图

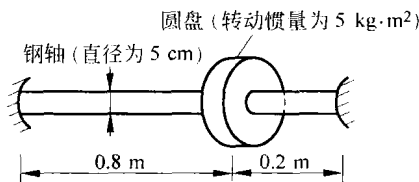


图 8.34 习题 8.66 图

8.67 分别取假定振型为(a) $W(x)=c_1 x(l-x)$, (b) $W(x)=c_1 x(l-x)+c_2 x^2(l-x)^2$, 估算两端固定弦的基频。

8.68 确定一端固定($x=0$)、一端自由($x=l$)的等截面梁纵向振动的基频。假设振型分别为(a) $U(x)=c_1(x/l)$, (b) $U(x)=c_1(x/l)^2$ 。

8.69 一端固定($x=0$)、一端自由($x=l$)的某变截面杆, 当 $0 \leq x \leq l/3$ 时, 其横截面面积为 $2A$, 当 $l/3 \leq x \leq l$ 时, 其横截面面积为 A 。取假设振型为

$$U(x) = c_1 \sin \frac{\pi x}{2l} + c_2 \sin \frac{3\pi x}{2l}$$

估计其纵向振动的前二阶固有频率。

8.70 利用瑞利-李兹法取假设振型为 $U(x)=c_1 \sin \frac{\pi x}{2l} + c_2 \sin \frac{3\pi x}{2l}$, 求解习题 8.64。

- 8.71 两端($x=0, l$ 处)固定的等截面弦单位长度的质量为 ρ ,初始张力为 P ,试求该弦的前两阶固有频率。假定挠曲线方程为 $w_1(x)=x(l-x)$, $w_2(x)=x^2(l-x)^2$ 。
- 8.72 利用程序 Program12.m, 求解例 8.4。
- 8.73 利用程序 Program12.m, 求两端固定细梁的前 5 阶固有频率。
- 8.74 利用 MATLAB 程序, 绘制例 8.1 中式(E.6)在 $x=l/2$ 处的动态响应曲线。数据为:
 $h=0.1\text{ m}$, $l=1.0\text{ m}$, $c=100\text{ m/s}$ 。
- 8.75 利用程序 Program12.cpp, 求解例 8.4。
- 8.76 利用程序 Program12.cpp, 求两端固定细梁的前 5 阶固有频率。
- 8.77 利用程序 PROGRAM12.F, 求解例 8.4。
- 8.78 利用程序 PROGRAM12.F, 求两端固定细梁的前 5 阶固有频率。
- 8.79 编写一个计算机程序, 借助固有频率的已知值, 数值求解一端固定一端简支梁的主振型。

设计题目

- 8.80 重为 F_0 的汽车以常速度通过一座桥梁, 如图 8.35(a)所示。这可以模型化为一集中载荷在简支梁上移动的情况, 如图 8.35(b)所示。集中载荷 F_0 可以视为在一极小的 2Δ 上均匀分布的载荷, 其可以展开为傅里叶正弦级数的和。试求桥的横向位移(注: 该位移可以视为由于每个移动的简谐力引起的响应之和), 假定桥的初始条件为 $w(x, 0) = \partial w / \partial t|_{(x, 0)} = 0$ 。

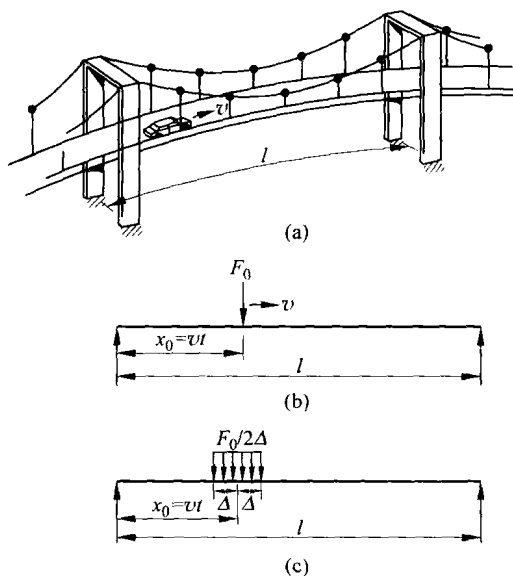


图 8.35 设计题目 8.80 图



欧拉(Leonhard Euler, 1707—1783), 瑞士数学家, 后来成为一名宫廷数学家和俄罗斯圣比德堡大学数学教授。欧拉在代数和几何领域均有诸多建树, 并对材料强度理论中涉及的变形曲线的几何形状很感兴趣。机械工程师和土木工程师对欧拉杆的屈曲载荷都是耳熟能详的; 欧拉常数和欧拉坐标系统在数学界也是众人皆知。他建立了杆弯曲振动的运动微分方程(Euler-Bernoulli 理论), 并给出了一系列形式的解。此外, 欧拉还研究了弦的动力学问题。

(照片引自: Struik D J. A Concise History of Mathematics, 2nd ed. New York: Dover Publications, 1948)

第9章 振动控制

9.1 引言

在工业环境中振源是多种多样的, 常见的有冲击过程比如打桩和爆破, 旋转或往复运动的机械如发动机、压缩机和马达, 运输工具如卡车、火车、飞机, 以及流体的流动等。振动往往会导致轴承的过度磨损、裂纹的形成、紧固件松弛、结构和机械的破坏、机械设备频繁的维修, 以及由此引起的过高费用、焊点破裂引发的电路故障、绝缘材料磨损造成的短路等。长期处在振动环境中的人会感到疼痛、不适, 工作效率降低。理论上有些情况下的振动是可以消除的, 但是用于消除振动的费用会使制造成本过高, 所以设计者需要在保证制造成本的情况下把振动限制在一个合理的范围内。有些情况下, 机械设备所受到的激励力是不可避免的。如前所述, 即使是相对很小的激励也可能在共振点附近引起非常大的响应, 尤其是在小阻尼系统中。在这种情况下, 利用隔振器或吸振器可以使响应的幅值得到很大程度的降低^[9.1]。本章介绍各种振动控制技术, 也就是那些消除或减小振动的方法。

9.2 振动列线图和振动标准

可接受的振动强度是用无阻尼单自由度系统在谐波激励下的响应来描述的, 那些边界线被标明在图中, 称为**振动列线图**。振动列线图反映了位移、速度、加速度的许可幅值随振动频率的变化情况。对于谐波运动

$$x(t) = X \sin \omega t \quad (9.1)$$

相应的速度和加速度为

$$v(t) = \dot{x}(t) = \omega X \cos \omega t = 2\pi f X \cos \omega t \quad (9.2)$$

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -\omega^2 X \sin \omega t = -4\pi^2 f^2 X \sin \omega t \quad (9.3)$$

其中, ω 是圆频率, rad/s; f 是频率, Hz; X 是振幅。振幅(X)、速度的最大值(v_{\max})、加速度的最大值(a_{\max})的关系如下:

$$v_{\max} = 2\pi f X \quad (9.4)$$

$$a_{\max} = -4\pi^2 f^2 X = -2\pi f v_{\max} \quad (9.5)$$

对式(9.4)和式(9.5)取对数,可得到下面的线性关系:

$$\ln v_{\max} = \ln(2\pi f) + \ln X \quad (9.6)$$

$$\ln v_{\max} = -\ln a_{\max} - \ln(2\pi f) \quad (9.7)$$

不难看出,当式(9.6)中振幅(X)不变时, $\ln v_{\max}$ 和 $\ln(2\pi f)$ 是呈线性关系的,并且斜率为1。与此类似,在式(9.7)中,当加速度的最大值(a_{\max})保持不变时, $\ln v_{\max}$ 和 $\ln(2\pi f)$ 也呈线性关系,但斜率为-1。这些关系在图9.1所示的列线图中也得到了说明。这样列线图中的一个点都表示了一个特定的正弦(谐波)振动。

人和机械所承受的振动往往含有多种频率成分,单一频率的情况是很少见的。在说明振动的强弱程度时一般用 $x(t)$, $v(t)$ 和 $a(t)$ 的均方根表示。

在不同的领域,振动的幅值和频率的大致范围^[9.2]如下:

(1) 原子的振动,其频率 $f=10^{12}$ Hz, 振幅 $a=10^{-8} \sim 10^{-6}$ mm。

(2) 微弱振动或地壳的颤动,其频率 $f=0.1 \sim 1$ Hz, 振幅 $a=10^{-5} \sim 10^{-3}$ mm。这种振动也常用于表示光学、电子、计算机设备等能承受的干扰上限。

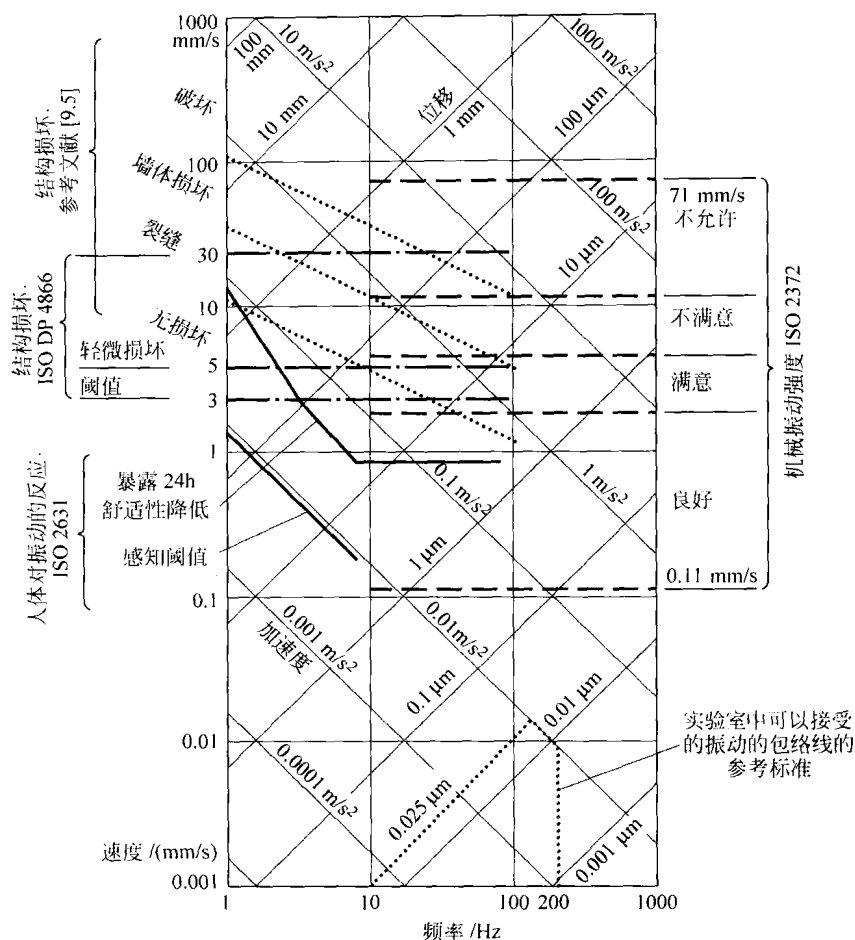
(3) 机械设备和建筑物的振动,其频率 $f=10 \sim 100$ Hz, 振幅 $a=0.01 \sim 1$ mm。人可以感知的频率范围是 $1 \sim 8$ Hz。

(4) 高层建筑的振动,其频率 $f=0.1 \sim 5$ Hz, 振幅 $a=10 \sim 1000$ mm。

ISO 2372^[9.3] 根据振动速度的均方根对机械振动的强度进行了定义。当速度范围为 $0.11 \sim 71$ mm/s 时,ISO 对以下4种机械划分了15个振动强度级别:①小型,②中型,③大型,④涡轮机。图9.1中给出了第3类机械,包括大型拖车的振动强度。在使用这些标准时,应在机械表面比如轴承盖对频率在 $10 \sim 1000$ Hz 的振动进行测量。

ISO DP 4866^[9.4] 给出了在爆破和 $1 \sim 100$ Hz 的稳态振动情况下,整体建筑的振动强度。由于爆破引起的振动,其速度应在距爆破点最近的建筑物的地基上测量。而对于稳态振动,速度的最大值应在建筑物的顶部测量。能够引起建筑物破坏的振动速度阈值是 $3 \sim 5$ mm/s, $5 \sim 30$ mm/s 就会造成轻微破坏。图9.1还给出了 Steffens^[9.5] 提供的由于振动引起结构破坏方面的其他结果。

图9.1中也给出了 ISO 2631^[9.6] 规定的人对振动的敏感极限。估计在美国有800多万名产业工人承受着全身或者部分身体的振动。全身的振动可能是由支承身体的部件(如直

图 9.1 振动列线图 and 振动标准^[9.2]

升机坐位)传递的。部分身体的振动可能是由工作过程造成的,比如冲压、钻削和切割作业。人能承受的全身振动的最低频率是 $4 \sim 8$ Hz。如图 9.2 所示,部分身体的振动在某一频率范围内会对身体的某些部位产生局部损害。此外,在不同频率的振动下还可以观察到下面的后果^[9.7]: 晕动病($0.1 \sim 1$ Hz),视觉模糊($2 \sim 20$ Hz),语言障碍($1 \sim 20$ Hz),工作障碍($0.5 \sim 20$ Hz),过度疲劳($0.2 \sim 15$ Hz)。

图 9.1 中还给出了实验室中可以接受的振动强度标准。

例 9.1 直升机坐椅与飞行员的总重为 1000 N,其在自重作用下产生的静变形是 10 mm。螺旋桨的振动以谐波运动的形式传递给坐椅,频率为 4 Hz,振幅为 0.2 mm。

- (a) 求飞行员能感受到的振动的大小。
- (b) 怎样改进坐椅的设计才能使减振效果更好?

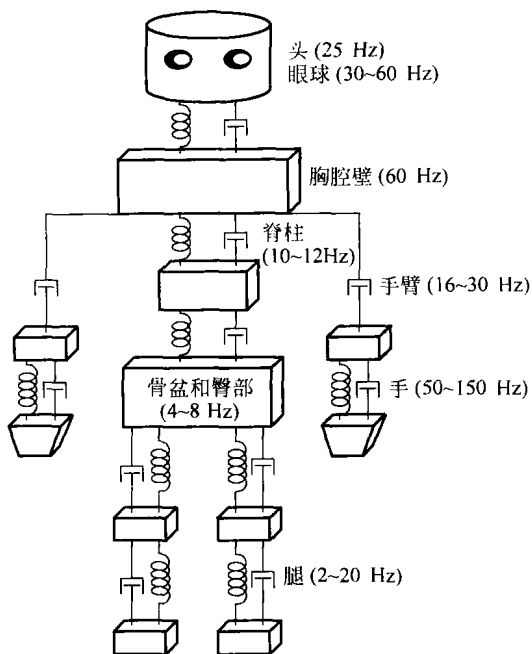


图 9.2 人体的不同部位的敏感振动频率

解: (a) 将座椅看作一个单自由度无阻尼振动系统, 可以得到下面的计算结果:

质量 $m = 1000/9.81 = 101.9368(\text{kg})$

刚度 $k = \frac{W}{\delta_{st}} = \frac{1000}{0.01} = 10^5 (\text{N/m})$

固有频率 $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10^5}{101.9368}} = 31.3209(\text{rad/s}) = 4.9849(\text{Hz})$

频率比 $r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{4.0}{4.9849} = 0.8024$ ①

因为作用在座椅上的是谐波激励, 且 $\zeta = 0$, 所以飞行员能够感受到的振动的振幅可以由式(3.68)求出:

$$X = \pm \frac{Y}{1 - r^2} \quad (\text{E. 1})$$

其中, Y 表示激励振幅。由式(E. 1)计算得

$$X = \frac{0.2}{1 - 0.8024^2} = 0.5616(\text{mm})$$

飞行员感受到的振动的速度和加速度幅值为

① 此处原著错, 导致随后的结果错。——译者

$$\omega X = 2\pi fX = 2\pi \times 4 \times 0.5616 = 14.1145(\text{mm/s})$$

$$\omega^2 X = (2\pi f)^2 X = 354.7373(\text{mm/s})^2 = 0.3547(\text{m/s}^2)$$

由图 9.1 可以看到,频率为 4 Hz 时,振幅为 0.5616 mm,不会引起飞行员的不适,但是速度和加速度幅值没有在合理的范围内。

(b) 为了将振动降到合理的水平,先将飞行员承受的加速度幅值从 0.3547 m/s^2 降到 0.01 m/s^2 。由式 $a_{\max} = 10 \text{ mm/s}^2 = (2\pi f)^2 X = (8\pi)^2 X$,可得 $X = 0.01583 \text{ mm}$ 。根据

$$\frac{X}{Y} = \frac{0.01583}{0.2} = \pm \frac{1}{1-r^2}$$

得 $r = 3.6923$ 。计算出改进后坐椅的固有频率为

$$\omega_n = \frac{\omega}{3.6923} = \frac{8\pi}{3.6923} = 6.8086(\text{rad/s})$$

又因为 $\omega_n = \sqrt{k/m}$, $m = 101.9368 \text{ kg}$,可得改进后的刚度为 $k = 4722.9837 \text{ N/m}$ 。

这说明坐椅的刚度应当从 10^5 N/m 降到 4722.9837 N/m 。这可以通过采用刚度较小的坐椅材料或不同的弹簧设计来实现。也可以通过增加坐椅质量来满足加速度幅值的要求,但这样会增大直升机的质量,在设计中通常是不允许的。

9.3 抑制振源强度

研究振动控制首先要考虑的是降低振源强度,使之产生较弱的振动。但是这种方法在很多情况下并非有效。例如,地震激励、大气湍流、路面不平度以及发动机燃料燃烧的不稳定性等都是不可控的。但在有些情况下振源的强度是可以改变的。例如,回转机械和往复运动机械中的不平衡量可以通过改进变小。这一般可以通过改进机械内部的平衡和提高零件的加工精度来实现。对于那些有相对运动的机械零件来讲,较小的公差和较低的表面粗糙度都有利于降低振动的影响。显然,零件的平衡度和加工精度要受到经济条件 and 生产条件的限制。本章将分析存在不平衡力的旋转机械和往复运动机械,以及由不平衡力引起的振动的控制问题。

9.4 旋转机械的平衡

偏心或不平衡质量会引起旋转圆盘的振动,如果振动得不是很厉害,通常这是可以接受的。如果不平衡量引起的振动超过允许的程度,则可以通过去除偏心质量或在合适的位置增加一个相同的质量来消除不平衡的影响。应用这种方法时,需要通过实验来确定不平衡量的大小和位置。实际情况中,机械的不平衡往往是由加工误差以及螺栓、螺母、铆钉、焊缝的尺寸变化等不确定因素造成的。本节将讨论两种类型的平衡问题:单面平衡问题(静平衡问题)和双面平衡问题(动平衡问题)。^[9.9,9.10]

9.4.1 单面平衡

像风扇、飞轮、齿轮、砂轮等装在轴上的圆盘形零件,由于加工误差,造成其质心偏离转动轴时,称这些零件是静不平衡的。要确定它们是否平衡,应首先将转动轴安装在两个低摩擦轴承上,如图 9.3(a)所示。转动圆盘,经过一段时间停下来后用粉笔在轮缘的最低点处做上标记。重复上述过程,如果圆盘是平衡的,则标记点在轮缘上是随机分布的。反之,如果圆盘不平衡,这些标记将是重合的。

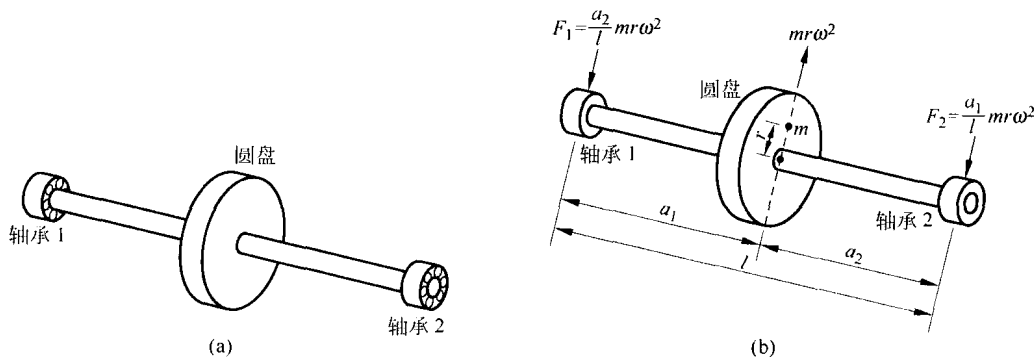


图 9.3 单盘转子的平衡

用这种方法检测出的不平衡称为**静不平衡**。静不平衡可以通过在粉笔标记处去除质量(例如钻孔)或在与粉笔标记处间隔 180° 的位置增加质量来消除。由于不平衡量的大小是未知的,去除或要增加的质量必须通过反复的实验-校正来确定。因为要去掉或增加的质量都是针对一个平面进行的,这种方法称为单面平衡。以确定的角速度 ω 转动圆盘,测量两轴承上的反作用力可以求出不平衡量。如果不平衡量 m 到圆盘中心的距离为 r ,则离心力为 $mr\omega^2$ 。因此测量轴承上的反作用力 F_1 和 F_2 可以求出 m 和 r :

$$F_1 = \frac{a_2}{l} m r \omega^2, \quad F_2 = \frac{a_1}{l} m r \omega^2 \quad (9.8)$$

图 9.4 说明如何借助振动分析仪进行单面平衡。旋转轴支承于轴承 A 处,由电动机驱动以恒定的角速度 ω 转动,端部固定一个砂轮(圆盘)。

如图 9.5 所示,在开始测量之前,分别在转子(砂轮)和定子(支座)上面作**参考标记**,又叫**相位标记**。将拾振器与轴承相连,如图 9.4 所示,调整振动分析仪的频率与转动的角速度一致。由于转子的不平衡产生的振动信号(位移幅值)可以由分析仪表盘

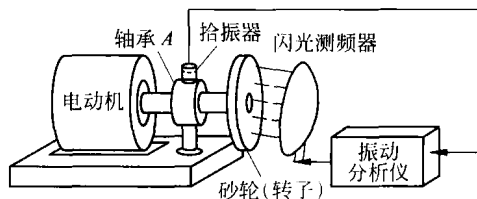


图 9.4 利用振动分析仪对单盘转子进行平衡标定

读出。频闪观测光(周期性光脉冲)被振动分析仪以转子的转动频率射出。当转子以角速度

ω 转动时,转子上的相位标记在频闪观测光的照射下看起来就会固定在某一位置不动,但由于响应的相位滞后,它与定子上的相位标记有一个夹角 θ ,如图 9.5(b)所示。这样由初始不平衡产生的相角 θ 和振幅 A_u 都被测得(从振动分析仪读出)。然后关闭电机,待转子停止转动后,在转子上加上一个已知的实验载荷 W (图 9.5(b)),再测量由于原始不平衡和实验载荷产生的新的相角 ϕ 和振幅 A_{u+w} ,如图 9.5(c)所示。^①

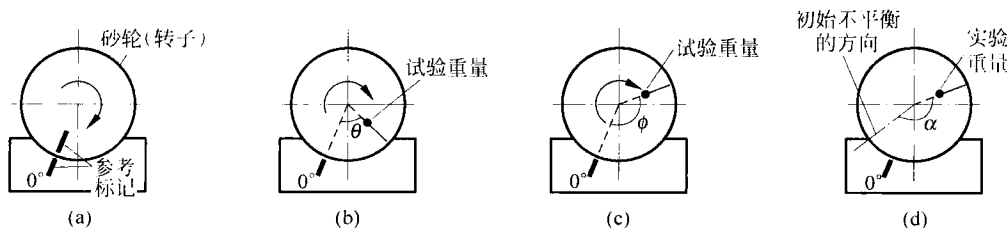
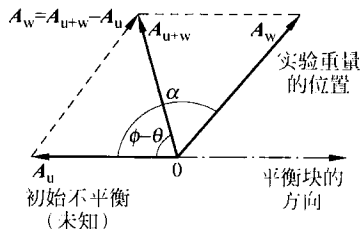


图 9.5 参考标记线

现在通过矢量图来确定圆盘平衡所需校正质量的大小和位置。如图 9.6 所示,先画出对应初始不平衡的矢量 A_u ,方向任意,长度为 A_u 。然后再画出初始不平衡和实验载荷对应的矢量 A_{u+w} ,与 A_u 夹角为 $\phi - \theta$,长度为 A_{u+w} 。则差矢量 $A_w = A_{u+w} - A_u$ 对应实验载荷 W 产生的不平衡量。 A_w 的大小由余弦定理求出:

$$A_w = [A_u^2 + A_{u+w}^2 - 2A_u A_{u+w} \cos(\phi - \theta)]^{\frac{1}{2}}$$



(9.9) 图 9.6 由于实验重量 W 引起的不平衡

既然实验载荷 W 的大小已知,而且还知道它相对于初始不平衡的方向(图 9.6 中的 α),则初始不平衡量与实验载荷的夹角为 α ,如图 9.5(d)所示。由余弦定理得

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{A_u^2 + A_w^2 - A_{u+w}^2}{2A_u A_w} \quad (9.10)$$

初始不平衡量的大小为 $W_o = (A_u/A_w)W$,到圆心的距离与实验载荷相同。初始不平衡量的位置和大小确定之后,就可以添加校正质量使砂轮平衡。

9.4.2 双面平衡

单面平衡只能用于一个平面上的平衡,例如转子上装有一个刚性圆盘的情况。如果转子的形状为如图 9.7 所示的一个细长刚体,沿转子长度的任何一部分都可能有不平衡。这

^① 注意如果实验重量放置在一个使得实际的不平衡按顺时针方向转动,相位标记线的静止位置将按着逆时针方向转过完全相同的量。反过来也是一样。

时可以在任意两个平面上增加平衡质量使转子平衡。^[9.10,9.11] 为了方便起见,一般选择转子的两个端面(图 9.7 的虚线部分)。

为了说明转子上的任意不平衡量都可以简化为任意两个平面上的等效质量,考虑如图 9.8(a)所示在距右端面 $l/3$ 处有一不平衡量 m 的情况。当转子转速为 ω 时,由于此不平衡产生的离心力为 $F=m\omega^2R$,式中 R 是转子的半径。不平衡量 m 可以简化为转子端面上的两个等效质量 m_1 和 m_2 ,如图 9.8(b) 所示。由于此二等效不平衡质量 m_1 和 m_2 而作用在转子上的力分别是 $F_1=m_1\omega^2R$ 和 $F_2=m_2\omega^2R$ 。由于图 9.8(a)和(b)中的力等效,可得

$$m\omega^2R = m_1\omega^2R + m_2\omega^2R \quad \text{或者} \quad m = m_1 + m_2 \quad (9.11)$$

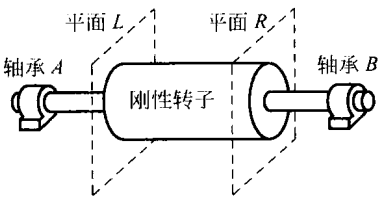


图 9.7 转子的双面平衡

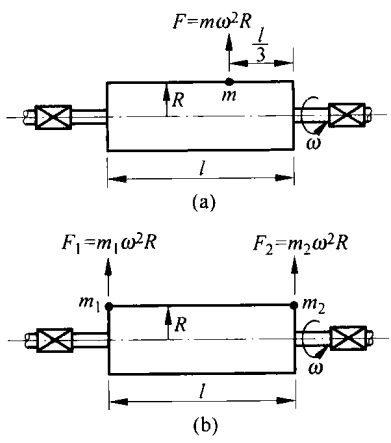


图 9.8 用两个等效不平衡质量代替一个不平衡质量

又因为这两种情况下的力矩等效,考虑对右端的力矩有

$$m\omega^2R \frac{l}{3} = m_1\omega^2Rl \quad \text{或者} \quad m = 3m_1 \quad (9.12)$$

由式(9.11)和式(9.12)可以求得 $m_1 = m/3, m_2 = 2m/3$ 。因此任何不平衡量都可以由两转子端面上的等效质量来替代。

下面讨论如何使用振动分析仪来实现双面平衡。图 9.9 中,用左、右两个端面上的不平衡量 U_L 和 U_R 来代替转子总的不平衡量。当转子以速度 ω 转动时,在轴承 A 和 B 上测量由初始不平衡量产生的振幅和相位,结果分别记作 V_A 和 V_B 。矢量的大小表示振幅,方向是通过示速器观测到的相角(与定子上标记线的夹角)的负值。矢量 V_A 和 V_B 可以表示为

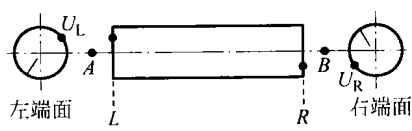


图 9.9 双面平衡

$$V_A = A_{AL}U_L + A_{AR}U_R \quad (9.13)$$

$$V_B = A_{BL}U_L + A_{BR}U_R \quad (9.14)$$

其中, \mathbf{A}_{ij} 表示平面 j ($j=L, R$) 处的不平衡对轴承 i ($i=A, B$) 处振动的影响系数。显然, 式(9.13)和式(9.14)中的 $\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R$ 以及所有的 \mathbf{A}_{ij} 都是未知的。

与单面平衡的过程相似, 增加已知的实验载荷后, 再测量出与不平衡量有关的信息。首先在左端面上确定的角度上增加已知载荷 \mathbf{W}_L , 当转子转速为 ω 时在两轴承上测量振动的振幅和相位。将测得的数据表示为矢量形式:

$$\mathbf{V}'_A = \mathbf{A}_{AL}(\mathbf{U}_L + \mathbf{W}_L) + \mathbf{A}_{AR}\mathbf{U}_R \quad (9.15)$$

$$\mathbf{V}'_B = \mathbf{A}_{BL}(\mathbf{U}_L + \mathbf{W}_L) + \mathbf{A}_{BR}\mathbf{U}_R \quad (9.16)$$

从式(9.15)和式(9.16)中分别减去式(9.13)和式(9.14), 化简后得^①

$$\mathbf{A}_{AL} = \frac{\mathbf{V}'_A - \mathbf{V}_A}{\mathbf{W}_L} \quad (9.17)$$

$$\mathbf{A}_{BL} = \frac{\mathbf{V}'_B - \mathbf{V}_B}{\mathbf{W}_L} \quad (9.18)$$

去掉 \mathbf{W}_L , 并在右端面确定的角度位置增加已知载荷 \mathbf{W}_R , 当转速为 ω 时测量由 \mathbf{W}_R 引起的振动。将测得的结果亦表示为矢量形式:

$$\mathbf{V}''_A = \mathbf{A}_{AR}(\mathbf{U}_R + \mathbf{W}_R) + \mathbf{A}_{AL}\mathbf{U}_L \quad (9.19)$$

$$\mathbf{V}''_B = \mathbf{A}_{BR}(\mathbf{U}_R + \mathbf{W}_R) + \mathbf{A}_{BL}\mathbf{U}_L \quad (9.20)$$

将式(9.19)和式(9.20)分别减去式(9.13)和式(9.14), 化简后得

$$\mathbf{A}_{AR} = \frac{\mathbf{V}''_A - \mathbf{V}_A}{\mathbf{W}_R} \quad (9.21)$$

$$\mathbf{A}_{BR} = \frac{\mathbf{V}''_B - \mathbf{V}_B}{\mathbf{W}_R} \quad (9.22)$$

只要矢量算子 \mathbf{A}_{ij} 已知, 就可以由式(9.13)和式(9.14)求出矢量 \mathbf{U}_L 和 \mathbf{U}_R :

$$\mathbf{U}_L = \frac{\mathbf{A}_{BR}\mathbf{V}_A - \mathbf{A}_{AR}\mathbf{V}_B}{\mathbf{A}_{BR}\mathbf{A}_{AL} - \mathbf{A}_{AR}\mathbf{A}_{BL}} \quad (9.23)$$

$$\mathbf{U}_R = \frac{\mathbf{A}_{BL}\mathbf{V}_A - \mathbf{A}_{AL}\mathbf{V}_B}{\mathbf{A}_{BL}\mathbf{A}_{AR} - \mathbf{A}_{AL}\mathbf{A}_{BR}} \quad (9.24)$$

这样转子就可以通过在不同的平面上增加等值反向的平衡质量来实现平衡。在左、

① 可见, 在计算所需的平衡重量时, 经常要用到复数减法、除法和乘法。如果

$$\mathbf{A} = a \angle \theta_A, \quad \mathbf{B} = b \angle \theta_B$$

则可以把它们写成如下形式:

$$\mathbf{A} = a_1 + ia_2, \quad \mathbf{B} = b_1 + ib_2$$

式中 $a_1 = a \cos \theta_A, a_2 = a \sin \theta_A, b_1 = b \cos \theta_B, b_2 = b \sin \theta_B$ 。所以复数减法、除法和乘法的公式为^[9.12]

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (a_1 - b_1) + i(a_2 - b_2)$$

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{b_1^2 + b_2^2}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (a_1 b_1 - a_2 b_2) + i(a_2 b_1 + a_1 b_2)$$

右两平面上需增加的平衡量可以用矢量表示如下: $\mathbf{B}_L = -\mathbf{U}_L, \mathbf{B}_R = -\mathbf{U}_R$ 。不难看出,双面平衡是单面平衡的一种简单扩展。对高速转子而言,虽然在制造过程中就已经进行了平衡,但是由于蠕滑、高温作用以及其他一些因素的影响,也会造成轻微的不平衡,因此通常要在安装现场再次对它进行平衡。图 9.10 所示是双面平衡的实例。

例 9.2 关于汽轮机转子的双面平衡问题。下面表格中是初始不平衡、右端面增加实验载荷、左端面增加实验载荷所测得的数据。振幅的单位是 mils(1/1000 in)。对其进行双面平衡,确定所需的平衡质量的大小和位置。

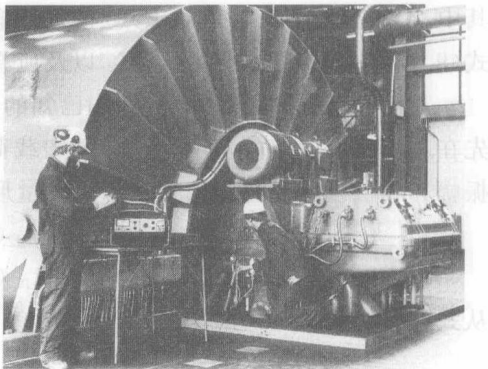


图 9.10 双面平衡的例子(经 Bruel and Kjaer Instruments, Inc., Marlborough, Mass. 授权使用)

条 件	位移幅值		相 角	
	轴承 A	轴承 B	轴承 A	轴承 B
初始不平衡	8.5	6.5	60°	205°
$W_L = 10.0 \text{ oz}^{①}$, 与参考标记呈 270°	6.0	4.5	125°	230°
$W_R = 12.0 \text{ oz}$, 与参考标记呈 180°	6.0	10.5	35°	160°

解: 将已知数据表示为矢量形式,有

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_A &= 8.5 \angle 60^\circ = 4.2500 + i7.3612 \\ \mathbf{V}_B &= 6.5 \angle 205^\circ = -5.8910 - i2.7470 \\ \mathbf{V}'_A &= 6.0 \angle 125^\circ = -3.4415 + i4.9149 \\ \mathbf{V}'_B &= 4.5 \angle 230^\circ = -2.8926 - i3.4472 \\ \mathbf{V}''_A &= 6.0 \angle 35^\circ = 4.9149 + i3.4472 \\ \mathbf{V}''_B &= 10.5 \angle 160^\circ = -9.8668 + i3.5912 \\ \mathbf{W}_L &= 10.0 \angle 270^\circ = 0.0000 - i10.0000 \\ \mathbf{W}_R &= 12 \angle 180^\circ = -12.0000 + i0.0000 \end{aligned}$$

由式(9.17)和式(9.18)得

$$\mathbf{A}_{AL} = \frac{\mathbf{V}'_A - \mathbf{V}_A}{\mathbf{W}_L} = \frac{-7.6915 - i2.4463}{0.0000 - i10.0000} = 0.2446 - i0.7691$$

① 1 oz(盎司) = $\frac{1}{16}$ lb = 28.349 52 g.

$$\mathbf{A}_{BL} = \frac{\mathbf{V}'_B - \mathbf{V}_B}{\mathbf{W}_L} = \frac{2.9985 - i0.7002}{0.0000 - i10.0000} = 0.0700 + i0.2998$$

由式(9.21)和式(9.22)得

$$\mathbf{A}_{AR} = \frac{\mathbf{V}''_A - \mathbf{V}_A}{\mathbf{W}_R} = \frac{0.6649 - i3.9198}{-12.0000 + i0.0000} = -0.0554 + i0.3266$$

$$\mathbf{A}_{BR} = \frac{\mathbf{V}''_B - \mathbf{V}_B}{\mathbf{W}_R} = \frac{-3.9758 + i6.3382}{-12.0000 + i0.0000} = 0.3313 - i0.5282$$

由式(9.23)和式(9.24)求出不平衡量:

$$\begin{aligned} U_L &= \frac{(5.2962 + i0.1941) - (1.2237 - i1.7721)}{(-0.3252 - i0.3840) - (-0.1018 + i0.0063)} \\ &= \frac{4.0725 + i1.9661}{-0.2234 - i0.3903} = -8.2930 + i5.6879 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_R &= \frac{(-1.9096 + i1.7898) - (3.5540 + i3.8590)}{(-0.1018 + i0.0063) - (-0.3252 - i0.3840)} \\ &= \frac{1.6443 - i2.0693}{0.2234 + i0.3903} = -2.1773 - i5.4592 \end{aligned}$$

故所需的平衡质量为

$$\mathbf{B}_L = -\mathbf{U}_L = 8.2930 - i5.6879 = 10.0561 / 145.5548^\circ$$

$$\mathbf{B}_R = -\mathbf{U}_R = 2.1773 + i5.4592 = 5.8774 / 248.2259^\circ$$

即在左端面与参考标记成 145.5548° 处增加 10.0561 oz 的质量,在右端面与参考标记成 248.2259° 处增加 5.8774 oz 的质量就可以使转子平衡。同时,上面的分析过程也表明,增加的平衡量与实验载荷到轴心的距离是相同的。如果附加的平衡质量距轴心的距离发生变化,所需的平衡量与到轴心的距离是成反比例的。

9.5 轴的涡动

在前面几节,转子系统也就是轴和转子都被当作刚体来研究。但是在实际应用中,如涡轮、压缩机、电动机及水泵,都是一个较重的转子被安装在一个较轻的挠性轴上,此挠性轴再用轴承支承。由于制造误差,所有的转子都会有不平衡量。这些不平衡量和其他一些因素,如轴的刚度和阻尼、陀螺效应和轴承内的流体摩擦等,会使轴在以某一确定的速度旋转时产生复杂的弯曲变形,这个转速称为**涡动转速**或**临界转速**。严格地说,涡动是指由两轴承的中心线和变形以后的轴所组成的平面的转动。这一节主要研究转子系统的建模、临界速度、转子系统的响应和稳定性问题。^[9, 13, 9, 14]

9.5.1 运动微分方程

如图 9.11 所示,考虑一个由两个轴承支承、中间部位装有一个质量为 m 的转子或圆盘

的轴。假设转子由于质量不平衡受到一个稳态激励,作用在转子上的力有由质心加速度引起的惯性力、轴的弹性力以及来自系统内部和外部的摩擦力。^①

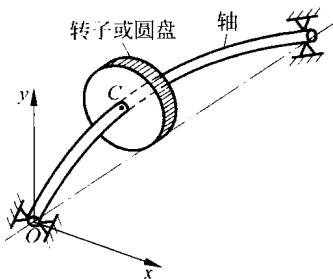


图 9.11 固定有转子的轴

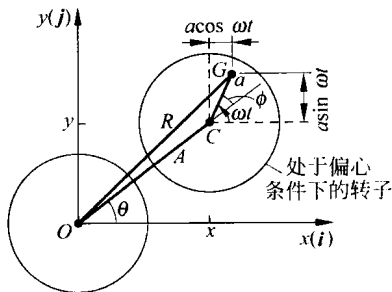


图 9.12 具有偏心的转子

如图 9.12 所示,设 O 为轴经过良好平衡后的平衡位置,轴(直线 CG)以等角速度 ω 转动。转动时,转子的径向变形为 $A=OC$ (稳定状态时)。设转子的偏心为 a ,即转子的质心 G 与其几何中心 C 的距离为 a 。建立一个以 O 为原点的固定坐标系(x, y 相对地球静止)来描述系统的运动。 OC 的角速度 $\dot{\theta} = d\theta/dt$ 称为涡动速度,一般来说它不等于 ω 。转子(质量为 m)的运动微分方程可以写作如下形式:

$$\text{惯性力}(\mathbf{F}_i) = \text{弹性力}(\mathbf{F}_e) + \text{内部阻尼力}(\mathbf{F}_{di}) + \text{外部阻尼力}(\mathbf{F}_{de}) \quad (9.25)$$

式(9.25)中的几种力可以表示为

$$\text{惯性力: } \mathbf{F}_i = m\ddot{\mathbf{R}} \quad (9.26)$$

其中, \mathbf{R} 是质心的矢径,按下式计算:

$$\mathbf{R} = (x + a\cos\omega t)\mathbf{i} + (y + a\sin\omega t)\mathbf{j} \quad (9.27)$$

x 和 y 表示几何中心 C 的坐标; \mathbf{i} 和 \mathbf{j} 分别表示 x 轴和 y 轴方向的单位矢量。由式(9.26)和式(9.27)得

$$\mathbf{F}_i = m[(\ddot{x} - a\omega^2\cos\omega t)\mathbf{i} + (\ddot{y} - a\omega^2\sin\omega t)\mathbf{j}] \quad (9.28)$$

$$\text{弹性力: } \mathbf{F}_e = -k(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \quad (9.29)$$

其中, k 表示轴的刚度系数。

$$\text{内部阻尼力: } \mathbf{F}_{di} = -c_i[(\dot{x} + \omega y)\mathbf{i} + (\dot{y} + \omega x)\mathbf{j}] \quad (9.30)$$

其中, c_i 表示内部或旋转阻尼系数。

$$\text{外部阻尼力: } \mathbf{F}_{de} = -c(\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}) \quad (9.31)$$

其中, c 表示外部阻尼系数。将式(9.28)~式(9.31)代入式(9.25),可以得到标量形式的运

^① 对任意转子系统存在两种不同的阻尼力或摩擦力,这两种力根据力是否随轴的转动而发生变化来区分。如果力在空间的作用位置不变,如轴承支承机构的阻尼(造成能量损失),这种阻尼称为固定阻尼或外部阻尼。反之,如果力在空间的作用位置随轴的转动发生变化,如轴材料内部的摩擦,这种阻尼称为旋转阻尼或内部阻尼。

动微分方程:

$$m \ddot{x} + (c_i + c) \dot{x} + kx - c_i \omega y = m\omega^2 a \cos \omega t \quad (9.32)$$

$$m \ddot{y} + (c_i + c) \dot{y} + ky - c_i \omega x = m\omega^2 a \sin \omega t \quad (9.33)$$

这些描述转子横向振动的运动方程都是耦合的,并且都与轴的稳态转动速度 ω 有关。定义复数 w :

$$w = x + iy \quad (9.34)$$

其中, $i = (-1)^{1/2}$ 。用 i 乘以式(9.33)再与式(9.32)相加,得到一个单一的运动方程:

$$m \ddot{w} + (c_i + c) \dot{w} + kw - i\omega c_i w = m\omega^2 a e^{i\omega t} \quad (9.35)$$

9.5.2 临界速度

临界速度是指轴转动的频率等于轴的某一固有频率时的转速。无阻尼转子系统的固有频率可以由式(9.32)、式(9.33)或式(9.35)(只保留齐次项,并令 $c_i = c = 0$)求得。由此可得系统的固有频率(无阻尼系统的临界速度):

$$\omega_n = \left(\frac{k}{m} \right)^{1/2} \quad (9.36)$$

当转子的转动速度等于此临界速度时,转子会产生较大的变形,传递到轴承上的力会造成轴承的损坏。人们希望能使转子迅速地通过临界速度从而避免轴的涡动,因为缓慢地通过临界速度会使轴的涡动振幅不断增大。参考文献[9.15]研究了转子在加速和减速条件下通过临界速度时的行为。参考文献[9.16]给出了计算旋转轴的临界速度的 FORTRAN 程序。

9.5.3 系统的响应

为了确定转子的响应,不妨假设转子的不平衡产生的激励是简谐力,并且认为内部阻尼可忽略不计(即 $c_i = 0$)。通过求解方程(9.32)和方程(9.33)(或方程(9.35)),可以得到由质量不平衡产生的转子的涡动振幅。当 $c_i = 0$ 时,由式(9.35)得

$$m \ddot{w} + c \dot{w} + kw = m\omega^2 a e^{i\omega t} \quad (9.37)$$

式(9.37)的解可以表示为

$$w(t) = C e^{-(\alpha + \beta)t} + A e^{i(\omega t - \phi)} \quad (9.38)$$

其中, C, β, A 和 ϕ 是常数。不难看出,式(9.38)中的第1项包含着指数衰减项,表示瞬态解,第2项表示的是稳态的圆周运动(涡动)。将式(9.38)的稳态解部分代入式(9.37),可以求得涡动的振幅为

$$A = \frac{m\omega^2 a}{[(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 c^2]^{1/2}} = \frac{ar^2}{[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{1/2}} \quad (9.39)$$

相角为

$$\phi = \arctan \frac{c\omega}{k - m\omega^2} = \arctan \frac{2\zeta r}{1 - r^2} \quad (9.40)$$

其中

$$r = \frac{\omega}{\omega_n}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

将式(9.39)对 ω 求导,并令导数等于零,可以求出振幅最大时 ω 的值:

$$\omega = \frac{\omega_n}{\left\{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{c}{\omega_n}\right)^2\right\}^{1/2}} \quad (9.41)$$

其中, ω_n 由式(9.36)确定。可以看到,只有当阻尼系数为零时,临界转速才恰好对应固有频率 ω_n 。此外,式(9.41)表明,一般情况下阻尼的存在将使临界转速的值大于 ω_n 。图 9.13 是根据式(9.39)、式(9.40)画出的。由于激振力是与 ω^2 成正比的,因此人们往往会认为振幅会随着 ω 的增大而增大,但振幅随 ω 的变化规律却是如图 9.13 所示的那样。由式(9.39)可知,低速时的涡动振幅是由弹簧常数 k 决定的,因为其他两项 $m\omega^2$ 和 $c^2\omega^2$ 都很小。此外,由式(9.40)可以看出,当 ω 很小时,相角 ϕ 的值可以认为是 0° 。随着 ω 的增大,当 $k - m\omega^2 = 0$ 时发生共振,响应的振幅达到最大值。在共振区域的附近,响应由于阻尼的影响而得到抑制。共振时的相位差是 90° 。当 ω 增加到大干 ω_n 时,式(9.39)中的响应主要由质量项 $m^2\omega^4$ 决定。因为这一项与不平衡力的相位差是 180° ,轴转动的方向和不平衡力的方向是相反的,所以轴的响应被削弱。

注意:

(1) 式(9.38)是在默认满足向前同步态涡动($\dot{\theta} = \omega$)的情况下得出的。对于一般的情况,如果设式(9.37)的稳态解为 $w(t) = Ae^{i(\gamma t - \phi)}$,可以求出 $\gamma = \pm\omega$ 。 $\gamma = +\omega$ 表示向前的同步涡动, $\gamma = -\omega$ 表示向后的同步涡动。对于图 9.11 所示的简单转子,实际上只存在向前的同步涡动。

(2) 为了确定轴承反力,首先要求得圆盘质心与轴承中心线的偏心量,即图 9.12 中的 R :

$$R^2 = A^2 + a^2 + 2Aa \cos \phi \quad (9.42)$$

由式(9.39)和式(9.40),式(9.42)可以写成

$$R = a \left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right]^{1/2} \quad (9.43)$$

轴承的反力可以由离心力 $m\omega^2 R$ 确定。

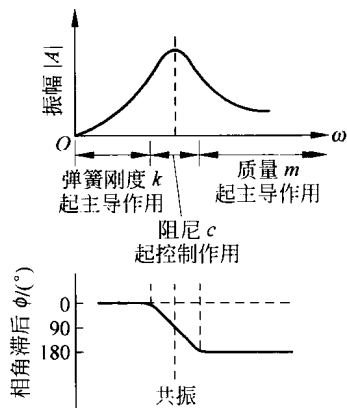


图 9.13 式(9.39)和式(9.40)的图形表示

9.5.4 稳定性分析

内部摩擦、转子偏心、轴承中的油膜等都会引起挠性转子系统产生不稳定现象。正如前面提到的,可以通过研究动力学方程来讨论系统的稳定性。设 $w(t) = e^{st}$, 根据式(9.35)的齐次部分可以得到如下特征方程:

$$ms^2 + (c_i + c)s + k - i\omega c_i = 0 \quad (9.44)$$

令 $s = i\lambda$, 式(9.44)转化为

$$-m\lambda^2 + (c_i + c)i\lambda + k - i\omega c_i = 0 \quad (9.45)$$

这是如下一般方程的特殊形式:

$$(p_2 + iq_2)\lambda^2 + (p_1 + iq_1)\lambda + (p_0 + iq_0) = 0 \quad (9.46)$$

根据罗斯-霍尔威茨准则,特征方程所描述的系统稳定的充分与必要条件是满足以下不等式组:

$$-\begin{vmatrix} p_2 & p_1 \\ q_2 & q_1 \end{vmatrix} > 0 \quad (9.47)$$

$$\begin{vmatrix} p_2 & p_1 & p_0 & 0 \\ q_2 & q_1 & q_0 & 0 \\ 0 & p_2 & p_1 & p_0 \\ 0 & q_2 & q_1 & q_0 \end{vmatrix} > 0 \quad (9.48)$$

注意到式(9.45)中 $p_2 = -m, q_2 = 0, p_1 = 0, q_1 = c_i + c, p_0 = k, q_0 = -\omega c_i$, 由不等式(9.47)和(9.48)得

$$m(c_i + c) > 0 \quad (9.49)$$

$$km(c_i + c)^2 - m^2(\omega^2 c_i^2) > 0 \quad (9.50)$$

不等式(9.49)是自然成立的。由式(9.50)得以下条件:

$$\sqrt{\frac{k}{m}} \left(1 + \frac{c}{c_i}\right) - \omega > 0 \quad (9.51)$$

这个不等式也表明当转速高于第一临界速度 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 时,内部和外部的摩擦会导致系统的不稳定。

例 9.3 轴上装有一个重 100 lbf、偏心为 0.1 in 的转子,轴的转速为 1200 r/min。试确定:(a)稳态时的涡动振幅;(b)系统启动时最大的涡动振幅。假定轴的刚度系数为 2×10^5 lbf/in,外部阻尼比为 0.1。

解: 转子的激励频率(轴的转速)为

$$\omega = \frac{1200 \times 2\pi}{60} = 40\pi = 125.6640 \text{ (rad/s)}$$

系统的固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2.0 \times 10^5}{100/386.4}} = 87.9090(\text{rad/s})$$

频率比为

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{125.6640}{87.9090} = 1.4295$$

(a) 稳态时的振幅可以由式(9.39)求得:

$$A = \frac{ar^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (\text{E.1})$$

$$= \frac{0.1 \times 1.4295^2}{\sqrt{(1-1.4295^2)^2 + (2 \times 0.1 \times 1.4295)^2}} = 0.18887(\text{in}) \quad (\text{E.2})$$

(b) 系统启动时,转子的频率(速度) ω 要通过系统的固有频率。因此,在式(E.1)中令 $r=1$,可得涡动振幅为

$$A|_{r=1} = \frac{a}{2\xi} = \frac{0.1}{2 \times 0.1} = 0.5(\text{in})$$

9.6 活塞式发动机的平衡

活塞式发动机的基本运动部件为活塞、曲柄和连杆。引起其振动的原因包括汽缸中气体压力的周期性变化以及运动部件的惯性力。下面将对活塞式发动机进行分析,找出这些因素产生的不平衡力。

9.6.1 气体压力变化产生的不平衡力

图9.14(a)是活塞式发动机汽缸的示意图。发动机是由汽缸中膨胀的气体驱动的。膨胀气体对活塞产生一个压力 F ,并经连杆传递给曲轴。力 F 的反力可以分解为两部分:一部分沿连杆的方向,大小为 $F/\cos\phi$;另一部分是水平方向的力,大小是 $F\tan\phi$ 。力 $F/\cos\phi$ 产生驱动曲轴转动的力矩 M_i (图9.14(b)中, M_i 使曲轴绕垂直于纸面并通过 Q 点的转动轴转动),其值为

$$M_i = \left(\frac{F}{\cos\phi} \right) r \cos\theta \quad (9.52)$$

由整个系统受力平衡可知,曲轴轴承所受的垂直方向的力为 F ,水平方向上的力为 $F\tan\phi$ 。

因此发动机固定元件受力如下:

- (1) 汽缸盖所受的向上的力 F 。
- (2) 汽缸盖所受的向右的力 $F\tan\phi$ 。
- (3) 曲轴轴承 Q 所受的向下的力 F 。

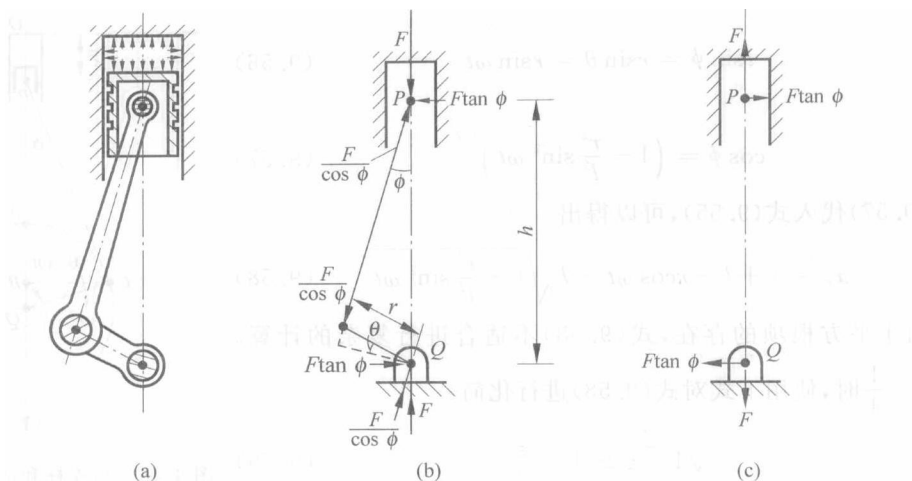


图 9.14 作用在活塞式发动机上的力

(4) 曲轴轴承所受的向左的力 $F \tan \phi$ 。

这些力都已标示在图 9.14(c)中。虽然合力为零,发动机体还受到合力矩 $M_Q = Fh \tan \phi$ 的作用,这里的 h 可由以下几何关系求出:

$$h = \frac{r \cos \theta}{\sin \phi} \quad (9.53)$$

因此合力矩还可以表示为

$$M_Q = \frac{Fr \cos \theta}{\cos \phi} \quad (9.54)$$

正如所料,式(9.52)给出的结果 M_i 和式(9.54)给出的结果 M_Q 是一样的。这表明,由于作用于活塞上的气体压力而引起的作用在曲轴上的力矩,传递给了发动机的支承。因为力 F 的大小是随时间变化的,所以合力矩 M_Q 也是随时间变化的。力 F 循环变化的频率由发动机汽缸的个数、工作循环的周期和发动机的转速决定。

9.6.2 运动部件的惯性产生的不平衡力

1. 活塞的加速度

图 9.15 中,活塞式发动机的曲柄长度为 r 、连杆的长度为 l ,假定曲柄以恒定的角速度 ω 沿逆时针方向转动。取活塞运动的上止点作为 x 轴的原点 O ,随着活塞 P 的移动,曲柄也产生对应的角位移 $\theta = \omega t$ 。这时活塞的位移(从上止点(原点 O)计)为

$$\begin{aligned} x_p &= r + l - r \cos \theta - l \cos \phi \\ &= r + l - r \cos \omega t - l \sqrt{1 - \sin^2 \phi} \end{aligned} \quad (9.55)$$

但是

$$l \sin \phi = r \sin \theta = r \sin \omega t \quad (9.56)$$

于是

$$\cos \phi = \left(1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \omega t\right)^{1/2} \quad (9.57)$$

将式(9.57)代入式(9.55),可以得出

$$x_p = r + l - r \cos \omega t - l \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \omega t} \quad (9.58)$$

由于平方根项的存在,式(9.58)不适合进行复杂的计算。

当 $r/l < \frac{1}{4}$ 时,使用下式对式(9.58)进行化简:

$$\sqrt{1 - \epsilon} \simeq 1 - \frac{\epsilon}{2} \quad (9.59)$$

因此式(9.58)可以写作

$$x_p \simeq r(1 - \cos \omega t) + \frac{r^2}{2l} \sin^2 \omega t \quad (9.60)$$

或者

$$x_p = r \left(1 + \frac{r}{2l}\right) - r \left(\cos \omega t + \frac{r}{4l} \cos 2\omega t\right) \quad (9.61)$$

式(9.61)对时间求导就可以得到活塞的速度和加速度:

$$\dot{x}_p = r\omega \left(\sin \omega t + \frac{r}{2l} \sin 2\omega t\right) \quad (9.62)$$

$$\ddot{x}_p = r\omega^2 \left(\cos \omega t + \frac{r}{l} \cos 2\omega t\right) \quad (9.63)$$

2. 曲柄销的加速度

根据图 9.15 中的 xy 坐标系,可以求出曲柄销 C 在水平和竖直方向的位移:

$$x_c = OA + AB = l + r(1 - \cos \omega t) \quad (9.64)$$

$$y_c = CB = r \sin \omega t \quad (9.65)$$

式(9.64)和式(9.65)对时间求导可以得到曲柄销的速度和加速度:

$$\dot{x}_c = r\omega \sin \omega t \quad (9.66)$$

$$\dot{y}_c = r\omega \cos \omega t \quad (9.67)$$

$$\ddot{x}_c = -r\omega^2 \cos \omega t \quad (9.68)$$

$$\ddot{y}_c = -r\omega^2 \sin \omega t \quad (9.69)$$

3. 惯性力

虽然连杆的质量是沿其长度分布的,但一般情况下可以将其简化为两端分别有一个集

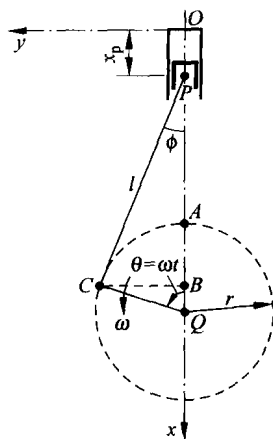


图 9.15 与连杆和活塞相连的曲柄的运动

中质量的无重杆。如果用 m_p 和 m_c 分别表示活塞和曲柄销的质量(包括连杆的集中质量), 则单个汽缸惯性力的垂直分量(F_x)为

$$F_x = m_p \ddot{x}_p + m_c \ddot{x}_c \quad (9.70)$$

将式(9.63)和式(9.68)表示的 P 和 C 的加速度代入后可得

$$F_x = (m_p + m_c) r \omega^2 \cos \omega t + m_p \frac{r^2 \omega^2}{l} \cos 2\omega t \quad (9.71)$$

可见, 惯性力的垂直分量由两部分组成: 第1部分称为主要部分, 它的频率等于曲柄的转动频率 ω ; 第2部分称为次要部分, 它的频率是曲柄转动频率的2倍。

与此类似, 可以求得单个汽缸惯性力的水平分量为

$$F_y = m_p \ddot{y}_p + m_c \ddot{y}_c \quad (9.72)$$

式中, $\dot{y}_p = 0$; \dot{y}_c 可由式(9.69) 求出。因此

$$F_y = -m_c r \omega^2 \sin \omega t \quad (9.73)$$

可见, 惯性力的水平分量只有一项。

9.6.3 活塞式发动机的平衡

单个汽缸的不平衡力或者惯性力可以由式(9.71)和式(9.73)求出。在这两个方程中, m_p 和 m_c 分别表示往复运动和转动的等效质量。 m_p 总是正的, 但是 m_c 可以通过曲轴的平衡而成为零。因此水平惯性力 F_y 可以减少为零, 但是垂直方向的惯性力是永远存在的。因此本质上讲, 单缸发动机肯定是不平衡的。

多缸发动机可以通过曲轴的合理排列实现部分或全部惯性力和惯性力矩的平衡。图9.16(a)是一有 N 个汽缸(这里只画出了6个汽缸)的发动机的布置图。设所有的曲轴和

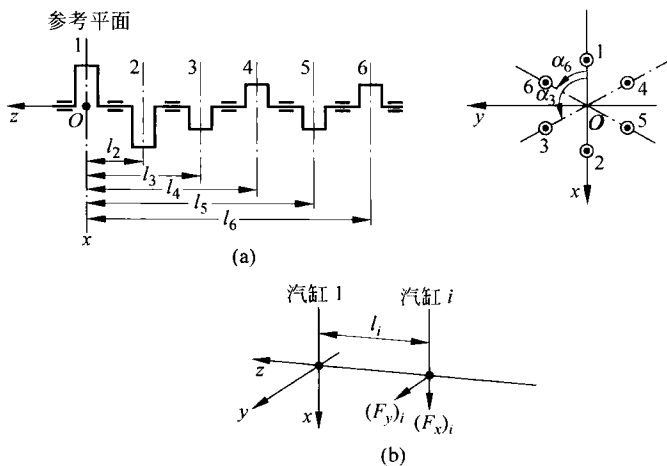


图 9.16 多缸发动机的布置

连杆的长度均分别为 r 和 l , 所有的曲轴都维持恒定的角速度 ω 。第 i 个汽缸到第 1 个汽缸的轴向距离以及方位角分别是 l_i 和 $\alpha_i, i=2, 3, \dots, N$ 。由力的平衡可知, x 和 y 方向的惯性力都应该为零。因此

$$(F_x)_{\text{total}} = \sum_{i=1}^N (F_x)_i = 0 \quad (9.74)$$

$$(F_y)_{\text{total}} = \sum_{i=1}^N (F_y)_i = 0 \quad (9.75)$$

这里, $(F_x)_i$ 和 $(F_y)_i$ 分别是第 i 个汽缸的惯性力的竖直分量和水平分量, 可以由下面的式子得出 (见式(9.71)和式(9.73)):

$$(F_x)_i = (m_p + m_c)_i r \omega^2 \cos(\omega t + \alpha_i) + (m_p)_i \frac{r^2 \omega^2}{l} \cos(2\omega t + 2\alpha_i) \quad (9.76)$$

$$(F_y)_i = -(m_c)_i r \omega^2 \sin(\omega t + \alpha_i) \quad (9.77)$$

为了简单起见, 假定每个汽缸往复移动和转动的质量都是相等的, 即 $(m_p)_i = m_p, (m_c)_i = m_c, i=1, 2, \dots, N$ 。不失一般性, 在 $t=0$ 时由式(9.74)和式(9.75)可以求得力平衡的必要条件:

$$\sum_{i=1}^N \cos \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N \cos 2\alpha_i = 0 \quad (9.78)$$

$$\sum_{i=1}^N \sin \alpha_i = 0 \quad (9.79)$$

如图 9.16(b)所示, 第 i 个汽缸的惯性力 $(F_x)_i$ 和 $(F_y)_i$ 分别对 y 轴和 x 轴产生力矩。对 z 轴和 x 轴的力矩分别是

$$M_z = \sum_{i=2}^N (F_x)_i l_i = 0 \quad (9.80)$$

$$M_x = \sum_{i=2}^N (F_y)_i l_i = 0 \quad (9.81)$$

将式(9.76)、式(9.77)代入式(9.80)和式(9.81), 并令 $t=0$, 可以得到满足对 z 轴和 x 轴的力矩平衡的必要条件为

$$\sum_{i=2}^N l_i \cos \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=2}^N l_i \cos 2\alpha_i = 0 \quad (9.82)$$

$$\sum_{i=2}^N l_i \sin \alpha_i = 0 \quad (9.83)$$

因此, 可以将多缸活塞式发动机的汽缸合理排列, 以满足式(9.78)、式(9.79)、式(9.82)和式(9.83)。这样就实现了惯性力和力矩的平衡。

9.7 振动的控制

在许多实际情况中,引起振动的动力只能减小,但却不能完全排除。有些方法可以用于对振动进行控制,其中以下几点是非常重要的:

- (1) 通过控制系统的固有频率,避免外激励作用下的共振。
- (2) 通过引入阻尼或耗能机构来防止系统产生过大的响应,即使是在发生共振的情形。
- (3) 使用隔振装置,减小从设备某一部分传递到其他部分的激振力。
- (4) 附加平衡质量和吸振器,降低系统的响应。

下面详细介绍这些方法。

9.8 固有频率的控制

众所周知,激励频率等于系统的某一阶固有频率时会发生共振现象。共振最主要的特征就是响应的振幅达到峰值。对于机械系统和建筑系统,大振幅意味着不期望出现的大的应变和大的应力,这些都会造成系统的破坏。因此,在任何系统中都必须避免共振的发生。在大多数情况下,激励的频率是无法控制的,因为它是与系统或者机械的设计功能对应的。因此我们必须重点研究控制系统的固有频率,以避免共振。

式(2.14)表明,质量 m 或者刚度 k 的变化都会引起系统固有频率的改变。^① 在许多实际情况中,质量是不能轻易改变的,因为它的值是由系统的功能要求决定的。例如,轴上飞轮的质量是由它每转一圈所存储的能量确定的。因此,为使系统的固有频率发生变化,最经常采取的措施是改变系统的刚度。例如,可以通过改变一个或几个参数,如材料或支承点(轴承)的数量以及位置来改变旋转轴的刚度。

9.9 阻尼的应用

为了简化分析过程,阻尼经常被忽略不计,尤其是在计算固有频率时,但是大多数系统都存在一定程度的阻尼。在许多情况下,阻尼的存在是有益的。有些系统,如汽车减振器以及一些振动测量仪器中,经常使用阻尼来实现其要求的功能。^[9.20,9.21]

在强迫振动中,如果系统是无阻尼的,它的响应或者振幅会在共振点附近变得很大。阻尼的存在则对振幅有限制作用。如果激励频率已知,就可以改变固有频率来避免共振。然而系统或机械设备可能运行在某一个速度范围内,如变速电机或内燃机,所以并非在所有的运行条件下都可能避免共振。这时,可以通过在系统中引入阻尼来控制它的响应,例如使用

^① 尽管这一叙述是基于单自由度系统得到的结论,但对于多自由度系统,一般来说也是适用的。

内部阻尼较大的结构材料,比如铸铁或者层合材料。

在有些结构中,阻尼是通过连接引入的。例如,螺栓和铆钉连接,由于被连接的物体表面间有相对滑动,从而比焊接消耗更多的能量。因此为了增大结构的阻尼,可以使用螺栓或铆钉连接。但必须注意,螺栓和铆钉连接会降低结构的刚度,由于相对滑动还会导致磨损。尽管如此,为了得到较大的结构阻尼,还是应该考虑采用螺栓或铆钉连接。

谐波激励 $F(t)=F_0e^{i\omega t}$ 作用下的单自由度阻尼系统的运动微分方程为

$$m\ddot{x}+k(1+i\eta)x=F_0e^{i\omega t} \tag{9.84}$$

这里, η 是损失因子(或损失系数),它的含义如下(见 2.6.4 节):

$$\eta=\frac{\Delta W/2\pi}{W}=\frac{\text{一次循环中消耗的能量}}{\text{循环的最大应变能}}$$

系统共振($\omega=\omega_n$)时响应的振幅是

$$\frac{F_0}{k\eta}=\frac{F_0}{aE\eta} \tag{9.85}$$

因此,刚度系数和弹性模量是成正比的($k=aE,k$ 为常数)。

黏弹性材料的损失系数较大,所以常用于提供系统的内部阻尼。使用黏弹性材料进行振动控制时,材料受剪切应变或正应变。最简单的布置方法是把一层黏弹性材料附着在弹性体上。另一种方法是把黏弹性材料夹在两层弹性材料中间,这种布置被称为约束层阻尼。^① 由黏弹性胶覆盖金属薄片构成的阻尼带,已被用于结构的振动控制。使用黏弹性材料也有缺点,因为它的性质会随温度、频率和应变的变化而变化。式(9.85)说明, $E\eta$ 值最大的材料,其共振振幅最小。由于应变与位移 x 成正比,应力与 $E x$ 成正比,所以损失系数最大的材料承受的应力最小。下面是一些材料的损失系数:

材料	损失系数 η	材料	损失系数 η	材料	损失系数 η
苯乙烯	2.0	玻璃钢	0.1	铝	1×10^{-4}
硬橡胶	1.0	软木	0.13~0.17	铁和钢	$(2\sim 6)\times 10^{-4}$

下面是不同结构或布置的阻尼比:

结构形式或布置	等效黏性阻尼比	结构形式或布置	等效黏性阻尼比
焊接结构	1~4	钢筋混凝土大梁上布置无约束黏弹性层	4~5
螺栓连接结构	3~10	钢筋混凝土大梁上布置有约束黏弹性层	5~8
钢结构	5~6		

① 早在 17 世纪,小提琴的生产中约束层阻尼就得到了应用^[9.22]。Antonio Stradivari (1644—1737),意大利著名小提琴制作师,从威尼斯购买制作小提琴所用的木料。木材密封所用的油漆是由树脂和石粉混合得到的。这种油漆——树脂石粉混合物就起到了约束层(机械摩擦)的作用,产生了足够的阻尼,使他的小提琴音质更好。

9.10 振动隔离

振动隔离是减小有害振动的有效方法之一。一般来说,它有一个或几个安装在振动质量(或设备或有效载荷)和振源之间的弹性元件(或隔振器),以保证在特定的振动激励下减小系统的动力响应。根据隔振器工作时是否需要外界能量来实现其隔振功能,可以把隔振系统分为主动式和被动式两种。被动式隔振器由一个弹性元件(刚度)和一个能量耗散器(阻尼)组成。常见的被动式隔振器有金属弹簧、软木、毛毡、气垫弹簧和高弹性(橡胶)弹簧。图 9.17 表明普通的弹簧和充气装置也可以用于被动隔振。图 9.18 显示的是在底座处采用了被动隔振的高速冲压机。

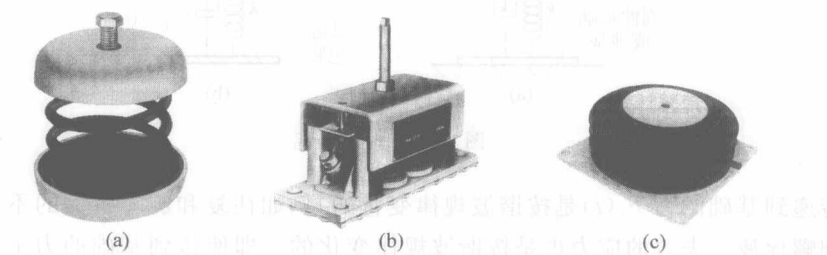


图 9.17 用普通弹簧和充气装置隔振(经 Sound and Vibration 杂志授权使用)

(a) 无阻尼弹簧底座; (b) 有阻尼弹簧底座; (c) 充气橡胶底座

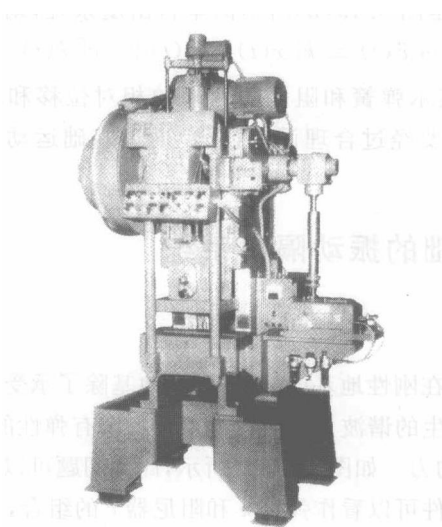


图 9.18 安装在充气橡胶底座上的高速冲压机(经 Sound and Vibration 杂志授权使用)

主动式隔振器由具有传感器的伺服机构、信号处理机和执行机构组成。隔振器的效率由传递率确定。传递率 T_r 表示被传递的力和激振力的幅值比。

隔振一般用在两种情况下。一种用于防止振动机械的地基或基础承受较大的不平衡力(如在往复式或旋转式机械中)和冲击力(如在锻造和冲压机械中)。这些情况下,如果将系统看作单自由度系统,如图 9.19(a)所示,则通过弹簧和阻尼传递到基础上的力为

$$F_1(t) = kx(t) + c\dot{x}(t) \quad (9.86)$$

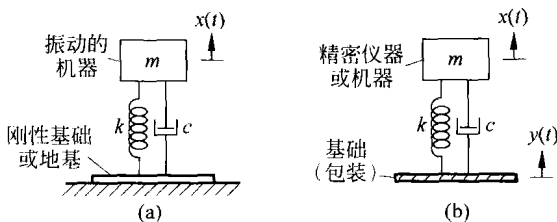


图 9.19 振动隔离

如果被传递到基础的力 $F_1(t)$ 是按谐波规律变化的,例如往复和旋转机械的不平衡力,那么导致基础螺栓疲劳失效的应力也是按谐波规律变化的。即使传到基础的力不是谐波的,它的幅值也必须限制在一个安全的许可范围之内。

第二种情况是为了保护系统免受地基运动的影响(如精密的仪器设备要防止外壳的运动)。如果将精密仪器看作是图 9.19(b)所示的单自由度系统,则传递到仪器的力为

$$F_1(t) = m\ddot{x}(t) \equiv k[x(t) - y(t)] + c[\dot{x}(t) - \dot{y}(t)] \quad (9.87)$$

这里的 $x - y$ 和 $\dot{x} - \dot{y}$ 分别表示弹簧和阻尼器两端的相对位移和相对速度。在许多实际问题中,仪器或设备的包装都要经过合理设计,以免通过基础运动传递到仪器或设备的力过大,造成设备损坏。

9.10.1 刚性基础的振动隔离系统

1. 主动隔振

当机器用螺栓直接固定在刚性地基或地板上时,地基除了承受机器重力引起的静载荷外,还受到一个由机器不平衡产生的谐波力。因此可以将一个有弹性的元件安装在设备和刚性基础之间,以减小传递到基础的力。如图 9.20(a)所示,此类问题可以理想化为一单自由度系统。这个既有弹性又有阻尼的构件可以看作弹簧 k 和阻尼器 c 的组合,如图 9.20(b)所示。假定机器运行时会产生一个按简谐规律变化的力 $F(t) = F_0 \cos \omega t$, 系统的运动微分方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \quad (9.88)$$

经过一段时间后瞬态解消失,只有稳态解保持下来。方程(9.88)的稳态解为(见式(3.25))

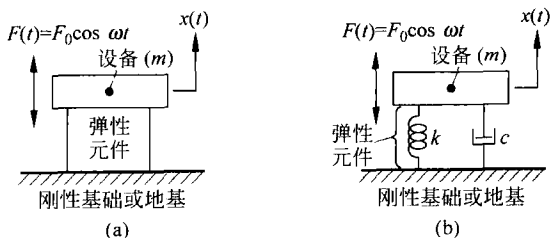


图 9.20 安装在刚性基础上的设备与弹性元件

$$x(t) = X \cos(\omega t - \phi) \quad (9.89)$$

其中

$$X = \frac{F_0}{[(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 c^2]^{1/2}} \quad (9.90)$$

$$\phi = \arctan \frac{\omega c}{k - m\omega^2} \quad (9.91)$$

经弹簧和阻尼器传递到基础的力 $F_t(t)$ 为

$$F_t(t) = kx(t) + c \dot{x}(t) = kX \cos(\omega t - \phi) - c\omega X \sin(\omega t - \phi) \quad (9.92)$$

此力的大小为

$$\begin{aligned} F_T &= [(kx)^2 + (c\dot{x})^2]^{1/2} = X\sqrt{k^2 + \omega^2 c^2} \\ &= \frac{F_0(k^2 + \omega^2 c^2)^{1/2}}{[(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 c^2]^{1/2}} \end{aligned} \quad (9.93)$$

隔振系数定义为力的传递率,即传递的力的幅值与激振力幅值之比,其值为

$$T_r = \frac{F_T}{F_0} = \left\{ \frac{k^2 + \omega^2 c^2}{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 c^2} \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right\}^{1/2} \quad (9.94)$$

其中, $r = \frac{\omega}{\omega_n}$ 为频率比。 T_r 随频率比 $r = \frac{\omega}{\omega_n}$ 的变化如图 9.21 所示。显然,为了达到隔振的目的,

传递到基础的力应该小于激振力。从图 9.21 可以看出,只有当激励频率大于系统固有频率的 $\sqrt{2}$ 倍时,才能实现振动的隔离。主动隔振的主要结论可以总结如下:

(1) 传递到基础的力的幅值可以通过减小系统的固有频率 ω_n 来减小。

(2) 减小阻尼比也可以减小传递到基础的力。但是因为振动隔离要求 $r > \sqrt{2}$, 所以设备在启动和停车时都会通过共振区域。故为了避免共振时产生的大振幅,一定程度的阻尼是必不可少的。

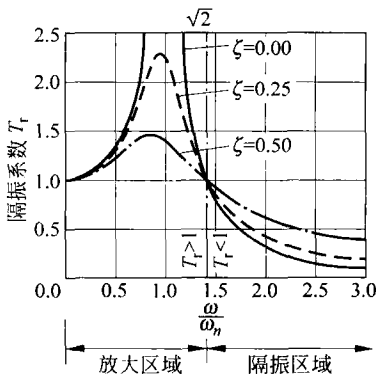


图 9.21 力的传递率随频率比的变化

(3) 虽然阻尼可以减少任意频率下振幅 X 的大小, 但只有当 $r > \sqrt{2}$ 时才能减少传递到基础的力 F_t 。 $r > \sqrt{2}$ 时阻尼的增加反而会增大传递到基础上的力。

(4) 当设备的运转速度(对应激励频率)变化时, 为了使传递到基础的力最小, 应该选择一个合适的阻尼值。此阻尼既要兼顾最大限度地减少共振时的振幅 X , 又要考虑传递到基础上的力 F_t , 从而保证正常运行时传递到基础上的力不会增大得太多。

2. 被动隔振

对于一台质量为 m 的精密仪器或设备, 如果要对有害的基础谐波运动进行隔离, 则由式(3.75)得控制微分方程为

$$m \ddot{z} + c \dot{z} + kz = -m \ddot{y} \quad (9.95)$$

其中, $z = x - y$ 表示该质量相对于基础的位移。如果基础的运动是谐波运动, 则该质量的运动也是谐波运动。因此位移传递率 $T_d = \frac{X}{Y}$ 可以由式(3.68)得出:

$$T_d = \frac{X}{Y} = \left\{ \frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right\}^{1/2} \quad (9.96)$$

式(9.96)的右边与式(9.94)的右边是一样的。另外, 式(9.96)也等于该质量最大稳态加速度与基础最大稳态加速度的比。

9.10.2 振源的隔离

振源(振动质量)产生的被传递到底座或者地面的力可以由式(9.94)求出, 见图 9.21 中 $T_r = F_T/F_0$ 和 $r = \omega/\omega_n$ 之间的关系曲线。如前所述, 当 $r > \sqrt{2}$ 时, 可以实现对振动的隔离, 即减小传递到地面的力。当 $r > \sqrt{2}$ 时, 阻尼值越小隔振效果越好。当 r 值很大而 ζ 很小时, 式(9.94)中 $(2\zeta r)^2$ 项的值很小, 可以忽略不计。因此, 式(9.94)可以化简为

$$T_r = \frac{1}{r^2 - 1} \quad (r > \sqrt{2}, \zeta \text{ 很小}) \quad (9.97)$$

无阻尼系统的固有频率定义为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} \quad (9.98)$$

激励频率 ω 为

$$\omega = \frac{2\pi N}{60} \quad (9.99)$$

这里, δ_{st} 表示弹簧的静变形; N 表示旋转机械如电动机、蒸汽轮机每分钟的循环数或者每分钟的转数(r/min)。将式(9.97)~式(9.99)合并, 可得

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{2\pi N}{60} \sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}} = \sqrt{\frac{2 - R}{1 - R}} \quad (9.100)$$

其中, $R=1-T_r$ 用于表征隔振器的品质和被传递的力的衰减百分数。式(9.100)可以写作

$$N = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} \left(\frac{2-R}{1-R} \right) = 29.9092 \sqrt{\frac{2-R}{\delta_{st}(1-R)}} \quad (9.101)$$

式(9.101)可以生成 $\lg N$ 和 $\lg \delta_{st}$ 之间的关系图, 这是一组对应不同 R 值的直线, 如图 9.22 所示。这个图表可以作为选择隔振弹簧的参考依据。

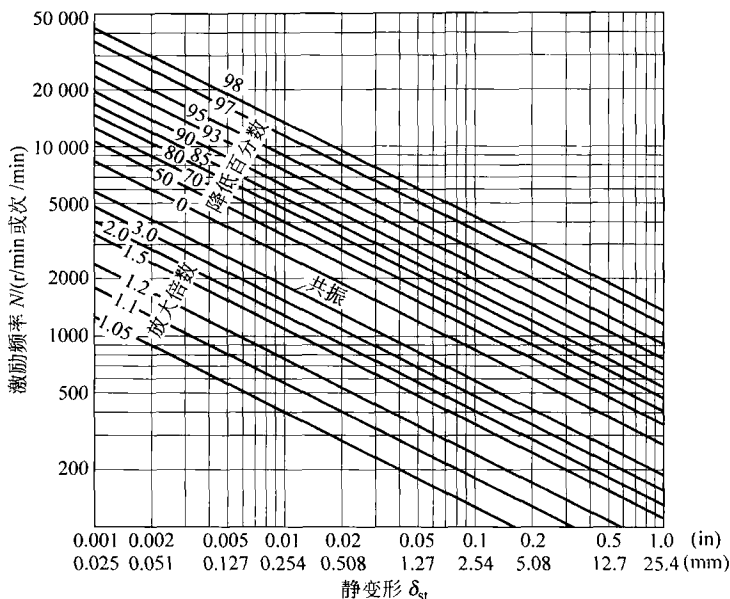


图 9.22 隔振效果

下面讨论如何减小由于转动不平衡产生的传递到基础的力。转动不平衡产生的激振力为

$$F(t) = F_0 \sin \omega t \equiv m e \omega^2 \sin \omega t \quad (9.102)$$

这时, 力传递率 T_r 为

$$T_r = \frac{F_T}{F_0} = \frac{F_T}{m e \omega^2} = \frac{F_T}{m e r^2 \omega_n^2} \quad (9.103)$$

由式(9.103)和式(9.94)得

$$\frac{F_T}{m e \omega_n^2} = r^2 \left\{ \frac{1 + (2\zeta_r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta_r)^2} \right\}^{1/2} \quad (9.104)$$

式(9.104)对应的曲线与图 3.16 相同。

9.10.3 弹性基础的振动隔离系统

在许多实际问题中, 与隔振器相连的结构或者基础在设备工作时是运动的。例如, 安装在船上的涡轮机或安装在机翼上的航空发动机, 支承点附近的区域也同隔振器一起运动。

这时,系统将是一个两自由度系统。图 9.23 中, m_1 和 m_2 分别表示机械设备的质量和与隔振器一起运动的支承结构的质量。隔振器用弹簧 k 代替,为了计算简便,隔振器的阻尼忽略不计。 m_1 和 m_2 的运动微分方程为

$$m_1 \ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = F_0 \cos \omega t \quad (9.105)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = 0 \quad (9.106)$$

假设有下列形式的谐波解:

$$x_j = X_j \cos \omega t, \quad j = 1, 2 \quad (9.107)$$

由式(9.105)和式(9.106)得

$$\begin{cases} X_1(k - m_1\omega^2) - X_2k = F_0 \\ -X_1k + X_2(k - m_2\omega^2) = 0 \end{cases} \quad (9.108)$$

系统的固有频率由如下方程的解求出:

$$\begin{vmatrix} k - m_1\omega^2 & -k \\ -k & k - m_2\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (9.109)$$

式(9.109)的解为

$$\omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^2 = \frac{(m_1 + m_2)k}{m_1 m_2} \quad (9.110)$$

由于系统不受外界约束,所以 $\omega_1 = 0$ 对应着系统的刚体运动。对于稳态运动, m_1 和 m_2 的振幅由式(9.108)的解确定:

$$X_1 = \frac{(k - m_2\omega^2)F_0}{(k - m_1\omega^2)(k - m_2\omega^2) - k^2} \quad (9.111)$$

$$X_2 = \frac{kF_0}{(k - m_1\omega^2)(k - m_2\omega^2) - k^2} \quad (9.112)$$

由 $m_2 \ddot{x}_2$ 可以求出传递到支承结构的力 F_1 的幅值为

$$F_1 = -m_2\omega^2 X_2 = \frac{-m_2 k \omega^2 F_0}{(k - m_1\omega^2)(k - m_2\omega^2) - k^2} \quad (9.113)$$

隔振器的力传递率 T_r 为

$$\begin{aligned} T_r &= \frac{F_1}{F_0} = \frac{-m_2 k \omega^2}{(k - m_1\omega^2)(k - m_2\omega^2) - k^2} \\ &= \frac{1}{\frac{m_1 + m_2}{m_2} - \frac{m_1\omega^2}{k}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \left[\frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}} \right] \end{aligned} \quad (9.114)$$

其中, ω_2 是系统的固有频率,可由式(9.110)求出。式(9.114)表明,与安装在刚性基础上的隔振器一样,当系统固有频率 ω_2 变小时,传递到地基的力也会变小。

例 9.4 一个由 4 根弹簧支承的排气扇以 1000 r/min 的速度旋转,每个弹簧的刚度都

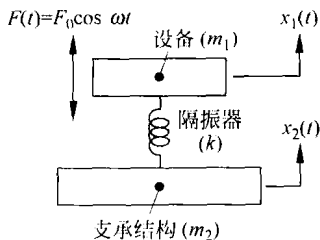


图 9.23 安装在柔性基础上具有隔振器的设备

是 K 。如果风扇的不平衡力只有 10% 被传到基础上, K 值应该取多少? 假定排气扇的质量为 40 kg。

解: 因为已知力的传递率为 0.1, 由式(9.94)可得

$$0.1 = \left[\frac{1 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}{\left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right\}^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right]^{1/2} \quad (\text{E. 1})$$

式中, 激励频率为

$$\omega = \frac{1000 \times 2\pi}{60} = 104.72 (\text{rad/s}) \quad (\text{E. 2})$$

系统的固有频率为

$$\omega_n = \left(\frac{k}{m} \right)^{1/2} = \left(\frac{4K}{40} \right)^{1/2} = \frac{\sqrt{K}}{3.1623} \quad (\text{E. 3})$$

假设阻尼比为 $\zeta=0$, 由式(E.1)可得

$$0.1 = \frac{\pm 1}{1 - \left(\frac{104.72 \times 3.1623}{\sqrt{K}} \right)^2} \quad (\text{E. 4})$$

为了避免出现虚数, 式(E.4)右边取负号。由此得

$$\frac{331.1561}{\sqrt{K}} = 3.3166$$

即

$$K = 9969.6365 (\text{N/m})$$

例 9.5 一个振动系统通过隔振器与它的基础隔离。求能在共振时将隔振器的传递率限制在 $T_r=4$ 的阻尼比。假设系统只有 1 个自由度。

解: 令 $\omega=\omega_n$ 。由式(9.94)得

$$T_r = \frac{\sqrt{1 + (2\zeta)^2}}{2\zeta}$$

即

$$\zeta = \frac{1}{2\sqrt{T_r^2 - 1}} = \frac{1}{2\sqrt{15}} = 0.1291$$

例 9.6 一个立体转盘的质量为 1 kg, 产生的激振力频率为 3 Hz。转盘通过一个橡胶垫安装在基础上。橡胶垫的刚度为多少时传递到底座的振动才能减小 80%?

解: 根据 $N=3 \times 60=180$ (次/min) 和 $R=0.80$, 由式(9.101)得

$$180 = 29.9092 \sqrt{\frac{2 - 0.80}{\delta_{st}(1 - 0.80)}}$$

或

$$\delta_{st} = 0.1657 \text{ m}$$

根据刚度系数的定义,橡胶垫的静变形为

$$\delta_{st} = \frac{mg}{k}$$

故橡胶垫的刚度为

$$0.1657 = \frac{1 \times 9.81}{k}, \quad k = 59.2179 (\text{N/m})$$

9.10.4 部分弹性基础的振动隔离系统

图 9.24 是一种更常见的情况,隔振器的基础不是完全刚性的或者完全弹性的,而是部分弹性的。定义基础的机械阻抗 $Z(\omega)$ 为使基础产生单位变形所需的频率为 ω 的力,^①即

$$Z(\omega) = \frac{\text{频率为 } \omega \text{ 的作用力}}{\text{变形}}$$

系统的运动微分方程为

$$m_1 \ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = F_0 \cos \omega t \quad (9.115)$$

$$k(x_2 - x_1) = -x_2 Z(\omega) \quad (9.116)$$

设谐波解的形式如下:

$$x_j(t) = X_j \cos \omega t, \quad j = 1, 2 \quad (9.117)$$

代入式(9.115)和式(9.116)后,可以求出 X_1 和 X_2 :

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{[k + Z(\omega)]X_2}{k} = \frac{[k + Z(\omega)]F_0}{Z(\omega)(k - m_1\omega^2) - km_1\omega^2} \\ X_2 &= \frac{kF_0}{Z(\omega)(k - m_1\omega^2) - km_1\omega^2} \end{aligned} \quad (9.118)$$

被传递的力的幅值为

$$F_1 = X_2 Z(\omega) = \frac{kZ(\omega)F_0}{Z(\omega)(k - m_1\omega^2) - km_1\omega^2} \quad (9.119)$$

隔振器的传递率为

$$T_r = \frac{F_1}{F_0} = \frac{kZ(\omega)}{Z(\omega)(k - m_1\omega^2) - km_1\omega^2} \quad (9.120)$$

对于实际问题,机械阻抗 $Z(\omega)$ 是由基础的性质决定的。可以通过实验来得到一个实际系统的机械阻抗,即利用振动设备对基础施加一个谐波力,然后测量系统的变形。有些情况下,如隔振器安装在置于地面的混凝土板上时,在任意频率 ω 下的机械阻抗都可以根据土壤的弹簧-质量-阻尼器模型求出。

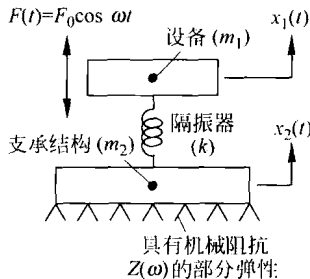


图 9.24 安装在部分弹性基础上并具有隔振器的设备

^① 如果基础是完全弹性的,并且具有一个不受约束的质量 m_2 , 以及 $Z(\omega) = -\omega^2 m_2$, 那么由式(9.115)~式(9.117)可得式(9.108)。

9.10.5 冲击隔离

如前所述,冲击载荷包括在短时间(通常是比系统的固有周期还要短)内施加的力。锻锤、冲床、强气流和爆炸产生的力都是冲击载荷的例子。冲击隔离就是为了减小冲击产生的有害影响而采取的一些措施。我们知道,对谐波扰动(输入量)下的振动进行隔离时,当频率比 $r > \sqrt{2}$ 时,阻尼比 ζ 值越小,隔振的效果就越好。另一方面,应该在一个很大的频率范围内对冲击进行隔离,且通常阻尼比 ζ 都比较大。因此,一个好的隔振设计用于冲击隔离时反而会效果很差。尽管存在着这些差异,冲击隔离和振动隔离的基本原理还是相同的。但是由于冲击的瞬时性,它们的表达式是不同的。

作用于一个很短时间 T 内的冲击载荷 $F(t)$, 可以看作是一个冲量 \underline{F} :

$$\underline{F} = \int_0^T F(t) dt \quad (9.121)$$

因为冲量作用在质量 m 上,利用冲量定理,可以求出质量块的速度为

$$v = \frac{\underline{F}}{m} \quad (9.122)$$

这说明对系统施加一个短暂的冲击载荷相当于给了系统一个初速度。因此,冲击载荷作用下的系统响应可以利用特定初速度对应的自由振动的解来确定。假设初始条件为 $x(0) = x_0 = 0$ 和 $\dot{x}(0) = \dot{x}_0 = v$, 单自由度黏性阻尼系统的自由振动的解(质量块 m 的位移)可以由式(2.72)求出:

$$x(t) = \frac{ve^{-\zeta\omega_n t}}{\omega_d} \sin \omega_d t \quad (9.123)$$

这里, $\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n$ 表示阻尼振动的频率。通过弹簧和阻尼传递到基础的力 $F_i(t)$ 为

$$F_i(t) = kx(t) + c\dot{x}(t) \quad (9.124)$$

由式(9.123), $F_i(t)$ 可以写作

$$F_i(t) = \frac{v}{\omega_d} \sqrt{(k - c\zeta\omega_n)^2 + (c\omega_d)^2} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi) \quad (9.125)$$

其中

$$\phi = \arctan \frac{c\omega_d}{k - c\zeta\omega_n} \quad (9.126)$$

由式(9.125)和式(9.126)可以计算出传递到基础的力的最大值。

冲击载荷的持续时间较长时,传递到基础的力的最大值可能出现在冲击过程中。这种情况下,4.6节中讨论过的冲击谱,可以用来计算被传递到基础的力的最大值。

下面的几个例题用来对冲击隔离设计中的不同方法做进一步说明。

例 9.7 某电子仪器的质量为 20 kg, 受到一个 2 m/s 的阶跃速度形式的冲击。如果最大的许可变形(由于间隙的限制)和加速度分别是 20 mm 和 25g, 求无阻尼冲击隔离器的弹

簧常数。

解: 由弹簧支承的电子仪器可以视为承受基础运动(以阶跃速度形式)的无阻尼系统。质量块以系统固有频率振动时的速度和加速度分别是

$$\dot{x}_{\max} = X\omega_n \quad (\text{E. 1})$$

$$\ddot{x}_{\max} = -X\omega_n^2 \quad (\text{E. 2})$$

这里, X 是质量块位移的振幅。因为(阶跃)速度的峰值是 2 m/s , 而 X 的最大允许值是 0.02 m , 由式(E. 1)可得

$$X = \frac{\dot{x}_{\max}}{\omega_n} < 0.02 \quad \text{或者} \quad \omega_n > \frac{\dot{x}_{\max}}{X} = \frac{2}{0.02} = 100 (\text{rad/s}) \quad (\text{E. 3})$$

同样, 因为 \ddot{x}_{\max} 的值为 $25g$, 由式(E. 2)得

$$X\omega_n^2 \leq 25 \times 9.81 = 245.25 (\text{m/s}^2)$$

$$\omega_n \leq \sqrt{\frac{\ddot{x}_{\max}}{X}} = \sqrt{\frac{245.25}{0.02}} = 110.7362 (\text{rad/s}) \quad (\text{E. 4})$$

由(E. 3)和式(E. 4)可得 $100 \text{ rad/s} \leq \omega_n \leq 110.7362 \text{ rad/s}$ 。取中间值 105.3681 rad/s , 则弹簧(隔振器)的刚度为

$$k = m\omega_n^2 = 20 \times 105.3681^2 = 2.2205 \times 10^5 (\text{N/m}) \quad (\text{E. 5})$$

例 9.8 由弹簧支承的精密电子仪器的质量为 100 kg , 包装后运输。在搬运过程中, 包装箱从一定高度落下相当于对仪器施加了一个剧烈的冲击载荷 F_0 , 如图 9.25(a) 所示。如果仪器的最大许可变形为 2 mm , 求用于包装的弹簧的刚度。图 9.25(b) 是 $F_0 = 1000 \text{ N}$, $t_0 = 0.1 \text{ s}$ 时, 冲击载荷的响应谱。

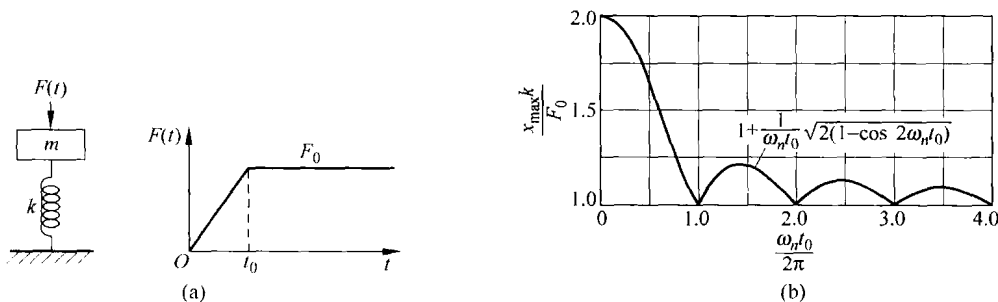


图 9.25 电子设备上的冲击载荷

解: 由响应谱可知, 单自由度无阻尼系统受到给定冲击时的最大响应为

$$\frac{x_{\max} k}{F_0} = 1 + \frac{1}{\omega_n t_0} \sqrt{2(1 - \cos 2\omega_n t_0)} \quad (\text{E. 1})$$

式中, ω_n 表示系统的固有频率, 其值为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k}{100}} = 0.1 \sqrt{k} \quad (\text{E. 2})$$

$F_0 = 1000 \text{ N}$, $t_0 = 0.1 \text{ s}$, k 为包装时所用弹簧的刚度。将已知数据代入式(E.1)得

$$\begin{aligned} \frac{x_{\max} k}{1000} &= 1 + \frac{1}{0.1 \sqrt{k} \times 0.1} \sqrt{2(1 - \cos 2 \times 0.1 \sqrt{k} \times 0.1)} \\ &\leq \frac{2}{1000} \left(\frac{k}{1000} \right) \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

当式(E.3)取等号时,可以整理为

$$\frac{100}{\sqrt{k}} \sqrt{2(1 - \cos 0.02 \sqrt{k})} - 2 \times 10^{-6} k + 1 = 0 \quad (\text{E.4})$$

由(E.4)可求得刚度 $k = 6.2615 \times 10^5 \text{ N/m}$ 。

下列 MATLAB 程序可用来求式(E.4)的根:

```
>>x=1000:1:10000000;
>>f=(100/sqrt(x))*sqrt(2*(1-cos(0.02*sqrt(x))))-0.000002*x+1';
>>root=fzero(f,100000)
root=
6.2615e+005
>>
```

9.10.6 主动振动控制

如果对振动系统进行控制时需要借助于外界的能量来实现,则称为振动的主动控制。

如图 9.26 所示,主动控制系统包括一个具有传感器的伺服机构、信号处理器和执行机构。^[9.31~9.33] 此系统保持振动质量与参考平面之间的距离为一常数 l 。当作用在系统(质量)上的力 F_i 变化时,距离 l 也将随之改变。传感器测量 l 的变化,并产生一个与振动体的激励(或者响应)大小成比例的信号。信号处理器依据收到的传感器信号对执行机构产生一个指令信号,使执行机构产生一个正比于指令信号的运动或力,此运动或力将对基础的位移进行控制,使得距离 l 保持期望的常值。

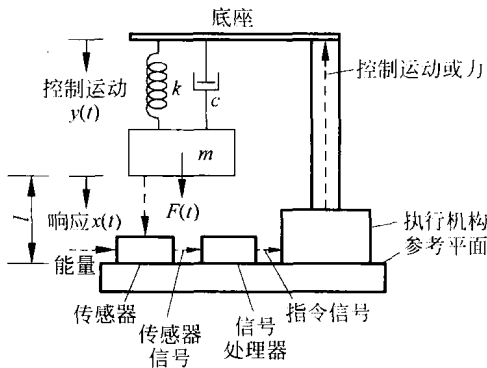


图 9.26 主动振动隔离系统

可以选用不同种类的传感器以根据位移、速度、加速度或者力产生反馈信号。信号处理器可以包含一个被动机构,比如机械联动装置或者一个主动的电子或液压系统,以实现对信号的相加、积分、微分、缩小或者放大。执行机构可以是一个机械系统,例如齿条-齿轮机构或滚珠-丝杠机构、液压系统或者压电和电磁力生成系统。根据所使用的传感器、信号处理器和执行机构的种类,振动主动控制系统可以是机电式、电液式、电磁式、压电式和液压式的。

9.11 吸振器

当激振力频率接近机械或系统的某一阶固有频率时,会引发它们产生过大的振动。这时可以使用振动中和器或者叫动力吸振器来减小机构或者系统的振动。动力吸振器本身也是一个简单的弹簧-质量系统,通过对其进行设计,可以使整个系统的固有频率远离激励频率。在对动力吸振器进行分析时通常将其视为一单自由度系统。

9.11.1 无阻尼动力吸振器

利用刚度为 k 的弹簧将附加质量 m_2 连接到质量为 m_1 的机械上,就可以得到一个两自由度系统,如图 9.27 所示。 m_1 和 m_2 的运动微分方程为

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) &= F_0 \sin \omega t \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.127)$$

通过假设如下形式的谐波解:

$$x_j(t) = X_j \sin \omega t, \quad j = 1, 2 \quad (9.128)$$

可以得到 m_1 和 m_2 稳态运动的振幅为

$$X_1 = \frac{(k_2 - m_2 \omega^2) F_0}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2} \quad (9.129)$$

$$X_2 = \frac{k_2 F_0}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2} \quad (9.130)$$

我们感兴趣的主要是如何减小原机械的振幅 X_1 。为了使 m_1 的振幅为零,式(9.129)的分子部分应等于零,于是有

$$\omega^2 = \frac{k_2}{m_2} \quad (9.131)$$

如果机械在使用动力吸振器前,在接近共振的情况下工作,则 $\omega^2 \simeq \omega_1^2 = k_1/m_1$ 。因此如果在设计吸振器时,使得

$$\omega^2 = \frac{k_2}{m_2} = \frac{k_1}{m_1} \quad (9.132)$$

则当机械在它原始的共振频率下运行时,振幅将会为零。定义

$$\delta_{st} = \frac{F_0}{k_1}, \quad \omega_1 = \left(\frac{k_1}{m_1} \right)^{1/2}$$

为机械或者主系统的固有频率,

$$\omega_2 = \left(\frac{k_2}{m_2} \right)^{1/2} \quad (9.133)$$

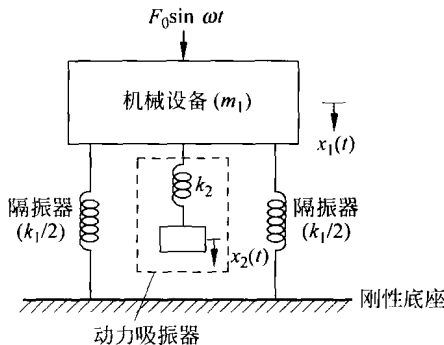


图 9.27 无阻尼动力吸振器

为吸振器或者辅助系统的固有频率,则式(9.129)和式(9.130)可以重写为

$$\frac{X_1}{\delta_{st}} = \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}{\left[1 + \frac{k_2}{k_1} - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right] - \frac{k_2}{k_1}} \quad (9.134)$$

$$\frac{X_2}{\delta_{st}} = \frac{1}{\left[1 + \frac{k_2}{k_1} - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right] - \frac{k_2}{k_1}} \quad (9.135)$$

图 9.28 显示了随着机械运行速度 ω/ω_1 的改变,原机械振幅 X_1/δ_{st} 的变化情况。两个峰值对应着组合系统的两个共振频率。正如在前面所看到的,当 $\omega = \omega_1$ 时, $X_1 = 0$ 。在该频率下,由式(9.135)可得

$$X_2 = -\frac{k_1}{k_2} \delta_{st} = -\frac{F_0}{k_2} \quad (9.136)$$

这说明辅助弹簧产生的力与激振力 ($k_2 X_2 = -F_0$) 等值反向,两者相互抵消使得 X_1 减小为零。动力吸振器的参数可以由式(9.136)和式(9.132)求出:

$$k_2 X_2 = m_2 \omega^2 X_2 = -F_0 \quad (9.137)$$

因此, k_2 和 m_2 的值是由 X_2 的允许值决定的。

由图 9.28 可知,动力吸振器在已知的激励频率 ω 作用下消除振动时,引入了两个共振频率 Ω_1 和 Ω_2 。当激励频率为 Ω_1 或 Ω_2 时,原机械的振幅会非常大。所以在实际应用中,工作频率 ω 必须远离 Ω_1 和 Ω_2 。令式(9.134)中分母的值为零可以求出 Ω_1 和 Ω_2 。注意:

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{k_2}{m_2} \frac{m_2}{m_1} \frac{m_1}{k_1} = \frac{m_2}{m_1} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 \quad (9.138)$$

由式(9.134)中分母的值为零可得

$$\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^4 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2 \left[1 + \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\right] + 1 = 0 \quad (9.139)$$

该方程的两个根为

$$\left. \begin{array}{l} \left(\frac{\Omega_1}{\omega_2}\right)^2 \\ \left(\frac{\Omega_2}{\omega_2}\right)^2 \end{array} \right\} = \frac{\left[1 + \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\right] \mp \left\{\left[1 + \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\right]^2 - 4 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\right\}^{1/2}}{2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2} \quad (9.140)$$

它们可以看作是关于 (m_2/m_1) 和 (ω_2/ω_1) 的函数。

注意:

(1) 由式(9.140)可知, Ω_1 小于、 Ω_2 大于机械的运行速度(同固有频率 ω_1 相等)。因此

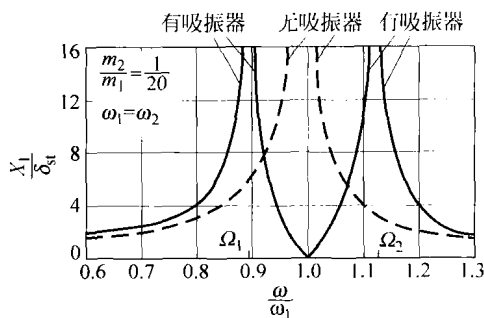


图 9.28 无阻尼动力吸振器对设备响应的抑制效果

机械启动和制动时必然经过 Ω_1 , 这会引起大振幅。

(2) 因为动力吸振器是根据一个特定的激励频率 ω 设计的, 只有频率为 ω 时原机械的稳态振幅才为零。如果机械在其他频率下运行或者作用在机械上的力包含几个不同的频率成分, 则其振幅也可能很大。

(3) 图 9.29 给出了 3 个不同频率比 ω_2/ω_1 下的 Ω_1/ω_2 和 Ω_2/ω_2 随质量比 m_2/m_1 的变化。可以看出, 随着 m_2/m_1 的增大, Ω_1 和 Ω_2 的差增大。

例 9.9 一台重 3000 N 的内燃机, 安装在基础上。当内燃机以 6000 r/min 转速工作时, 可以观察到它的振动通过基础对周围环境造成了影响。试确定需要安装在基础上的吸振器的参数。激振力的幅值为 250 N, 辅助质量的最大许可位移为 2 mm。

解: 机械的振动频率为

$$f = \frac{6000}{60} = 100 (\text{Hz}), \quad \omega = 628.32 (\text{rad/s})$$

因为要使基础的运动为零, 所以辅助质量的位移应该与激振力的位移大小相等、方向相反。

因此由 (9.137) 可得

$$|F_0| = m_2 \omega^2 X_2 \quad (\text{E.1})$$

将已知数据代入, 得

$$250 = m_2 \times 628.32^2 \times 0.002$$

所以 $m_2 = 0.31665 \text{ kg}$ 。弹簧的刚度 k_2 可由式 (9.132) 确定:

$$\omega^2 = \frac{k_2}{m_2}$$

故

$$k_2 = (628.32)^2 \times 0.31665 = 125009 \text{ N/m}$$

例 9.10 一台电动机-发电机组, 如图 9.30 所示, 设计运行速度为 2000~4000 r/min。但是

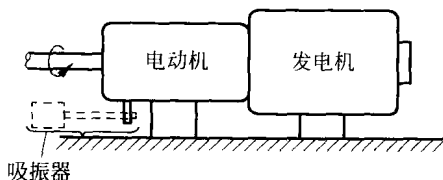


图 9.30 电动机-发电机组

是由于转子存在微小的不平衡, 该机械在运转速度为 3000 r/min 时发生剧烈振动。为此计划安装一个悬臂式集中质量吸振器来消除振动。当一个带有 2 kg 实验载荷的悬臂安装到机器上之后, 所得系统的固有频率为 2500 r/min 和 3500 r/min。设计吸振器的质量和刚度, 使得整个系统的固有频率在电动机-发电机组的转速范围之外。

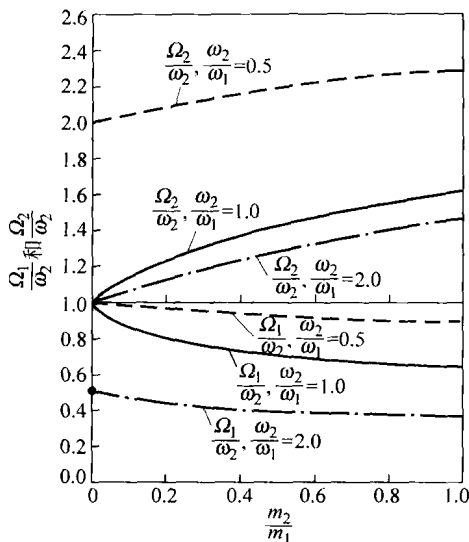


图 9.29 式 (9.140) 中 Ω_1 和 Ω_2 的变化规律

解：电动机-发电机组的固有频率 ω_1 、吸振器的固有频率 ω_2 分别是

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \quad (\text{E. 1})$$

安装吸振器后,系统的共振频率 Ω_1 和 Ω_2 可以由式(9.140)求出。因为吸振器(质量 $m_2 = 2 \text{ kg}$)是可调的,令 $\omega_1 = \omega_2 = 314.16 \text{ rad/s}$ (对应转速 3000 r/min)。采用下列记号:

$$\mu = \frac{m_2}{m_1}, \quad r_1 = \frac{\Omega_1}{\omega_2}, \quad r_2 = \frac{\Omega_2}{\omega_2}$$

式(9.140)化为

$$r_1^2, r_2^2 = \left(1 + \frac{\mu}{2}\right) \mp \sqrt{\left(1 + \frac{\mu}{2}\right)^2 - 1} \quad (\text{E. 2})$$

已知 Ω_1 和 Ω_2 分别是 261.80 rad/s (或 2500 r/min)和 366.52 rad/s (或 3500 r/min),所以

$$r_1 = \frac{\Omega_1}{\omega_2} = \frac{261.80}{314.16} = 0.8333$$

$$r_2 = \frac{\Omega_2}{\omega_2} = \frac{366.52}{314.16} = 1.1667$$

因此

$$\begin{aligned} r_1^2 &= \left(1 + \frac{\mu}{2}\right) - \sqrt{\left(1 + \frac{\mu}{2}\right)^2 - 1} \\ \mu &= \left(\frac{r_1^4 + 1}{r_1^2}\right) - 2 \end{aligned} \quad (\text{E. 3})$$

因为 $r_1 = 0.8333$,由式(E.3)可得 $\mu = m_2/m_1 = 0.1345$, $m_1 = m_2/0.1345 = 14.8699 \text{ kg}$ 。最低转速 Ω_1 为 2000 r/min 或 209.44 rad/s ,所以

$$r_1 = \frac{\Omega_1}{\omega_2} = \frac{209.44}{314.16} = 0.6667$$

根据此 r_1 值,由式(E.3)得 $\mu = m_2/m_1 = 0.6942$, $m_2 = m_1 \times 0.6942 = 10.3227 \text{ kg}$ 。因此,第二阶共振频率可以由下式得出:

$$r_2^2 = \left(1 + \frac{\mu}{2}\right) + \sqrt{\left(1 + \frac{\mu}{2}\right)^2 - 1} = 2.2497$$

由此可求出 $\Omega_2 \approx 4499.4 \text{ r/min}$,该值大于规定的转速上限 4000 r/min 。吸振器弹簧的刚度为

$$k_2 = \omega_2^2 m_2 = 314.16^2 \times 10.3227 = 1.0188 \times 10^6 (\text{N/m})$$

9.11.2 有阻尼动力吸振器

前面介绍的动力吸振器不仅使系统原幅频特性曲线的共振点发生了移动,并且使共振频率增加到两个。因此,机械在启动和停车经过第一个共振点时会引起较大的振幅。使用阻尼吸振器则可以减小系统共振时的振幅。如图9.31所示,两个质量块的运动微分方程为

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = F_0 \sin \omega t \quad (9.141)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0 \quad (9.142)$$

假设其解的形式为

$$x_j(t) = X_j e^{i\omega t}, \quad j = 1, 2 \quad (9.143)$$

代入式(9.141)和式(9.142)后可以求出稳态解的振幅为

$$X_1 = \frac{F_0 (k_2 - m_2 \omega^2 + i c_2 \omega)}{[(k_1 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - m_2 k_2 \omega^2] + i \omega c_2 (k_1 - m_1 \omega^2 - m_2 \omega^2)} \quad (9.144)$$

$$X_2 = \frac{X_1 (k_2 + i \omega c_2)}{(k_2 - m_2 \omega^2 + i \omega c_2)} \quad (9.145)$$

引入下列记号:

$\mu = m_2 / m_1$ —— 质量比 = 吸振器质量 / 主质量

$\delta_{st} = F_0 / k_1$ —— 系统静变形

$\omega_n^2 = k_2 / m_2$ —— 吸振器固有频率的平方

$\omega_n^2 = k_1 / m_1$ —— 主质量固有频率的平方

$f = \omega_n / \omega_n$ —— 固有频率比

$g = \omega / \omega_n$ —— 激励频率比

$c_c = 2m_2 \omega_n$ —— 临界阻尼系数

$\zeta = c_2 / c_c$ —— 阻尼比

X_1 和 X_2 的大小可以表示为

$$\frac{X_1}{\delta_{st}} = \left[\frac{(2\zeta g)^2 + (g^2 - f^2)^2}{(2\zeta g)^2 (g^2 - 1 + \mu g^2)^2 + \{\mu f^2 g^2 - (g^2 - 1)(g^2 - f^2)\}^2} \right]^{1/2} \quad (9.146)$$

$$\frac{X_2}{\delta_{st}} = \left[\frac{(2\zeta g)^2 + f^4}{(2\zeta g)^2 (g^2 - 1 + \mu g^2)^2 + \{\mu f^2 g^2 - (g^2 - 1)(g^2 - f^2)\}^2} \right]^{1/2} \quad (9.147)$$

式(9.146)表明,主质量的振幅是 μ, f, g 和 ζ 的函数。图 9.32 是当 $f=1, \mu=1/20$ 时不同的 ζ 值对应的 $\left| \frac{X_1}{\delta_{st}} \right|$ 与频率比 $g = \omega / \omega_n$ 的关系曲线。

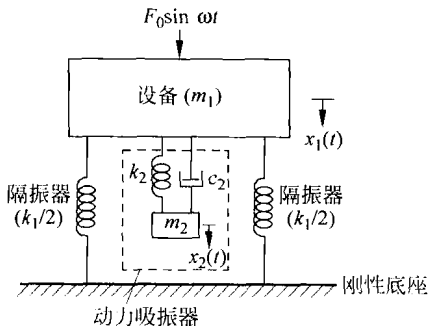


图 9.31 有阻尼动力吸振器

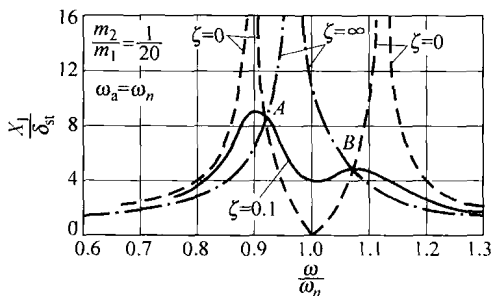


图 9.32 有阻尼动力吸振器对设备响应的抑制效果

如果阻尼为零($c_2 = \zeta = 0$),则共振发生在系统的两个无阻尼共振频率处,如图 9.28 所示。如果阻尼为无穷大($\zeta = \infty$),两个质量块 m_1 和 m_2 实际上是被固结在一起,系统本质上就变成一个质量为 $(m_1 + m_2) = (21/20)m$ 、刚度为 k 的单自由度系统。这时的共振将导致 $X_1 = \infty$,共振发生在

$$g = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{1}{\sqrt{1+\mu}} = 0.9759$$

因此当 $c_2 = 0$ 和 $c_2 = \infty$ 时, X_1 的峰值为无穷大。所以在这两个极限情况之间一定存在某一个阻尼值,能使 X_1 的峰值最小。

从图 9.32 可以看出,无论阻尼的大小如何,所有的曲线都在 A 和 B 两点相交。将 $\zeta = 0$ 和 $\zeta = \infty$ 两种临界情况代入式(9.146),并令两者相等,可以确定这两点的位置:

$$g^4 - 2g^2 \left(\frac{1+f^2+\mu f^2}{2+\mu} \right) + \frac{2f^2}{2+\mu} = 0 \quad (9.148)$$

方程(9.148)的两个根对应着 A 和 B 两点的频率比, $g_A = \omega_A/\omega$ 和 $g_B = \omega_B/\omega$ 。将 g_A 和 g_B 分别代入式(9.146)就得到 A 点和 B 点的纵坐标。显然,当 A 点和 B 点的纵坐标相等时,吸振器的效果最好。这种情况要求^[9.35]

$$f = \frac{1}{1+\mu} \quad (9.149)$$

满足式(9.149)的吸振器称为**调谐吸振器**。虽然式(9.149)说明了怎样对吸振器进行调谐设计,却没有给出最优的阻尼比 ζ 以及相应的 X_1/δ_{st} 。不难理解, ζ 的最优值应使响应曲线 X_1/δ_{st} 在峰值点 A, B 处尽可能的平缓。例如,像图 9.33 所示的那样,响应曲线在 A, B 两处的切线为水平直线。为此先将式(9.149)代入式(9.146),使所得方程对应着最优调谐设计的情况。然后将化简后的式(9.146)对 g 求导,得到曲线 X_1/δ_{st} 的斜率。令斜率在 A 和 B 处为零,可得

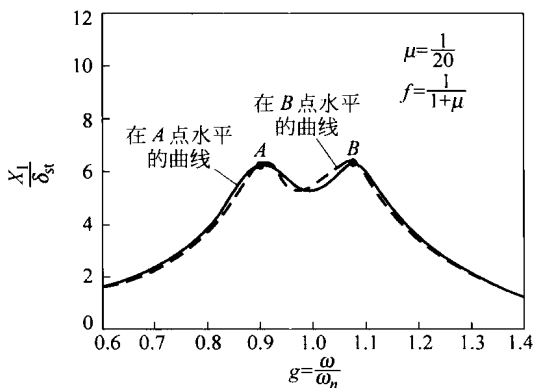


图 9.33 调整后的吸振器

$$\zeta^2 = \frac{\mu \left\{ 3 - \sqrt{\frac{\mu}{\mu+2}} \right\}}{8(1+\mu)^3}, \quad \text{对 } A \text{ 点} \quad (9.150)$$

$$\zeta^2 = \frac{\mu \left\{ 3 + \sqrt{\frac{\mu}{\mu+2}} \right\}}{8(1+\mu)^3}, \quad \text{对 } B \text{ 点} \quad (9.151)$$

设计时一般可以按下式取式(9.150)和式(9.151)的平均值:

$$\zeta_{\text{optimal}}^2 = \frac{3\mu}{8(1+\mu)^3} \quad (9.152)$$

相应的 $\frac{X_1}{\delta_{st}}$ 的最优值为

$$\left(\frac{X_1}{\delta_{st}} \right)_{\text{optimal}} = \left(\frac{X_1}{\delta_{st}} \right)_{\text{max}} = \sqrt{1 + \frac{2}{\mu}} \quad (9.153)$$

总结以上分析,设计吸振器时应注意以下两个问题:

(1) 由式(9.147)可知,吸振器的振幅 X_2 总是远大于主质量的振幅 X_1 。因此,设计时应考虑如何满足吸振器质量的大振幅要求。

(2) 因为期望 m_2 有大振幅,所以设计吸振器弹簧 k_2 时应考虑其疲劳问题。

有关吸振器的优化设计问题,可参考文献[9.36~9.39]。

9.12 利用 MATLAB 求解的例子

例 9.11 利用 MATLAB,根据式(9.94)绘制对应于 $\zeta=0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ 的单自由度系统振动传递率与频率比的关系曲线。

解: 下面的 MATLAB 程序可以根据式(9.94)绘制出单自由度系统振动传递率与频率比的关系曲线:

```
%Exam 9-2
for j=1:5
    kesi=j*0.1;
    for i=1:1001
        w_wn(i)=3*(i-1)/1000;
        T(i)=sqrt((1+(2*kesi*w_wn(i))^2)/((1-w_wn(i)^2)^2+2*kesi*w_wn(i)^2));
    end;
    plot(w_wn,T);
    hold on;
end;

xlabel('w/w_n');
ylabel('Tr');
```

```

gtext('zeta=0.1');
gtext('zeta=0.2');
gtext('zeta=0.3');
gtext('zeta=0.4');
gtext('zeta=0.5');
title('Ex9.2');
grid on;

```

所绘曲线如图 9.34 所示。

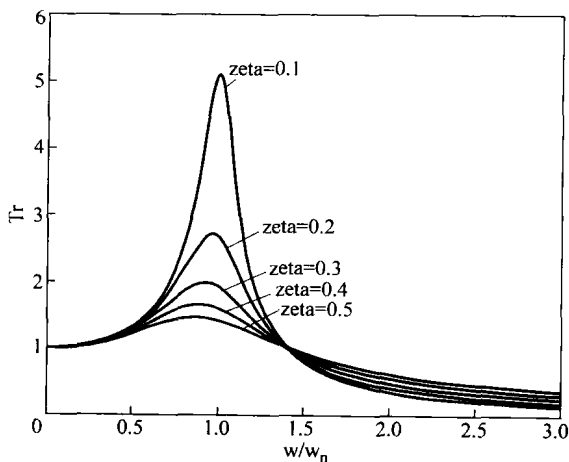


图 9.34 例 9.11 图

例 9.12 利用 MATLAB, 根据式(9.134)和式(9.135)绘制吸振器主质量和辅助质量的振幅与频率比的关系曲线。

解: 绘制式(9.134)和式(9.135)的曲线时, 所选数据如下: $f = \omega_a / \omega_n = 1$, $\zeta = 0.1$ 和 0.5 , $\mu = m_2 / m_1 = 0.05$ 和 0.1 。

```

f=1;
%----- zeta=0.1, mu=0.05-----
-----
zeta=0.1;
mu=0.05;
g=0.6:0.001:1.3;

tzg2=(2.*zeta.*g).^2;%---tzg2=(2*zeta*g)^2;
g2_f2_2=(g.^2-f.^2).^2;%g2_f2_2=(g^2-f^2)^2
g2_1mug2_2=(g.^2-1+mu.*g.^2).^2;
muf2g2=mu.*f.^2*g.^2;
g2_1=g.^2-1;

```

```

g2_f2=g.^2-f.^2;

x1r=sqrt((tzg2+g2_f2_2)./(tzg2.*g2_1mug2_2+(muf2g2-g2_1.*g2_f2).^2));
x2r=sqrt((tzg2+f.^4)./(tzg2.*g2_1mug2_2+(muf2g2-g2_1.*g2_f2).^2));
plot(g,x1r)
hold on
plot(g,x2r);
hold on
%----- zeta=0.1, mu=0.1 -----
-----
zeta=0.1;
mu=0.1; 0.001:1.3;
g=0.6:

tzg2=(2.*zeta.*g).^2;%--- tzg2=(2*zeta*g)^2
g2_f2_2=(g.^2-f.^2).^2;%g2_f2_2=(g^2-f^2)^2
g2_1mug2_2=(g.^2-1+mu.*g.^2).^2;
muf2g2=mu.*f.^2*g.^2;
g2_1=g.^2-1;
g2_f2=g.^2-f.^2;

x1r=sqrt((tzg2+g2_f2_2)./(tzg2.*g2_1mug2_2+(muf2g2-g2_1.*g2_f2).^2));
x2r=sqrt((tzg2+f.^4)./(tzg2.*g2_1mug2_2+(muf2g2-g2_1.*g2_f2).^2));
plot(g,x1r,'-.');
hold on
plot(g,x2r,'-.');
hold on
%----- zeta=0.5, mu=0.05 -----
-----
zeta=0.5;
mu=0.05;
g=0.6:0.001:1.3;

tzg2=(2.*zeta.*g).^2;%---tzg2=(2*zeta*g)^2
g2_f2_2=(g.^2-f.^2).^2;%g2_f2_2=(g^2-f^2)^2
g2_1mug2_2=(g.^2-1+mu.*g.^2).^2;
muf2g2=mu.*f.^2*g.^2;
g2_1=g.^2-1;
g2_f2=g.^2-f.^2;

x1r=sqrt((tzg2+g2_f2_2)./(tzg2.*g2_1mug2_2+(muf2g2-g2_1.*g2_f2).^2));
x2r=sqrt((tzg2+f.^4)./(tzg2.*g2_1mug2_2+(muf2g2-g2_1.*g2_f2).^2));
plot(g,x1r,'--');

```

```

hold on
plot(g,x2r,'--');
hold on
%----- zeta=0.5, mu=0.1 -----
-----
zeta=0.5;
mu=0.1;
g=0.6:0.001:1.3;

tzg2=(2.*zeta.*g).^2;%--- tzg2=(2*zeta*g)^2
g2_f2_2=(g.^2-f.^2).^2;%g2_f2_2=(g^2-f^2)^2
g2_1mug2_2=(g.^2-1+mu.*g.^2).^2;
muf2g2=mu.*f.^2*g.^2;
g2_1=g.^2-1;
g2_f2=g.^2-f.^2;

x1r=sqrt((tzg2+g2_f2_2)/(tzg2.*g2_1mug2_2+(muf2g2-g2_1.*g2_f2).^2));
x2r=sqrt((tzg2+f.^4)/(tzg2.*g2_1mug2_2+(muf2g2-g2_1.*g2_f2).^2));
plot(g,x1r,':');
hold on
plot(g,x2r,':');
xlabel('g')
ylabel('x1r and x2r')
axis([0.6 1.3 0 16])

```

所绘曲线如图 9.35 所示。

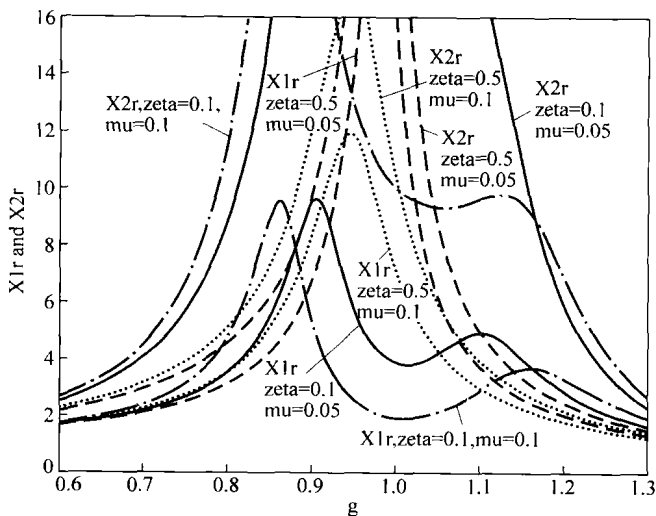


图 9.35 例 9.12 图

例 9.13 利用 MATLAB, 根据式(9.140)绘制共振频率比随质量比 m_2/m 的变化曲线。

解: 根据式(9.140)绘制共振频率比与质量比的关系曲线时考虑如下 3 种情况: $\omega_2/\omega_1 = 0.5, 1.0$ 和 2.0 , 质量比的范围为 $0 \leq m_2/m_1 \leq 1$ 。

```
%----- omega2/omega1= 0.5 -----
-----
omega21=0.5
m21=0:0.001:1.0
X11=sqrt(((1+(1+m21)*omega21.^2)+((1+(1+m21)).*omega21.^2).^2-4.*omega21.^
2).^0.5)...
        /(2.*omega21.^2))
plot(m21,X11,':')
axis([0 1.0 0.0 2.6])
hold on

X12=sqrt(((1+(1+m21)*omega21.^2)-((1+(1+m21)).*omega21.^2).^2-4.*omega21.^
2).^0.5)...
        /(2.*omega21.^2))
plot(m21,X12,':')
hold on

%----- omega2/omega1=1.0-----
-----
omega21=1.0
m21=0:0.001:1.0
X21=sqrt(((1+(1+m21)*omega21.^2)+((1+(1+m21)).*omega21.^2).^2-4.*omega21.^2).
.^0.5)...
        /(2.*omega21.^2))
plot(m21,X21,'-')
axis([0 1.0 0.0 2.6])
hold on

X22=sqrt(((1+(1+m21)*omega21.^2)-((1+(1+m21)).*omega21.^2).^2-4.*omega21.^
2).^0.5)...
        /(2.*omega21.^2))
plot(m21,X22,'-')
hold on

%----- omega2/omega1=2.0-----
```

```

-----
omega21=2.0
m21=0:0.001:1.0
X31=sqrt(((1+(1+m21)*omega21.^2)+((1+(1+m21)).*omega21.^2).^2-4.*omega21.^
2).^0.5)...
        /(2.*omega21.^2))
plot(m21,X31,'-.')
axis([0 1.0 0.0 2.6])
hold on

X32=sqrt(((1+(1+m21)*omega21.^2)-((1+(1+m21)).*omega21.^2).^2-4.*omega21.^
2).^0.5)...
        /(2.*omega21.^2))
plot(m21,X32,'-.')
hold on
xlabel('mr')
ylabel('OM1 and OM2')

```

所绘曲线如图 9.36 所示。

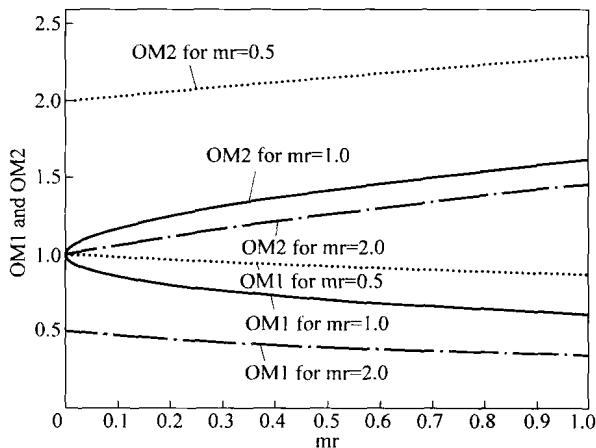


图 9.36 例 9.13 图

例 9.14 编写一个名为 Program13.m 的通用 MATLAB 程序实现转子的双面平衡, 并使用该程序求解例 9.2。

解: 程序 Program13.m 中向量 $V_A, V_B, V'_A, V'_B, V''_A, V''_B, W_L, W_R$ 分别记作 $VA, VB, VAP, VBP, VAPP, VBPP, WL, WR$ 。这些向量在程序执行后由键盘录入。程序以 BL 和 BR 的形式输出 B_L, B_R , 分别表示左、右两平面上平衡质量的大小和位置。程序及运行后的显示结果如下。

```

%=====
%
%Program13.m
%Two-plane balancing
%
%=====
%Run"Program13"in MATLAB command window.Progrm13.m,balan.m,vsub.m,
%vdiv.m and vmult.m should be in the same folder,and set the MATLAB path
%to this folder.
%following 8 lines contain problem-dependent data
va=[8.5 60];
vap=[6 125];
wl=[10 270];
vb=[6.5 205];
vbp=[4.5 230];
vapp=[6 35];
vbpp=[10.5 160];
wr=[12 180];
%end of problem-dependent data
[bl,br]=balan(va,vb,vap,vbp,vapp,vbpp,wl,wr);
fprintf('          Results of two-plane balancing \n\n');
fprintf('Left-plane balancing weight Right-plane balancing weight');
fprintf('\n\n');
fprintf('Magnitude=% 8.6f          Magnitude=% 8.6f \n\n',bl(1),br(1));
fprintf('Angel=% 8.6f          Angel=% 8.6f \n\n',bl(2),br(2));
%=====
%
%Function Balan.m
%
%=====
function [bl,br]=balan(va,vb,vap,vbp,vapp,vbpp,wl,wr);
pi=180/3.1415926;
va(2)=va(2)/pi;
p(1)=va(1);
p(2)=va(2);
va(1)=p(1)*cos(p(2));
va(2)=p(1)*sin(p(2));
vb(2)=vb(2)/pi;
p(1)=vb(1);
p(2)=vb(2);

```

```

vb(1)=p(1)*cos(p(2));
vb(2)=p(1)*sin(p(2));
vap(2)=vap(2)/pi;
p(1)=vap(1);
p(2)=vap(2);
vap(1)=p(1)*cos(p(2));
vap(2)=p(1)*sin(p(2));
vbp(2)=vbp(2)/pi;
p(1)=vbp(1);
p(2)=vbp(2);
vbp(1)=p(1)*cos(p(2));
vbp(2)=p(1)*sin(p(2));
vapp(2)=vapp(2)/pi;
p(1)=vapp(1);
p(2)=vapp(2);
vapp(1)=p(1)*cos(p(2));
vapp(2)=p(1)*sin(p(2));
vbpp(2)=vbpp(2)/pi;
p(1)=vbpp(1);
p(2)=vbpp(2);
vbpp(1)=p(1)*cos(p(2));
vbpp(2)=p(1)*sin(p(2));
wl(2)=wl(2)/pi;
p(1)=wl(1);
p(2)=wl(2);
wl(1)=p(1)*cos(p(2));
wl(2)=p(1)*sin(p(2));
wr(2)=wr(2)/pi;
p(1)=wr(1);
p(2)=wr(2);
wr(1)=p(1)*cos(p(2));
wr(2)=p(1)*sin(p(2));
[r]=vsub(vap,va);
[aal]=vdiv(r,wl);
[s]=vsub(vbp,vb);
[abl]=vdiv(s,wl);
[p]=vsub(vapp,va);
[aar]=vdiv(p,wr);
[q]=vsub(vbpp,vb);
[abr]=vdiv(q,wr);
[ar1]=sqrt(aar(1)^2+aar(2)^2);

```



```

[ar2]=atan(aar(2)/aar(1))*pi;
[al1]=sqrt(aal(1)^2+aal(2)^2);
[al2]=atan(aal(2)/aal(1))*pi;
[r]=vmult(abl,va);
[s]=vmult(aal,vb);
[vap]=vsub(r,s);
[r]=vmult(aar,abl);
[s]=vmult(aal,abr);
[vbp]=vsub(r,s);
[ur]=vdiv(vap,vbp);
[r]=vmult(abr,va);
[s]=vmult(aar,vb);
[vap]=vsub(r,s);
[r]=vmult(abr,aal);
[s]=vmult(aar,abl);
[vbp]=vsub(r,s);
[ul]=vdiv(vap,vbp);
bl(1)=sqrt(ul(1)^2+ul(2)^2);
al=ul(2)/ul(1);
bl(2)=atan(ul(2)/ul(1));
br(1)=sqrt(ur(1)^2+ur(2)^2);
a2=ur(2)/ur(1);
br(2)=atan(ur(2)/ur(1));
bl(2)=bl(2)*pi;
br(2)=br(2)*pi;
bl(2)=bl(2)+180;
br(2)=br(2)+180;
%=====
%
%Function vdiv.m
%
%=====
function [c]=vdiv(a,b);
c(1)=(a(1)*b(1)+a(2)*b(2))/(b(1)^2+b(2)^2);
c(2)=(a(2)*b(1)-a(1)*b(2))/(b(1)^2+b(2)^2);
%=====
%
%Function vmult.m
%
%=====
function [c]=vmult(a,b);

```

```

c(1)=a(1)*b(1)-a(2)*b(2);
c(2)=a(2)*b(1)+a(1)*b(2);
%=====
%
%Function vsub.m
%
%=====
function [c]=vsub(a,b);
c(1)=a(1)-b(1);
c(2)=a(2)-b(2);

Results of two-plane balancing

Left-plane balancing weight          Right-plane balancing weight
Magnitude=10.056139                 Magnitude=5.877362
Angel=145.554799                    Angel=248.255931

```

9.13 C++ 程序

本节给出一个名为 Program13.cpp 的 C++ 程序,用来实现旋转机械的双面平衡。该程序的输入和输出与 Program13.m 的输入和输出类似。

例 9.15 利用程序 Program13.cpp 求解例 9.2。

解: 程序执行后,显示结果如下:

```

RESULTS OF TWO-PLANE BALANCING

LEFT-PLANE BALANCING WEIGHT          RIGHT-PLANE BALANCING WEIGHT
MAGNITUDE=10.05613891               MAGNITUDE=5.87736171
ANGLE=145.55479890                  ANGLE=248.25593054

```

9.14 Fortran 程序

本节给出一个名为 PROGRAM13.F 的 Fortran 程序,用来实现旋转机械的双面平衡。该程序的输入和输出与 PROGRAM13.m 的输入和输出类似。

例 9.16 利用程序 PROGRAM13.F 求解例 9.2。

解: 程序执行后,显示结果如下:

```

RESULTS OF TWO-PLANE BALANCING

LEFT-PLANE BALANCING WEIGHT          RIGHT-PLANE BALANCING WEIGHT
MAGNITUDE=0.10056140E+02            MAGNITUDE=0.58773613E+01
ANGLE=0.14555478E+03                ANGLE=0.24825594E+03

```

参考文献

- 9.1 J. E. Ruzicka, "Fundamental concepts of vibration control," *Sound and Vibration*, Vol. 5, July 1971, pp. 16-22.
- 9.2 J. A. Macinante, *Seismic Mountings for Vibration Isolation*, Wiley, New York, 1984
- 9.3 International Organization for Standardization, *Mechanical Vibration of Machines with Operating Speeds from 10 to 200 rev/s—Basis for Specifying Evaluation Standards*, ISO 2372, 1974.
- 9.4 International Organization for Standardization, *Evaluation and Measurement of Vibration in Buildings*, Draft Proposal, ISO DP 4866, 1975.
- 9.5 R. J. Steffens, "Some aspects of structural vibration," in *Proceedings of the Symposium on Vibrations in Civil Engineering*, B. O. Skipp(ed.), Butterworths, London, 1966, pp. 1-30.
- 9.6 International Organization for Standardization, *Guide for the Evaluation of Human Exposure to Whole-Body Vibration*, ISO 2631, 1974.
- 9.7 C. Zenz, *Occupational Medicine: Principles and Practical Application* (2nd ed.), Year Book Medical Publishers, Chicago, 1988.
- 9.8 R. L. Fox, "Machinery vibration monitoring and analysis techniques," *Sound and Vibration*, Vol. 5, November 1971, pp. 35-40.
- 9.9 D. G. Stadelbauer, "Dynamic balancing with microprocessors," *Shock and Vibration Digest*, Vol. 14, December 1982, pp. 3-7.
- 9.10 J. Vaughan, *Static and Dynamic Balancing* (2nd ed.), Bruel and Kjaer Application Notes, Naerum, Denmark.
- 9.11 R. L. Baxter, "Dynamic balancing," *Sound and Vibration*, Vol. 6, April 1972, pp. 30-33.
- 9.12 J. H. Harter and W. D. Beitzel, *Mathematics Applied to Electronics*, Reston Publishing, Reston, Virginia, 1980.
- 9.13 R. G. Loewy and V. J. Piarulli, "Dynamics of rotating shafts," *Shock and Vibration Monograph SVM-4*, Shock and Vibration Information Center, Naval Research Laboratory, Washington, D. C., 1969.
- 9.14 J. D. Irwin and E. R. Graf, *Industrial Noise and Vibration Control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1979.
- 9.15 T. Iwatsuba, "Vibration of rotors through critical speeds," *Shock and Vibration Digest*, Vol. 8, No. 2, February 1976, pp. 89-98.
- 9.16 R. J. Trivisonno, "Fortran IV computer program for calculating critical speeds of rotating shafts," NASA TN D-7385, 1973.
- 9.17 R. E. D. Bishop and G. M. L. Gladwell, "The vibration and balancing of an unbalanced flexible rotor," *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 1, 1959, pp. 66-77.
- 9.18 A. G. Parkinson, "The vibration and balancing of shafts rotating in asymmetric bearings," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 2, 1965, pp. 477-501.
- 9.19 C. E. Crede, *Vibration and Shock Isolation*, Wiley, New York, 1951.

- 9.20 W. E. Purcell, "Materials for noise and vibration control," *Sound and Vibration*, Vol. 16, July 1982, pp. 6-31.
- 9.21 B. C. Nakra, "Vibration control with viscoelastic materials," *Shock and Vibration Digest*, Vol. 8, No. 6, June 1976, pp. 3-12.
- 9.22 G. R. Tomlinson, "The use of constrained layer damping in vibration control," in *Modern Practice in Stress and Vibration Analysis*, J. E. Mottershead(ed.), Pergamon Press, Oxford, 1989, pp. 99-107.
- 9.23 D. E. Baxa and R. A. Dykstra, "Pneumatic isolation systems control forging hammer vibration," *Sound and Vibration*, Vol. 14, May 1980, pp. 22-25.
- 9.24 E. I. Rivin, "Vibration isolation of industrial machinery—Basic considerations," *Sound and Vibration*, Vol. 12, November 1978, pp. 14-19.
- 9.25 C. M. Salerno and R. M. Hochheiser, "How to select vibration isolators for use as machinery mounts," *Sound and Vibration*, Vol. 7, August 1973, pp. 22-28.
- 9.26 C. A. Mercer and P. L. Rees, "An optimum shock isolator," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 18, 1971, pp. 511-520.
- 9.27 M. L. Munjal, "A rational synthesis of vibration isolators," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 39, 1975, pp. 247-263.
- 9.28 C. Ng and P. F. Cunniff, "Optimization of mechanical vibration isolation systems with multidegrees of freedom," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 36, 1974, pp. 105-117.
- 9.29 S. K. Hati and S. S. Rao, "Cooperative solution in the synthesis of multidegree of freedom shock isolation systems," *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, Vol. 105, 1983, pp. 101-103.
- 9.30 S. S. Rao and S. K. Hati, "Optimum design of shock and vibration isolation systems using game theory," *Journal of Engineering Optimization*, Vol. 4, 1980, pp. 1-8.
- 9.31 J. E. Ruzicka, "Active vibration and shock isolation," Paper no. 680747, *SAE Transactions*, Vol. 77, 1969, pp. 2872-2886.
- 9.32 R. W. Horning and D. W. Schubert, "Air suspension and active vibration-isolation systems," in *Shock and Vibration Handbook* (3rd ed.), C. M. Harris(ed.) McGraw-Hill, New York, 1988.
- 9.33 O. Vilnay, "Active control of machinery foundation," *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 110, 1984, pp. 273-281.
- 9.34 J. I. Soliman and M. G. Hallam, "Vibration isolation between non-rigid machines and nonrigid foundations," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 8, 1968, pp. 329-351.
- 9.35 J. Ormondroyd and J. P. Den Hartog, "The theory of the dynamic vibration absorber," *Transactions of ASME*, Vol. 50, 1928, p. APM-241.
- 9.36 H. Puksand, "Optimum conditions for dynamic vibration absorbers for variable speed systems with rotating and reciprocating unbalance," *International Journal of Mechanical Engineering Education*, Vol. 3, April 1975, pp. 145-152.
- 9.37 A. Soom and M. -S. Lee, "Optimal design of linear and nonlinear absorbers for damped systems," *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, Vol. 105, 1983, pp. 112-119.
- 9.38 J. B. Hunt, *Dynamic Vibration Absorbers*, Mechanical Engineering Publications, London, 1979.

思考题

9.1 简答题

1. 列举几种工业振源。
2. 列举振动控制的几种可行方法。
3. 什么是单面平衡?
4. 简述双面平衡的过程。
5. 什么是涡动?
6. 静态阻尼(外阻尼)和循环阻尼(内阻尼)的区别是什么?
7. 轴的临界速度是怎样确定的?
8. 哪此因素会导致转子系统的失稳?
9. 活塞式发动机的平衡需要考虑哪些方面的影响?
10. 隔振器有什么功能?
11. 什么是吸振器?
12. 吸振器和隔振器有什么区别?
13. 带有弹簧的底座是不是一定会减小机床基础的振动?
14. 机床的弹性底座使用较软的弹簧支承是否会有更好的效果? 为什么?
15. 机器的激振力是否与转速的平方成比例? 传递到基础的振动力是否随机器转速的增大而增大?
16. 为什么说满足动平衡的转子一定是静平衡的?
17. 说明动平衡为什么不能够仅通过静平衡实验来实现。
18. 为什么转轴总会产生振动? 冲击力的来源是什么?
19. 动力减振器辅助系统阻尼的存在是否总是有益的?
20. 什么是主动隔振?
21. 说明主动隔振和被动隔振的区别。

9.2 判断题

1. 振动会造成结构和机械的失效。 ()
2. 使用隔振器和吸振器可以降低系统的响应。 ()
3. 振动控制就是消除或者减小振动。 ()
4. 旋转的不平衡圆盘造成的振动可通过在圆盘上增加一个合适的质量来消除。 ()
5. 转子的任何不平衡量都可以由两端面上的等效不平衡量来代替。 ()
6. 轴承中的油膜振荡会导致转子系统失稳。 ()
7. 系统的固有频率可以通过改变系统阻尼来改变。 ()

8. 改变轴承的位置会使旋转轴的刚度发生变化。 ()
9. 所有的实际系统都有阻尼。 ()
10. 材料的高损失系数意味着有较小的阻尼。 ()
11. 被动隔振系统要求有外界能源来实现其作用。 ()
12. 传递率也称作传递比。 ()
13. 通过隔振器传递给刚性基础的力不会是无穷大。 ()
14. 转动轴速度大于第一临界速度时,内部和外部的摩擦会导致失稳。 ()

9.3 填空题

1. 在_____附近,即使是很小的激励也会引起非常大的响应。
2. 机械零件较高的加工精度和较高的表面质量对振动有_____作用。
3. 旋转的圆盘有不平衡量会导致_____。
4. 当轴的转速等于轴的某一固有频率时被称为_____速度。
5. 活塞式发动机的运动部件有曲柄、连杆和_____。
6. 活塞式发动机惯性力的垂直分量有主要部分和_____部分。
7. 层状结构有_____阻尼。
8. 与一般的材料相比,损失系数较大的材料受到的应力_____。
9. 振动隔离主要是在振动质量和_____之间嵌入弹性元件。
10. 软木是一种_____隔离器。
11. 主动隔振器包括传感器、数据处理器和_____。
12. 振动中和器也叫做_____。
13. 虽然无阻尼吸振器改变了原始响应的共振点,却引起了_____新的共振点。
14. 单面平衡也称为_____。
15. 使用振动分析仪进行平衡时,_____面平衡用到了相位标记。
16. 机械加工误差会导致旋转机械_____。
17. 燃烧不稳定是发动机_____的原因之一。
18. 在_____速度时,旋转轴的变形会非常大。
19. 轴承中的油膜振荡会导致挠性转子系统_____。

9.4 选择题

1. 下列振源中不能被改变的是_____。
(a) 大气湍流 (b) 锤子的敲击 (c) 汽车轮胎的刚度
2. 双面平衡也被称作_____。
(a) 静平衡 (b) 动平衡 (c) 完全平衡
3. 到圆心距离为 r 的偏心质量 m 以角速度 ω 旋转时产生的不平衡力为_____。
(a) $mr^2\omega^2$ (b) $mg\omega^2$ (c) $mr\omega^2$

4. 下列材料中内部阻尼最大的是_____。
 (a) 铸铁 (b) 铜 (c) 黄铜
5. 传递率是_____的比值。
 (a) 被传递的力与激振力
 (b) 作用力与产生的位移
 (c) 输入位移与输出位移
6. 机械阻抗是_____的比值。
 (a) 被传递的力与激振力 (b) 作用的力与被传递的力 (c) 作用的力与位移
7. 振动_____可以通过理论分析消除。
 (a) 有时 (b) 总是 (c) 永远不
8. 较长的转子可以通过在_____增加质量实现平衡。
 (a) 一个平面 (b) 任意两个平面 (c) 两个确定的平面
9. 由轴的材料的内部摩擦产生的阻尼称作_____。
 (a) 稳定阻尼 (b) 外部阻尼 (c) 循环阻尼
10. 转轴轴承的支承结构产生的阻尼称作_____。
 (a) 稳定阻尼 (b) 外部阻尼 (c) 循环阻尼
11. 无阻尼吸振器改变了原始的共振点,却产生了_____。
 (a) 一个新共振点 (b) 两个新共振点 (c) 多个新共振点

9.5 连线题

- | | |
|---------------------|-----------|
| 1. 控制固有频率 | (a) 引入阻尼 |
| 2. 避免共振时过大的响应 | (b) 使用隔振器 |
| 3. 减少激振力从一部分传递到另一部分 | (c) 增加吸振器 |
| 4. 减小系统的响应 | (d) 避免共振 |

习 题

- 9.1 一辆汽车行驶在按正弦规律变化的不平路面上。汽车可以简化为一个弹簧-质量系统,如图 9.37 所示。正弦曲面的波长是 5 m,振幅为 $Y=1$ mm。如果汽车的质量(包括乘员)为 1500 kg,系统的悬架刚度 k 是 400 kN/m。求汽车乘员能感受到振动时行驶速度 v 的范围,并提出改进乘坐舒适性的方案。

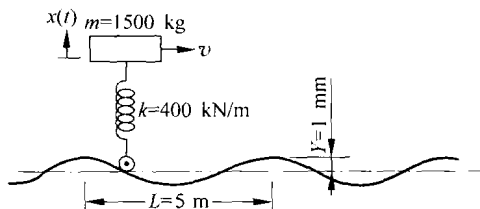


图 9.37 习题 9.1 图

- 9.2 信号 $x(t)$ 的均方根 x_{rms} 定义为

$$x_{\text{rms}} = \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \right\}^{1/2}$$

根据以上定义,计算出对应于 $x(t) = X \cos \omega t$ 的位移、速度和加速度的均方根 x_{rms} , \dot{x}_{rms} 和 \ddot{x}_{rms} 。

- 9.3 安装在一根轴上的两个相同的圆盘用 4 个型号不同的螺栓连接在一起,如图 9.38 所示。其中 3 个螺栓的位置和质量如下:

$$m_1 = 35 \text{ g}, \quad r_1 = 110 \text{ mm}, \quad \theta_1 = 40^\circ$$

$$m_2 = 15 \text{ g}, \quad r_2 = 90 \text{ mm}, \quad \theta_2 = 220^\circ$$

$$m_3 = 25 \text{ g}, \quad r_3 = 130 \text{ mm}, \quad \theta_3 = 290^\circ$$

确定第 4 个螺栓的位置和质量(m_c, r_c, θ_c),使圆盘满足静平衡。

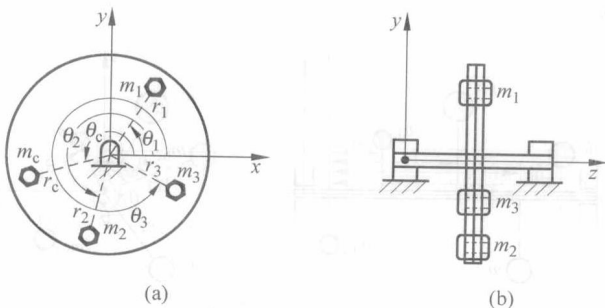


图 9.38 习题 9.3 图

- 9.4 在一个均质圆盘上距圆心为 4 in 处钻了 4 个孔,角度分别是 $0^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ$ 。孔 1, 2 去除的质量为 4 oz, 孔 3, 4 去除的质量为 5 oz。如果计划在距圆心为 5 in 处钻第 5 个孔,使圆盘实现静平衡,求第 5 个孔去除的质量和角度位置。
- 9.5 3 个质量块的重量分别是 0.5 lbf, 0.7 lbf, 1.2 lbf, 粘接在一个直径为 30 in 的飞轮上, 角度位置分别是 $\theta = 10^\circ, 100^\circ, 190^\circ$ 。求使飞轮实现动平衡需增加的第 4 个质量块的重量和角度位置。
- 9.6 具有初始不平衡量的砂轮,转速为 1200 r/min 时的振幅是 10 mil^①,相角在逆时针方向与相位标记夹 40° 角。在距圆心为 2.5 in、在顺时针方向与相位标记线夹角为 65° 处增加一个大小为 6 oz 的实验载荷后。振幅和相角变为 19 mil 和 150° (逆时针)。如果平衡载荷被粘附在距圆心为 2.5 in 处,求平衡载荷的大小和角度位置。
- 9.7 不平衡的飞轮振幅是 6.5 mil, 相位为与相位标记顺时针方向夹角为 15° 。在与角度标记逆时针夹角 45° 处增加一个重 2 oz 的实验载荷后,振幅变为 8.8 mil, 相角是 35° (逆时针)。求所需平衡载荷的大小和角度位置。假定平衡载荷也加在距圆心相同距离的

① 1 mil(密耳)=0.001 in。

位置上。

- 9.8 一个不平衡的砂轮,沿逆时针方向转动,速度为 2400 r/min 。使用振动分析仪可以观察到振幅为 4 mil ,相角为 45° 。在与相位标记逆时针方向夹角为 20° 处增加一个重 $W=4 \text{ oz}$ 的实验载荷后,振幅变为 8 mil ,相角是 145° 。如果相角是从右手侧的水平线沿逆时针方向测量的,求所需平衡质量的大小和位置。
- 9.9 汽轮机转子在系统的固有频率下运行。频闪观测仪显示转子的最大偏移发生在沿转动方向 229° 处。为改善转子的平衡,应在哪个角度位置上去除质量?
- 9.10 一个转子在不同平面上存在 3 个偏心质量,如图 9.39 所示。质量 m_i 的轴向、径向和角度位置分别是 $l_i, r_i, \theta_i, i=1,2,3$ 。对转子进行动平衡,分别在半径为 r_{b1} 和 r_{b2} 、角度为 θ_{b1} 和 θ_{b2} 的位置增加两个质量 m_{b1} 和 m_{b2} ,如图 9.39 所示,推导 $m_{b1} r_{b1}, m_{b2} r_{b2}, \theta_{b1}$ 和 θ_{b2} 的表达式。

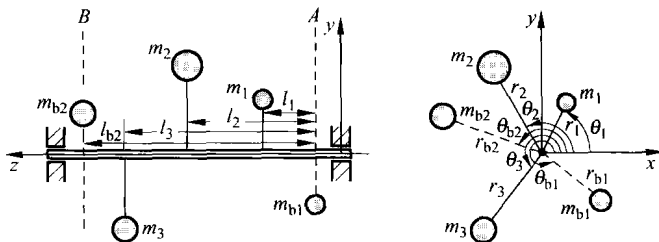


图 9.39 习题 9.10 图

- 9.11 图 9.40(a)所示的转子在平衡设备中通过在平面 A 上增加载荷 $W_1=W_2=0.2 \text{ lbf}$,在平面 D 上增加 $W_3=W_4=0.2 \text{ lbf}$ 暂时达到了平衡。所有的载荷都增加在距圆心为 3 in 处,见图 9.40(b)。如果在平面 B,C 上距圆心为 4 in 处钻孔使转子达到永久的平衡,求去除质量的大小和位置。假定载荷 W_1 到 W_4 将从平面 A 和 D 上移除。

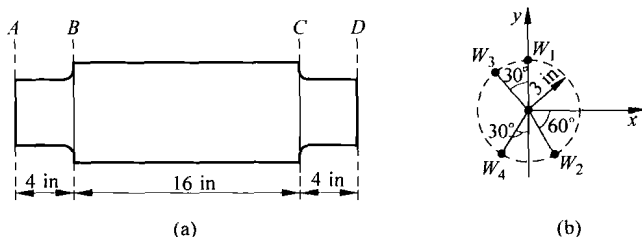


图 9.40 习题 9.11 图

- 9.12 一根轴安装在轴承 B 和 F 上。在 C,D,E 平面上,半径为 $2 \text{ in}, 3 \text{ in}, 1 \text{ in}$ 处分别有 $2 \text{ lbf}, 4 \text{ lbf}, 3 \text{ lbf}$ 的不平衡量,如图 9.41 所示。要使作用在轴承上的动载荷为零,求需要在 A 和 G 两个端面上增加的平衡载荷的重量和角度位置。
- 9.13 下面表格中是在对转子进行双面平衡时得到的数据。试确定平衡质量的大小和

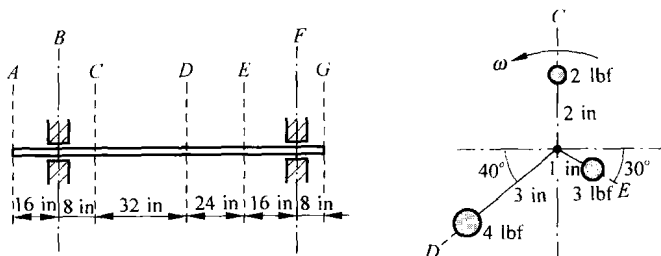


图 9.41 习题 9.12 图

角度位置。假定所有的角度都是从任意的相位标记线处量起的,各平衡质量的位置到圆心的距离相等。

条 件	振幅/mil		相角/(°)	
	轴承 A	轴承 B	轴承 A	轴承 B
初始不平衡	5	4	100	180
左端面 30° 处增加 $W_L = 2 \text{ oz}$	6.5	4.5	120	140
右端面 0° 处增加 $W_R = 2 \text{ oz}$	6	7	90	60

- 9.14 图 9.42 是一个转动系统。一根轴在 A 和 B 两点由轴承支承。3 个质量块 m_1, m_2, m_3 被连接在轴上。(a) 当轴的转速为 1000 r/min 时,求 A 和 B 两处轴承的反作用力。(b) 在 L 和 R 两个平面上距圆心为 0.25 m 处增加平衡质量,试确定其大小和位置。假设平面 L 和 R 分别是通过轴承 A, B 的平面。

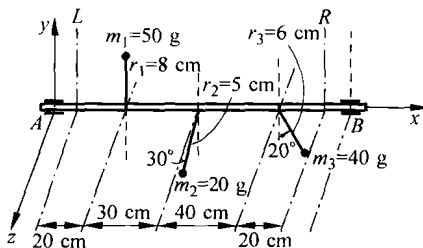


图 9.42 习题 9.14 图

- 9.15 一个重 100 lbf 的飞轮,偏心距为 0.5 in,安装在一根钢质的轴上。轴的直径为 1 in。如果轴承之间的长度为 30 in,飞轮的转速为 1200 r/min,求:(a)临界速度,(b)转子的振幅,(c)传递到轴承支座上的力。
- 9.16 一根轴安放在两个轴承上,在它的中间部位有一个不平衡的集中质量。推导轴中应力的表达式。
- 9.17 一根钢质轴,长 1 m,直径为 2.5 cm,两端由轴承支承,工作转速为 6000 r/min。在轴的中部装有涡轮盘,涡轮的质量为 20 kg,偏心距为 0.005 m。系统阻尼可以用阻尼比为 $\zeta = 0.01$ 的黏性阻尼等效。确定以下转速下轮盘的涡动幅度:(a)工作转速;(b)临界转速;(c)1.5 倍临界转速。
- 9.18 求习题 9.17 所述系统在以下情况下的轴承反作用力和轴的最大弯曲应力:(a)工作转速;(b)临界转速;(c)1.5 倍临界转速。

- 9.19 假设习题 9.17 中轴的材料为铝,对其进行求解。
- 9.20 假设习题 9.18 中轴的材料为铝,对其进行求解。
- 9.21 一根轴的刚度系数为 3.75 MN/m ,转速为 3600 r/min ,有一质量为 60 kg 、偏心为 $2000 \mu\text{m}$ 的转子安装在轴上。求: (a) 转子的稳态振幅; (b) 转子启动和停车时的最大振幅。假设系统的阻尼比为 0.05 。
- 9.22 四缸同轴的发动机汽缸间的轴向距离为 12 in 。曲柄长度相等,都是 4 in ,它们的角度位置分别是 $0^\circ, 180^\circ, 180^\circ, 0^\circ$ 。如果连杆的长度为 10 in ,每个汽缸的往复运动重量均为 2 lbf 。求转速为 3000 r/min 时的不平衡力和不平衡力矩。以汽缸 1 的中心线为参考平面。
- 9.23 两缸同轴的发动机,每个汽缸的活塞质量、曲柄半径、连杆长度分别是 m, r 和 l 。两汽缸曲柄的夹角为 180° 。求发动机的不平衡力和不平衡力矩。
- 9.24 一台四缸同轴的发动机,每个汽缸的活塞重量为 3 lbf ,冲程为 6 in ,连杆长 10 in 。曲柄间距为 4 in ,夹角为 90° ,如图 9.43 所示。求发动机转速为 1500 r/min 时不平衡力和不平衡力矩的主要部分和次要部分,参考平面如图 9.43 所示。
- 9.25 六缸同轴发动机曲柄的排列如图 9.44 所示。汽缸之间的轴向距离均为 a ,曲柄的角度位置分别是 $\alpha_1 = \alpha_6 = 0^\circ, \alpha_2 = \alpha_5 = 120^\circ, \alpha_3 = \alpha_4 = 240^\circ$ 。每个汽缸的曲柄长度、连杆长度和活塞质量分别是 r, l, m 。求不平衡力和不平衡力矩,参考平面如图 9.44 所示。

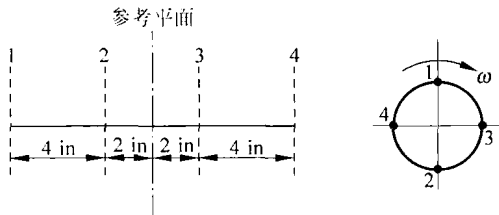


图 9.43 习题 9.24 图

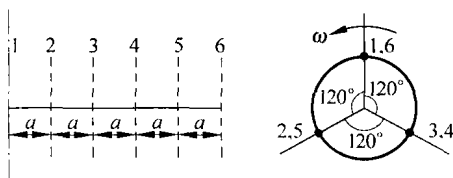


图 9.44 习题 9.25 图

- 9.26 一单缸发动机的总质量 150 kg ,其中活塞质量为 5 kg ,旋转质量为 2.5 kg 。行程($2r$)为 15 cm ,转速为 600 r/min 。(a) 如果发动机被安装在刚度非常小的弹簧上,求发动机垂直方向的振幅。(b) 如果发动机安装在刚性基础上,求传递到基础的力的幅值。假定连杆是无限长。
- 9.27 安放在控制台上的电子仪器要进行隔振,控制台振动的频率范围是 $25 \sim 35 \text{ Hz}$ 。为防止对仪器造成损坏,必须将振动至少隔离 80% 。如果仪器重 85 N ,求隔振器的静变形。
- 9.28 有轻微不平衡的排气扇,重 800 N ,工作转速 600 r/min 。当排气扇启动通过共振区时,要求传递率不超过 2.5 ,并且要求在工作转速下能隔离 90% 的振动。为排气扇设计一个合适的隔振器。

- 9.29^{*} 质量为 500 kg 的空气压缩机有一 $50 \text{ kg} \cdot \text{cm}$ 的偏心,^①工作转速为 300 r/min。若将其安装在:(a)一个阻尼忽略的弹簧隔振器上;(b)阻尼比为 0.1,刚度忽略不计的冲击吸振器上。请选择合适的安装条件,并确定设计的细节(考虑压缩机的静变形、传递率和振幅)。
- 9.30 调速电机铁芯的质量为 200 kg,由于加工误差而造成一个不平衡量。电机安装在刚度为 10 kN/m 的隔振器上,其阻尼器的阻尼比为 0.15。(a)求传递到基础的力的幅值大于激振力幅值的速度范围;(b)求传递到基础的力的幅值小于激振力幅值的 10% 的速度范围。
- 9.31 洗碗机重 150 lbf,工作转速为 300 r/min。求隔振 60% 的隔振器的最小静变形。假定隔振器阻尼忽略不计。
- 9.32 洗衣机的质量为 50 kg,工作转速为 1200 r/min。求隔振 75% 的隔振器的最大刚度。假定隔振器的阻尼比为 7%。
- 9.33 排气扇的质量为 80 kg,转速为 1000 r/min,对刚性基础产生交变力的最大值为 10 000 N。如果要求使用阻尼隔振器后传递到基础的力不超过 2000 N。试确定:(a)隔振器的最大允许刚度;(b)隔振器取最大允许刚度时排气扇的稳态振幅;(c)使用隔振器后排气扇启动时的最大振幅。
- 9.34 印刷机的质量为 300 kg,工作转速为 3000 r/min,对刚性基础产生的交变力为 30 000 N。设计满足以下条件的黏性阻尼隔振器:(a)静位移尽可能小;(b)稳态振幅小于 2.5 mm;(c)启动时的振幅不超过 20 mm;(d)传递到基础的力小于 10 000 N。
- 9.35 质量为 120 kg 的压缩机,转动不平衡量的大小为 $0.2 \text{ kg} \cdot \text{m}$ 。如果隔振器的刚度为 0.5 MN/m ,阻尼比为 0.06,并要求传递到基础的力不超过 2500 N,求压缩机工作速度的范围。
- 9.36 一台内燃机有 $1.0 \text{ kg} \cdot \text{m}$ 的转动不平衡量,工作转速在 800~2000 r/min 之间。如果直接将其安装在地板上,转速为 800 r/min 时传递给地板的力为 7018 N,转速为 2000 r/min 时传递给地板的力为 43 865 N。求在工作速度范围内能够将传递到地板的力减少到 6000 N 的隔振器的刚度。假定隔振器的阻尼比是 0.08,内燃机质量为 200 kg。
- 9.37 一台小型机械的质量为 100 kg,工作转速为 600 r/min。求能隔离 90% 振动的无阻尼隔振器的静变形。
- 9.38 一台柴油机的质量为 300 kg,工作转速为 1800 r/min,有 $1 \text{ kg} \cdot \text{m}$ 的转动不平衡量。将其安装在地面上为工业设备提供动力。允许传递到地面的力的最大值是 8000 N,唯一可以使用的隔振器的刚度为 1 MN/m ,阻尼比为 5%。研究这个问题的可能解决方案。

^① 中文书中一般把偏心质量和偏心距分开说,原著这样给相当于告诉了偏心质量和偏心距的乘积。……译者

- 9.39 内燃机的质量为 500 kg, 直接安装在刚性地板上时传递到地板的力为

$$F_i(t) = 18\,000\cos 300t + 3600\cos 600t \text{ (N)}$$

设计合适的无阻尼隔振器, 使得传递到地板的力的最大值不超过 12 000 N。

- 9.40 设计汽车悬架, 使得当汽车以 40~80 m/h 行驶在按 $y(u) = 0.5\sin 2u$ ft (这里 u 为水平方向的位移) 变化的路面上时, 司机所承受的竖直方向的加速度不超过 $2g$ 。汽车的重量(连同司机)为 1500 lbf, 悬架的阻尼比为 0.05。汽车的简化模型为一个单自由度系统。
- 9.41 考虑一个有库仑阻尼(产生一个大小不变的摩擦力 F_c) 的单自由度系统。当质量受到一个谐波激励 $F(t) = F_0\sin \omega t$ 时, 推导力传递率的表达式。
- 9.42 考虑一个有库仑阻尼(产生一个大小不变的摩擦力 F_c) 的单自由度系统。当基础有一个按简谐规律变化的位移 $y(t) = Y\sin \omega t$ 时, 推导绝对和相对位移的传递率。
- 9.43 一台洗衣机的质量为 200 kg, 有 $0.02 \text{ kg} \cdot \text{m}$ 的不平衡量。将其安装在隔振器上时, 在静载荷的作用下隔振器产生 5 mm 的变形。求: (a) 洗衣机的振幅; (b) 工作转速为 1200 r/min 时传递到基础的力。
- 9.44 一台电动机的质量为 60 kg, 转速为 3000 r/min, 有 $0.002 \text{ kg} \cdot \text{m}$ 的不平衡量, 将其安装在隔振器上, 要求力传递率小于 0.25。确定: (a) 隔振器的刚度; (b) 电机的动态振幅; (c) 传递给基础的力。
- 9.45 一台发动机通过 4 根弹簧安装在刚性基础上。发动机工作时产生一个激振力, 频率为 3000 r/min。如果发动机的重量导致弹簧产生 10 mm 的变形, 求传递到基础的力的减小量。
- 9.46 精密电子系统的质量为 30 kg, 通过一个弹簧阻尼系统固定在建筑物的地板上。该建筑物简谐运动的频率范围为 10~75 Hz。若悬架系统的阻尼比为 0.25, 且要求在此频率范围内传递给系统的运动振幅小于地面振动振幅的 15%, 试确定悬架系统的刚度。
- 9.47 一个重 2600 lbf 的机械通过弹簧隔振安装在基础上。一个重 $w = 60 \text{ lbf}$ 的活塞在机械内部以 600 r/min 上的速度作下运动, 冲程为 15 in。如果认为这个过程是谐波运动。试确定传递给基础的力的最大值, 如果 (a) $k = 10\,000 \text{ lbf/in}$, (b) $k = 25\,000 \text{ lbf/in}$ 。
- 9.48 印刷电路板的质量为 1 kg, 通过一个无阻尼隔振器安装在基础上。工作时, 基础受到一个幅值为 2 mm、频率为 2 Hz 的谐波干扰(运动)。设计这个隔振器, 使得传递到印刷电路板的位移不超过基础运动振幅的 5%。
- 9.49 一个质量为 10 kg 的电子仪器, 通过一个隔振垫安装在基础上。假设隔振垫的基础受到一个大小为 10 mm/s 的阶跃速度形式的冲击, 如果该仪器的最大允许变形和加速度分别是 10 mm 和 $20g$, 求隔振垫的刚度。
- 9.50 质量为 10^5 kg 的水箱安放在加强的混凝土柱子上, 如图 9.45(a) 所示。一颗炮弹击

中水箱时产生了一个阶跃力形式的冲击,见图 9.45(b)。如果水箱的最大偏移不能超过 0.5 m,确定柱子的刚度。冲击响应谱见图 9.45(c)。

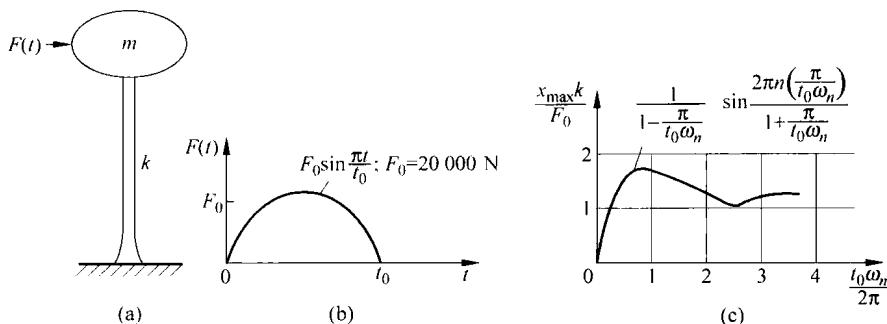


图 9.45 习题 9.50 图

9.51 空气压缩机的质量为 200 kg,有一个 $0.01\text{ kg} \cdot \text{m}$ 的不平衡量。转速为 1200 r/min 时发现它的振幅最大。如果要使系统的固有频率至少远离激励频率的 20%,确定要附加的吸振器的质量和弹性常数。

9.52 一台电动机有 $2\text{ kg} \cdot \text{cm}$ 的不平衡量,安装在一钢制悬臂梁的自由端,如图 9.46 所示。当电动机的工作转速为 1500 r/min 时,梁的振幅最大。现要安装一个吸振器来减小梁的振动。(a)求吸振器和电动机的质量比,使安装吸振器后系统的固有频率为电动机工作转速的 75%。(b)如果电动机的质量为 300 kg,确定吸振器的质量和刚度。(c)求吸振器质量的振幅。

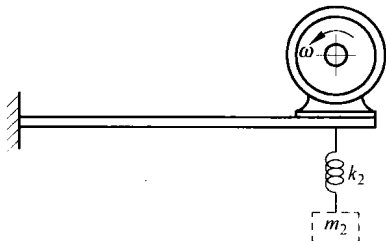


图 9.46 习题 9.52 图

9.53* 热力公司给供热锅炉供水的水管,当水泵转速为 800 r/min 时会发生剧烈振动。为了减小振动,在水管上安装了一个吸振器(由刚度为 k_2 的弹簧和一个质量为 1 kg 的实验载荷 m'_2 组成)。这样使得系统的固有频率为 750 r/min 和 1000 r/min。为了使固有频率在水泵的转速范围 700~1040 r/min 之外,求满足要求的 k_2 和 m_2 的值。

9.54 一台活塞式发动机安装在某建筑物的二楼。该建筑物可以看作是 4 根弹性柱子支撑着一个矩形刚性平板。发动机和楼板的等效重量为 2000 lbf。当发动机以额定转速 600 r/min 工作时,楼板会产生剧烈的振动。现欲在楼板的底部悬挂一个弹簧-质量系统来减振。假定弹簧刚度为 $k_2 = 5000\text{ lbf/in}$ 。求:(a)吸振器质量块的质量;(b)安装吸振器后系统的固有频率。

9.55* 为使习题 9.54 中系统的固有频率远离激励频率至少 30%,求 k_2 和 m_2 的值。

9.56* 一根空心轴的外径为 2 in,内径为 1.5 in,长 30 in,轴上装有一个直径为 15 in、重 100 lbf 的圆盘。将另外一根长 20 in,上面装有一个直径 6 in、重 20 lbf 圆盘的轴安装

在第一个圆盘上,见图 9.47。如果要求附加的轴盘系统起到吸振器的作用,求满足要求的轴的外径和内径。

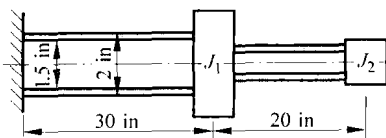


图 9.47 习题 9.56 图

- 9.57 一个转子的转动惯量为 $J_1 = 15 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 安装在一根扭转刚度为 $0.6 \text{ MN} \cdot \text{m/rad}$ 的钢质轴的一端。当转子受到一个谐波扭转激励 $300 \cos 200t \text{ N} \cdot \text{m}$ 时会发生剧烈的振动。一个扭转刚度为 k_{t2} 、转动惯量为 J_2 的调频吸振器安装在转子上以吸收其振动。若要求系统的固有频率远离激励频率不小于 20%, 求 k_{t2} 和 J_2 的值。
- 9.58 绘制 $\omega_2/\omega_1 = 0.1$ 和 $\omega_2/\omega_1 = 10$ 时, (Ω_1/ω_2) 与 (m_2/m_1) 、 (Ω_2/ω_2) 与 (m_2/m_1) 的关系曲线, (m_2/m_1) 的取值范围 $0 \sim 1.0$ 。
- 9.59 假定 $\omega_1 = \omega_2$, $m_2 = 0.1 m_1$, 为使 $|X_1/\delta_{st}|$ 限制为 0.5, 求无阻尼吸振器工作时的频率比 ω/ω_2 的范围。
- 9.60 无阻尼吸振器的质量为 30 kg, 刚度为 k , 安装在一个质量为 40 kg、刚度为 0.1 MN/m 的弹簧-质量系统上。当主质量(40 kg)受到一个幅值为 300 N 的谐波激励力时, 其稳态振幅为零。求吸振器质量的稳态振幅。
- 9.61 一台质量为 20 kg 的电动机, 工作转速为 1350 r/min, 安装在宽 15 cm、高 12 cm 的钢质两端固支梁上, 如图 9.48 所示。电动机有 $0.1 \text{ kg} \cdot \text{m}$ 的转动不平衡量。电机稳态工作时, 安装在电机下方的无阻尼吸振器抑制了梁的振幅, 见图 9.48。如果要求吸振器质量的振幅小于 2 cm, 求吸振器的质量和刚度。
- 9.62 车辆从桥上经过时会产生一个幅值为 600 N 的谐波载荷, 从而引起桥梁发生剧烈振动。将桥梁简化为一个质量为 15 000 kg、刚度为 2 MN/m 的无阻尼弹簧-质量系统, 为其设计一个合适的调频阻尼吸振器, 并确定使用吸振器后桥梁振幅的改进效果。
- 9.63 一台小型电动机重 100 lbf, 固有频率为 100 rad/s。计划使用一重为 10 lbf 的吸振器来对其进行减振, 电动机转速为 80 rad/s。确定吸振器的刚度。
- 9.64 图 9.49 所示的系统, 有一个简谐力作用在质量块 m 上。求使质量块 m 的稳态位移为零的条件。

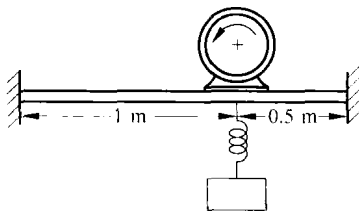


图 9.48 习题 9.61 图

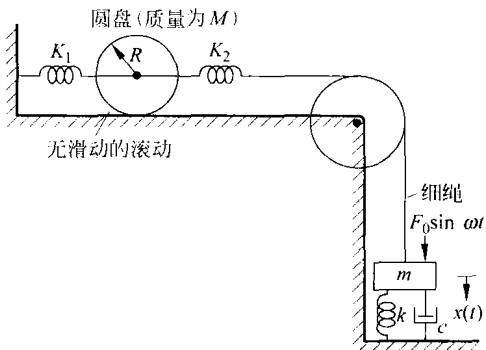


图 9.49 习题 9.64 图

- 9.65 用 MATLAB, 绘制 $\zeta=0, 0.25, 0.5, 0.75$ 和 1 时式(9.94)的图形, 其中 $0 \leq r \leq 3$ 。
- 9.66 使用 MATLAB, 绘制式(9.134)和式(9.135)的图形, 参数如下: $f=1$; $\zeta=0.2, 0.3, 0.4$; $\mu=0.2, 0.5$; 且 $0.6 \leq \omega/\omega_1$ 。
- 9.67 使用 MATLAB, 根据式(9.140)绘制 Ω_1/ω_2 和 Ω_2/ω_2 的图形。其中, $\omega_2/\omega_1=1.5, 3.0, 4.5$, 且 $0 < m_2/m_1 \leq 1$ 。
- 9.68 使用 Program13.m, 求解习题 9.13。
- 9.69 使用 Program13.cpp, 求解习题 9.13。
- 9.70 使用 PROGRAM13.F, 求解习题 9.13。
- 9.71 编程求解动态阻尼吸振器主质量和辅助质量的位移, 并使用该程序生成图 9.32 的结果。

设计题目

- 9.72 起重机、锻床和空气压缩机工作时产生的振动传递给了附近的铣床。在进行特种精密加工时, 这种振动是有害的。起重机、锻床和空气压缩机安装位置处地面的振动分别是 $x_c(t)=A_c e^{-\zeta_c \omega_c t} \sin \omega_c t$, $x_f(t)=A_f \sin \omega_f t$, $x_a(t)=A_a \sin \omega_a t$ 。其中, $A_c=20 \mu\text{m}$, $A_f=30 \mu\text{m}$, $A_a=25 \mu\text{m}$, $\omega_c=10 \text{ Hz}$, $\omega_f=15 \text{ Hz}$, $\omega_a=20 \text{ Hz}$, $\zeta_c=0.1$ 。地面的振动在土壤中以剪切波的形式传播, 速度为 980 ft/s , 振幅按照以下的规律衰减: $A_r=A_0 e^{-0.005r}$, 其中, A_0 为振源的振幅, A_r 为距振源 $r \text{ ft}$ 处的振幅。起重机、锻床、空气压缩机距铣床的距离分别是 $60 \text{ ft}, 80 \text{ ft}, 40 \text{ ft}$ 。实验测得在竖直方向振动时铣床工作头的等效质量、刚度和阻尼比分别是 $500 \text{ kg}, 480 \text{ kN/m}$ 和 0.15 。铣床底座的等效质量为 1000 kg 。计划在铣床底座上安装一个吸振器以提高切削精度^[9, 2], 如图 9.50 所示。为铣床设计一个合适的隔振器(包括一个质量、一个弹簧和一个阻尼器), 如图 9.50(b)所示, 使得由 3 处振源产生的铣床相对于被加工平面的竖向位移峰-峰值不超过 $5 \mu\text{m}$ 。

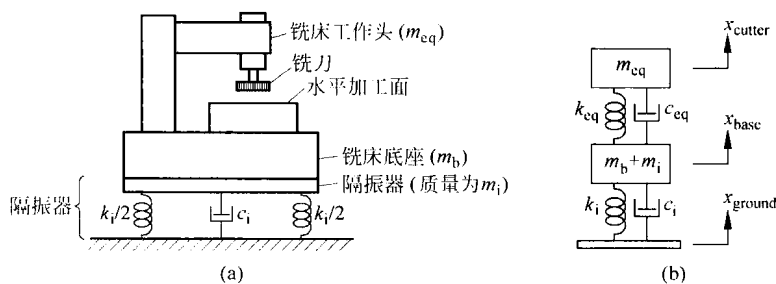


图 9.50 设计题目 9.72 图



基尔霍夫(Gustav Robert Kirchhoff, 1824--1887), 德国物理学家、化学家。1848 年开始任教于柏林大学, 后来在海德堡任物理学教授。1859 年在海德堡完成了他对物理学的主要贡献, 即通过实验和理论分析发现电磁辐射的基本原理。他还在电路和弹性理论方面做出了重大贡献。1850 年发表了关于板的理论的若干重要论文, 首次给出了一个令人满意的板的弯曲振动理论以及准确的边界条件。1875 年又回到柏林大学任理论物理学教授。

(照片经 Applied Mechanics Reviews 授权使用。)

第 10 章 振动测量与应用

10.1 引言

在工程实际中, 由于以下原因, 使得振动测量变得十分必要:

(1) 对生产效率越来越高的要求以及设计时基于经济方面的考虑, 要求机器以较高的速度运转^①和大量使用轻质的结构材料。这些趋势使得机器在运行过程中发生共振的可能性更大, 且降低了系统的可靠性。因此, 为了保证足够的安全裕度, 定期对机械或结构系统的振动特性进行测试十分必要。任何观察到的固有频率或其他振动特征的变化, 往往表明机器系统已经发生了故障或需要及时维修。

(2) 结构或机器系统固有频率的测量对选择附近机械设备的运转速度以避免共振是非常有用的。

(3) 由于在进行分析时可能采用了某些假设, 所以求得的机器或结构的振动特性的理论值可能与实际值有较大出入。

(4) 对振动频率以及由于振动而引起的力进行测量, 对主动隔振系统的设计和运行都是必要的。

(5) 在许多应用中, 都需要确定结构或机器能否承受特定的振动环境。如果一个结构或机器系统经过特定环境的振动测试后仍能完成预期的目标, 就可以认为它能够承受这类

^① 根据 Eshleman 的说法^[10, 12], 在 1940 - 1980 年这段时间内, 旋转机械的平均速度翻了一番, 即从 1800 r/min 提高到了 3600 r/min。

特殊的振动环境而不发生破坏。

(6) 在进行振动分析时,为了简单,经常把连续系统近似为多自由度系统。如果测量所得连续系统的固有频率和振型与理论计算的结果比较接近,那么就可以认为这个近似是有效的。

(7) 通过测量振动系统输入和输出的特性,有助于识别系统的质量、刚度和阻尼。

(8) 在设计结构、机器、石油钻井平台和车辆的悬挂系统时,有关地震引起的地面振动、作用在结构上的风速变化、海浪的随机变化和路面不平度等信息,是非常重要的。

振动测量的基本过程如图 10.1 所示。振动传感器(也叫拾振器)把振动体的运动(或动力)转化为电信号。一般来说,传感器就是将机械量的变化(如位移、速度、加速度或力)转变成电量的变化(如电压或电流)的装置。由于传感器的输出信号(电压或电流)太小,不能够直接进行记录,因此需要用信号转换仪将信号放大到所需要的值。信号转换仪的输出可以显示以供观察,或通过记录仪进行记录或存储在计算机中以备使用。通过对采集的数据进行分析,就可以确定机器或结构振动特性。

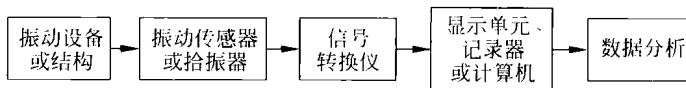


图 10.1 振动测量流程图

根据测量的物理量的不同,振动测量仪器可以分为振动计、流速计、加速度计、相位计或频率计等。如果设计的仪器是为了记录测量信号,那么后缀“计”改为“仪”。^[10,1]在有些应用中,需要使机器或结构产生振动,以找到它的共振特性。为此,还要用到电动激振器、电液激振器和信号发生器。

可以从以下几方面考虑进行振动测试时要用到哪些振动测量仪器:①频率和振幅的大致范围;②所测机器或结构的几何尺寸;③机器设备或结构的运行环境;④所用数据处理类型(如图形显示或记录以及以数字形式存储记录以便计算机处理)。

10.2 传感器

如前所述,传感器是一种把其他物理量转化成相应的电信号的装置。一些常用的测量振动的传感器介绍如下。

10.2.1 变电阻传感器

这些传感器是把由于机械运动引起的变阻器、应变计或半导体的电阻变化,转换为输出电压或电流的变化。变电阻传感器的核心元件是电阻应变计,图 10.2 是其原理图。它包括一个由于机械变形会引起电阻变化的丝栅。当应变片粘贴在一个结构上以后,它会经历和构件相同的运动,因此其电阻的变化就能反应构件的应变。丝栅是夹在两层薄纸中间的。使用时将应变片粘贴在待测应变处的表面。最常见的应变片材料是铜镍合金的,也称为阿

范斯(Advance)合金。当振动体表面产生正应变 ϵ 时,应变片也产生相同的应变,而相应的电阻变化为^[10.6]

$$K = \frac{\Delta R/R}{\Delta L/L} = 1 + 2\nu + \frac{\Delta r}{r} \frac{L}{\Delta L} \approx 1 + 2\nu \quad (10.1)$$

式中, K 为丝栅的灵敏系数; R 为初始电阻; ΔR 为电阻的变化; L 为丝栅的原长; ΔL 为导线长度的变化; ν 为丝栅材料的泊松比; r 为丝栅的电阻率; Δr 为丝栅的电阻率变化(对Advance合金,此值近似为零)。比例因数 K 的值是由制造商提供的,所以只要测定 ΔR 和 R 的值,就可以得到 ϵ 的值:

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta R}{RK} \quad (10.2)$$

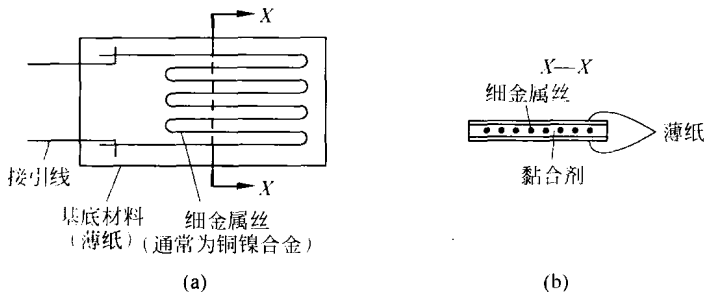


图 10.2 电阻应变片

如图 10.3 所示,在一个拾振器中^①,应变片粘贴在弹簧-质量系统的弹性元件上。根据测量,悬臂梁任何一点的应变与待测的质量块位移 $x(t)$ 成正比。因此,可以由应变片指示的应变值得到 $x(t)$ 。可以用惠斯通电桥、电位计电路或分压计测量丝栅电阻的改变量 ΔR 。典型的惠斯通电桥如图 10.4 所示,此电路对电阻的微小变化非常敏感。若在 a, c 两点接上电压为 V 的直流电,则可以求出 b 和 d 之间的输出电压为^[10.6]

$$E = \left[\frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \right] V \quad (10.3)$$

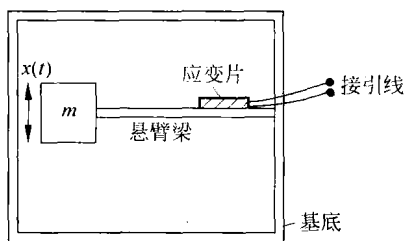


图 10.3 作为拾振器的电阻应变片

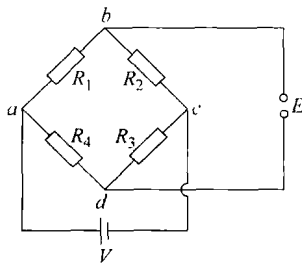


图 10.4 惠斯通电桥

① 当一个传感换器与其他器件联合起来使用以进行信号的处理与传递时,这样的装置称为拾振器。

通过调节电阻使电桥处于最初平衡,即输出电压 E 等于零。由方程(10.3)得

$$R_1 R_3 = R_2 R_4 \quad (10.4)$$

当电阻 R_i 产生微小的变化 ΔR_i 时,输出电压的变化 ΔE 可以表示为

$$\Delta E \approx V r_0 \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right) \quad (10.5)$$

式中

$$r_0 = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{R_3 R_4}{(R_3 + R_4)^2} \quad (10.6)$$

如果应变片的两端分别连接在 a 点与 b 点,则 $R_1 = R_g$, $\Delta R_1 = \Delta R_g$, $\Delta R_2 = \Delta R_3 = \Delta R_4 = 0$ 。由方程(10.5)得

$$\frac{\Delta R_g}{R_g} = \frac{\Delta E}{V r_0} \quad (10.7)$$

式中, R_g 是应变片的初始阻值。由方程(10.2)和方程(10.7)得

$$\frac{\Delta R_g}{R_g} = \epsilon K = \frac{\Delta E}{V r_0}$$

或

$$\Delta E = K V r_0 \epsilon \quad (10.8)$$

因为输出电压与丝栅的应变成正比,所以可以在标定后直接读出应变的大小。

10.2.2 压电传感器

某些天然材料或人造材料,如石英、电石、硫酸锂、四水(合)酒石酸钾钠,在变形或受到机械应力时会产生电荷(见图 10.5(a))。除去机械载荷时,电荷消失。这种材料称为**压电材料**。利用材料的压电效应制成的传感器称为**压电传感器**。当受到力 F_x 作用时,晶体中产生的电荷为

$$Q_x = k F_x = k A p_x \quad (10.9)$$

式中, k 称为压电常数; A 是力 F_x 的作用面积; p_x 是与 F_x 对应的压强。晶体的输出电压由下式给出:

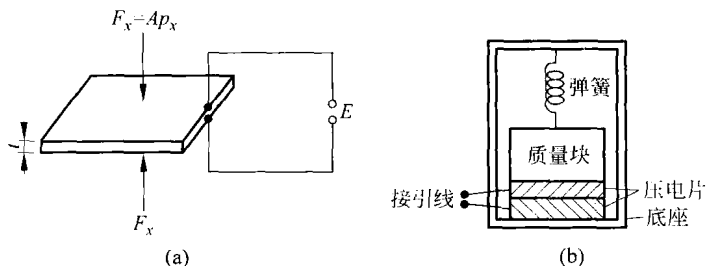


图 10.5 压电式加速度计

$$E = \nu t p_x \quad (10.10)$$

式中, ν 称为电压灵敏度; t 是晶体的厚度。石英的压电常数和电压灵敏度的值分别为 $2.25 \times 10^{-12} \text{ C/N}$ 和 $0.055 \text{ V} \cdot \text{m/N}$ ^[10.6]。只有当这些垂直于晶体最大表面的载荷沿晶体的 x 轴向时, 这些值才是有效的。如果这些晶体薄片是沿不同的方向切割得到的, 则产生的电荷和输出的电压是不同的。

一个典型的压电(加速度)传感器如图 10.5(b)所示。在这个图中, 小质量块所受到的弹簧力作用于压电晶体。当基座振动时, 晶体上的小质量块产生的载荷随着加速度的变化而变化, 因而产生的电压与加速度成正比。压电加速度计具有体积小、耐用性强、灵敏度高、测量频率范围大的特点。

例 10.1 一石英晶体的厚度为 0.1 in , 承受的压力为 50 lbf/in^2 , 如果灵敏系数为 $0.055 \text{ V} \cdot \text{m/N}$, 求输出电压。

解: 由于厚度为 $t = 0.1 \text{ in} = 0.00254 \text{ m}$, $p_x = 50 \text{ lbf/in}^2 = 344.738 \text{ N/m}^2$, $\nu = 0.055 \text{ V} \cdot \text{m/N}$, 所以根据式(10.10)得输出电压为

$$E = 0.055 \times 0.00254 \times 344.738 = 48.1599(\text{V})$$

10.2.3 电动式传感器

如图 10.6 所示, 当一螺旋线圈形式的导体在磁场中运动时, 导体中会产生电压, 其值的表达式为

$$E = Dl v \quad (10.11)$$

式中, D 是磁通密度, T ; l 是导体长度, m ; v 是导体相对于磁场的速度, m/s 。磁场可以由永久磁体或电磁铁产生。有时候也可以是线圈保持静止而磁铁移动。电动传感器的输出电压与线圈的相对速度成正比, 因此它们通常用于速度测量。式(10.11)可以改写为

$$Dl = \frac{E}{v} = \frac{F}{I} \quad (10.12)$$

式中, F (单位为 N)表示当线圈上的电流为 I (单位为 A)时, 作用于线圈上的力。方程(10.12)表明, 可以反向利用电动式传感器的特性。事实上, 方程式(10.12)是以“激振器”形式使用电动传感器的基础, 见 10.5.2 节。

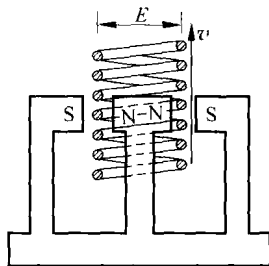


图 10.6 电动传感器的工作原理

10.2.4 线性变化差动变换传感器

线性变化差动变换(linear variable differential transformer, LVDT)传感器的示意图如图 10.7 所示。它是由中间的一个初级线圈、端部的两个次级线圈和一个可以在线圈内沿轴向自由移动的铁芯构成的。当交流输入电压作用于初级线圈时, 输出电压等于感应出的次

级线圈的电压差。输出电压与线圈和铁芯之间的磁耦合有关,而磁耦合与铁芯沿轴向的位移有关。两个次级线圈反相相连,使得当铁芯处于准确的中间位置时,两个线圈的电压相等,且相位差为 180° 。这使得 LVDT 传感器的输出电压等于零。当铁芯移向此中间(零)位置的任一侧时,一个线圈的磁耦合将会增强,而另一个线圈的磁耦合将会减弱。输出的极性取决于铁芯的运动方向。LVDT 传感器的(位移)量程在 $0.0002 \sim 40 \text{ cm}$ 之间。与其他类型的位移传感器相比,LVDT 传感器具有对温度不敏感、输出大等优点。

对于高频测量来说,铁芯的质量限制了 LVDT 传感器的应用。^[10.4]

只要铁芯是在离线圈中心不是很远处移动,输出电压就与铁芯的位移呈线性关系,如图 10.8 所示,所以将其称为线性变化差动变换器。

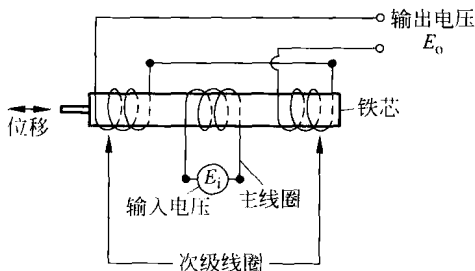


图 10.7 LVDT 传感器示意图

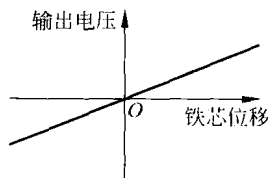


图 10.8 电压与铁芯位移的线性关系

10.3 拾振器

当传感器与另一个装置组合起来用于测量振动时,称为拾振器。地震仪就是人们常用的拾振器之一。地震仪由安装在振动体上的弹簧-质量-阻尼系统构成,如图 10.9 所示。通过测量安装于基座上的质量块相对于基座(安装在振动体上)的位移就可以知道振动体的运动。

将由质量块 m 、弹簧 k 和阻尼器 c 组成的系统安装在一个壳体内,并将其与振动体固连,就构成了一个简单的地震仪。这种结构配置,使得弹簧和阻尼器的底部与壳体(即振动体)具有相同的运动(待测量的 y),且引起悬挂质量的运动。如图 10.9 所示,如果在质量块上标记一个点,在壳体内放一个标尺就可以测出质量块相对于壳体的位移 $z = x - y$,这里 x 代表悬挂质量的垂直位移。^①

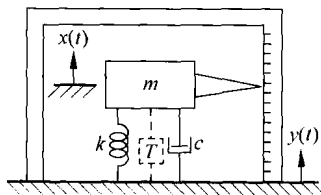


图 10.9 地震仪

① 图 10.9 中所示仪器的输出是质量块的相对机械运动,这可以通过外壳上的指针和刻度盘读出。为测量高速运行的情况以及为了方便起见,通常是利用转换器把这种运动信号转换成电信号。

假设振动体的运动是简谐的,即

$$y(t) = Y \sin \omega t \quad (10.13)$$

则质量块 m 的运动微分方程为

$$m \ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0 \quad (10.14)$$

通过定义相对位移 z :

$$z = x - y \quad (10.15)$$

方程(10.14)可以写为

$$m \ddot{z} + c \dot{z} + kz = -m \ddot{y} \quad (10.16)$$

由方程(10.13)和方程(10.16)得

$$m \ddot{z} + c \dot{z} + kz = m \omega^2 Y \sin \omega t \quad (10.17)$$

这个方程与方程(3.75)是一样的。因此由下式可以得出稳态解:

$$z(t) = Z \sin(\omega t - \phi) \quad (10.18)$$

式中, Z 和 ϕ 的表达式可以由式(3.76)和式(3.77)表示如下:

$$Z = \frac{Y \omega^2}{[(k - m \omega^2)^2 + c^2 \omega^2]^{1/2}} = \frac{r^2 Y}{[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{1/2}} \quad (10.19)$$

$$\phi = \arctan \frac{c \omega}{k - m \omega^2} = \arctan \frac{2\zeta r}{1 - r^2} \quad (10.20)$$

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} \quad (10.21)$$

且

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} \quad (10.22)$$

Z 和 ϕ 随 r 的变化如图 10.10 和图 10.11 所示。正如稍后要讲的,地震仪的类型决定于所测频率的范围,如图 10.10 所示。

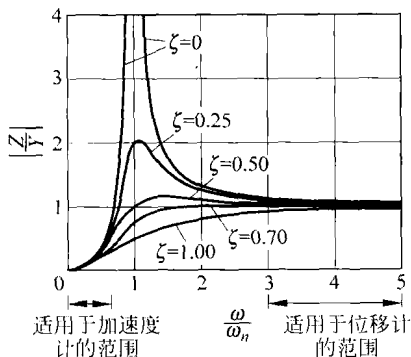


图 10.10 振动测量仪的响应

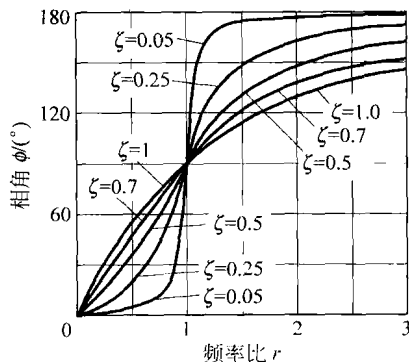


图 10.11 ϕ 随 r 的变化曲线

10.3.1 测振计

振动仪或地震仪是一种测量振动体位移的仪器。由图 10.10 可以看出,当 $\omega/\omega_n \geq 3$ 时, $Z/Y \approx 1$ 。因此质量块与基座之间的相对位移(传感器检测到的)基本上与基座的位移相等。为进行准确分析,现在考虑方程(10.19)。

注意到

$$z(t) \simeq Y \sin(\omega t - \phi) \quad (10.23)$$

如果

$$\frac{r^2}{[(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{1/2}} \approx 1 \quad (10.24)$$

比较方程(10.23)与 $y(t) = Y \sin \omega t$ 可以看出,两者只是相位不同。并且当 $\zeta = 0$ 时,相位差为 180° 。因此,记录的位移 $z(t)$ 滞后于测量位移 $y(t)$ 的时间为 $t' = \phi/\omega$ 。如果基座的位移由单一谐波分量构成,那么这一时间滞后是不重要的。

因为 $r = \omega/\omega_n$ 必须较大,且 ω_n 的值是固定的,所以要求弹簧-质量-阻尼系统的固有频率 $\omega_n = \sqrt{k/m}$ 较小。这就要求质量块的质量很大,弹簧的弹性系数较小,从而使得仪器变得十分庞大。这一点在许多应用中都是不希望出现的。在实践中,振动仪的 r 可能并不很大,因此 Z 值就不会正好等于 Y 值。在这种情况下,要通过计算方程式(10.19)求出 Y 的真实值,如下例。

例 10.2 振动仪的固有频率是 4 rad/s 且 $\zeta = 0.2$, 固连在一个作简谐运动的结构上。如果记录的最大测量值和最小测量值的差是 8 mm , 求结构振动的频率是 40 rad/s 时其振幅的大小。

解: 被测运动的振幅是 $Z = 4 \text{ mm}$ 。对 $\zeta = 0.2$, $r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{40}{4} = 10.0$, 由方程(10.19)得

$$Z = \frac{Y \times 10^2}{[(1-10^2)^2 + (2 \times 0.2 \times 10)^2]^{1/2}} = 1.0093Y$$

因此,结构振动的幅值为 $Y = Z/1.0093 = 3.9631 \text{ mm}$ 。

10.3.2 加速度计

加速度计是一种测量振动体加速度的仪器(见图 10.12),广泛用于振动加速度的测量,也能用于地震测量。根据加速度计的记录,可以通过积分求出速度和位移。由方程(10.18)和方程(10.19)得到

$$-z(t)\omega_n^2 = \frac{1}{[(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{1/2}} \{-Y\omega^2 \sin(\omega t - \phi)\} \quad (10.25)$$

这表明如果

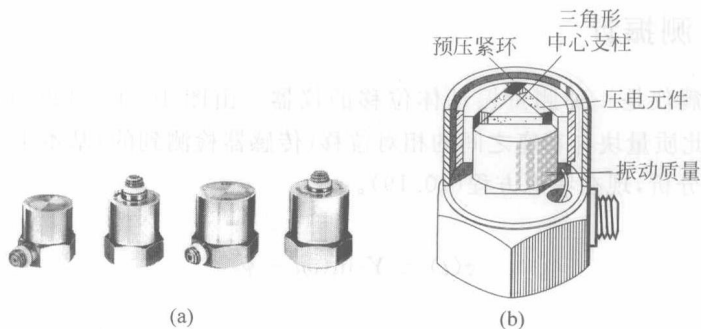


图 10.12 加速度计

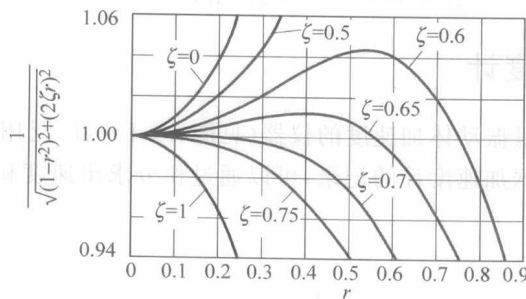
$$\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \simeq 1 \quad (10.26)$$

则可由方程(10.25)得

$$-z(t)\omega_n^2 \simeq -Y\omega^2 \sin(\omega t - \phi) \quad (10.27)$$

通过比较方程(10.27)与 $\ddot{y}(t) = -Y\omega^2 \sin \omega t$, 可以发现 $z(t)\omega_n^2$ 给出的加速度与基座的加速度 \ddot{y} 大小相同, 但有一个相位滞后 ϕ 。因此, 地震仪可以用来直接记录 $\ddot{y} = -z(t)\omega_n^2$ 的值。测量值滞后的时间可以由 $t' = \phi/\omega$ 给出。如果 \ddot{y} 由单一的谐波分量构成, 则时间滞后是不重要的。

方程(10.26)等号左边表达式的值随 r 的变化绘于图 10.13 中。可以看出, 当 $0 \leq r \leq 0.6$ 时, 如果 ζ 的值在 $0.65 \sim 0.7$ 之间, 那么此表达式的值在 $0.96 \sim 1.04$ 之间。因为 r 的值较小, 所以仪器的固有频率与待测振动的频率相比是较大的。从 $\omega_n = \sqrt{k/m}$ 可以看出, 应选取较小的质量和较大的弹簧刚度(也就是短弹簧), 所以仪器在尺寸方面较小。由于它们的小尺寸和高灵敏性, 所以加速度计在振动测量中很受欢迎。在实践中, 方程(10.26)可能并不严格满足。在这种情况下, 下列值

图 10.13 方程(10.26)的左边随 r 的变化曲线

$$\frac{1}{[(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{1/2}}$$

可以用来求出测量加速度的准确值,如下例。

例 10.3 加速度计有一个 0.01 kg 的悬挂质量,有阻尼自由振动的固有频率为 150 Hz。当安装在转速为 6000 r/min、加速度为 1 g 的发动机上时,测量的加速度值为 9.5 m/s²。求加速度计的阻尼常数和弹簧的刚度系数。

解: 测量加速度与实际加速度的比由下式给出:

$$\frac{1}{[(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{1/2}} = \frac{\text{测量值}}{\text{实际值}} = \frac{9.5}{9.81} = 0.9684 \quad (\text{E. 1})$$

即

$$(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2 = (1/0.9684)^2 = 1.0663 \quad (\text{E. 2})$$

发动机的运转速度为

$$\omega = \frac{6000 \times 2\pi}{60} = 628.32 (\text{rad/s})$$

加速度计的有阻尼固有频率为

$$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n = 150 \times 2\pi = 942.48 (\text{rad/s})$$

因此

$$\frac{\omega}{\omega_d} = \frac{\omega}{\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n} = \frac{r}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{628.32}{942.48} = 0.6667 \quad (\text{E. 3})$$

方程(E.3)给出

$$r = 0.6667 \sqrt{1-\zeta^2} \quad \text{或} \quad r^2 = 0.4444(1-\zeta^2) \quad (\text{E. 4})$$

以 ζ^2 为未知数,将方程(E.4)代入方程(E.2)得到如下关于 ζ^2 的二次方程:

$$1.5801\zeta^4 - 2.2714\zeta^2 + 0.7576 = 0 \quad (\text{E. 5})$$

方程(E.5)的解为

$$\zeta^2 = 0.5260, 0.9115$$

或

$$\zeta = 0.7253, 0.9547$$

不妨选 $\zeta = 0.7253$, 则加速度计的无阻尼固有频率为

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{942.48}{\sqrt{1-0.7253^2}} = 1368.8889 (\text{rad/s})$$

因为 $\omega_n = \sqrt{k/m}$, 故

$$k = m\omega_n^2 = 0.01 \times 1368.8889^2 = 18\,738.5628 (\text{N/m})$$

阻尼常数可以由下式确定:

$$c = 2m\omega_n\zeta = 2 \times 0.01 \times 1368.8889 \times 0.7253 = 19.8571 (\text{N} \cdot \text{s/m})$$

10.3.3 速度计

速度计用来测量振动体的速度。方程(10.13)给出振动体的速度为

$$\dot{y}(t) = \omega Y \cos \omega t \quad (10.28)$$

而由方程(10.18)得

$$\dot{z}(t) = \frac{r^2 \omega Y}{[(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{1/2}} \cos(\omega t - \phi) \quad (10.29)$$

因而如果

$$\frac{r^2}{[(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{1/2}} \simeq 1 \quad (10.30)$$

则

$$\dot{z}(t) \simeq \omega Y \cos(\omega t - \phi) \quad (10.31)$$

对比方程(10.28)和方程(10.31)可以看出,在方程(10.30)满足的条件下, $\dot{z}(t)$ 与 $\dot{y}(t)$ 的大小相等,只是有一个相位差 ϕ 。为了满足方程(10.30), r 一定要非常大。若方程(10.30)不满足,振动体的速度可以由方程(10.29)求出。

例 10.4 设计一个速度计,要求速度的误差限制在实际速度的1%以内,固有频率是80 Hz,悬挂质量为0.05 kg。

解: 由式(10.29)可以得出测量速度和实际速度的比为

$$R = \frac{r^2}{[(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{1/2}} = \frac{\text{测量速度}}{\text{实际速度}} \quad (\text{E. } 1)$$

当(见方程(3.84))

$$r = r^* = \frac{1}{\sqrt{1-2\zeta^2}} \quad (\text{E. } 2)$$

时,方程(E.1)取得最大值。

将方程(E.2)代入(E.1)得

$$\frac{\frac{1}{1-2\zeta^2}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{1}{1-2\zeta^2}\right)\right]^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{1}{1-2\zeta^2}\right)}} = R$$

上式可化简为

$$\frac{1}{\sqrt{4\zeta^2 - 4\zeta^4}} = R \quad (\text{E. } 3)$$

当误差为1%时, $R=1.01$ 或 0.99 ,由方程(E.3)得

$$\zeta^4 - \zeta^2 + 0.245\,075 = 0 \quad (\text{E. } 4)$$

和

$$\zeta^4 - \zeta^2 + 0.255\,075 = 0 \quad (\text{E. } 5)$$

方程(E.5)没有实数解。由方程(E.4)得

$$\zeta^2 = 0.570\,178, 0.429\,821$$

即

$$\zeta = 0.755\,101, 0.655\,607$$

不妨选 $\zeta = 0.755\,101$, 则可以得到弹簧的刚度系数为

$$k = m\omega_n^2 = 0.05 \times 502.656^2 = 12\,633.1527 (\text{N/m})$$

由于

$$\omega_n = 80 \times 2\pi = 502.656 (\text{rad/s})$$

可以确定阻尼常数为

$$c = 2\zeta\omega_n m = 2 \times 0.755\,101 \times 502.656 \times 0.05 = 37.9556 (\text{N} \cdot \text{s/m})$$

10.3.4 相位失真

如方程(10.18)所示,所有振动测量仪器都表现出相位滞后性。因此,该仪器的响应或输出滞后于测量的运动或输入。时间滞后等于相角除以频率 ω 。如果测量单一的谐波分量,相位滞后并不重要。但是在有些情况下,测量的振动并不是单一谐波而是两个或两个以上谐波分量的和。此时,记录的信号可能不是被测振动的真实反映,因为不同谐波可能会得到不同程度的放大,且相位的改变可能也是不同的。记录信号波形的失真叫**相位失真**或**相移误差**。下面以图 10.14(a)所示的振动信号来说明相位失真的特点。该信号的解析表达式为^[10, 10]

$$y(t) = a_1 \sin \omega t + a_3 \sin 3\omega t \quad (10.32)$$

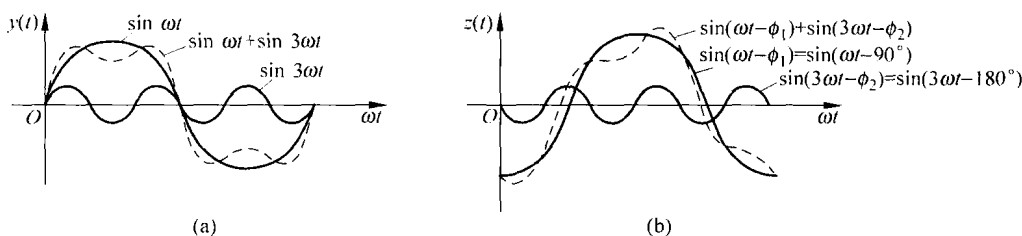


图 10.14 相位漂移引起的误差

(a) 输入信号; (b) 输出信号

令方程(10.32)中一次谐波的相移为 90° , 三次谐波的相移为 180° 。故相应的时间滞后分别为 $t_1 = \theta_1 / \omega = 90^\circ / \omega$ 和 $t_2 = \theta_2 / (3\omega) = 180^\circ / (3\omega)$ 。图 10.14(b)为该信号的输出。可以看出,由于相位失真,输出信号和输入信号有很大的不同。

在一般情况下,测量信号都是比较复杂的,即是几个谐波的和:

$$y(t) = a_1 \sin \omega t + a_2 \sin 2\omega t + \dots \quad (10.33)$$

当用测振计测量位移时,它对各次谐波的响应都可以通过一个与方程(10.18)相似的方

程得到,所以测振计的输出为

$$z(t) = a_1 \sin(\omega t - \phi_1) + a_2 \sin(2\omega t - \phi_2) + \dots \quad (10.34)$$

式中

$$\tan \phi_j = \frac{2\zeta \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right)}{1 - \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (10.35)$$

因为对测量仪器来说 ω/ω_n 较大,可以从图 10.11 中看到 $\phi_j \simeq \pi, j=1, 2, \dots$, 故方程(10.34)可以重写为

$$z(t) \simeq -(a_1 \sin \omega t + a_2 \sin 2\omega t + \dots) \simeq -y(t) \quad (10.36)$$

因此记录的输出信号仅仅是与被测量的振动方向相反。这一点并不重要,且很容易纠正。

通过类似的分析,对于速度计,当输入信号由几个谐波组成时,可以得到

$$\dot{z}(t) \simeq -\dot{y}(t) \quad (10.37)$$

接下来讨论加速度计的相位失真问题。根据方程(10.33),被测加速度的表达式如下:

$$\ddot{y}(t) = -a_1 \omega^2 \sin \omega t - a_2 (2\omega)^2 \sin 2\omega t - \dots \quad (10.38)$$

根据方程(10.34),可以得出仪器对每一个谐波分量的输出或响应,所以

$$\ddot{z}(t) = -a_1 \omega^2 \sin(\omega t - \phi_1) - a_2 (2\omega)^2 \sin(2\omega t - \phi_2) - \dots \quad (10.39)$$

方程(10.39)中不同谐波的相位滞后 ϕ_j 是不同的。当 $\zeta=0.7$ 时,时间滞后 ϕ 基本上是线性地从 0° (对应 $r=0$)变到 90° (对应 $r=1$)(见图 10.11)。故可将 ϕ 表示为

$$\phi \simeq \alpha r = \alpha \frac{\omega}{\omega_n} = \beta \omega \quad (10.40)$$

式中, α 和 $\beta = \alpha/\omega_n$ 是常数。而时间滞后为

$$t' = \frac{\phi}{\omega} = \frac{\beta \omega}{\omega} = \beta \quad (10.41)$$

上式表明,若频率范围为 $0 \leq r \leq 1$,则加速度计记录信号中的时滞对于各阶谐波都是一样的。因为信号的每一个谐波都具有相同的时滞或相位滞后,从方程(10.39)可得

$$\begin{aligned} -\omega^2 \ddot{z}(t) &= -a_1 \omega^2 \sin(\omega t - \omega\beta) - a_2 (2\omega)^2 \sin(2\omega t - 2\omega\beta) - \dots \\ &= -a_1 \omega^2 \sin \omega \tau - a_2 (2\omega)^2 \sin 2\omega \tau - \dots \end{aligned} \quad (10.42)$$

式中, $\tau = t - \beta$ 。方程(10.42)是基于假设 $0 \leq r \leq 1$ 得到的,也就是认为即使是待测信号中的最高频率 $n\omega$ 也比 ω_n 小。在实际测量时,这一点有可能是不满足的。但幸运的是,即使当一些较高的频率比 ω_n 大时,输出信号也不会有严重的相位失真。因为一般来说,即使对于复杂的波形,也仅仅是前几阶低次谐波对于近似程度有重要影响。因为高次谐波的振幅较小,因此对整个波形的影响不大。因此,加速度计的输出能够很好地反映所测量的真实的加速度。

10.4 频率测量仪

大多数频率测量仪都是机械型的,并基于共振原理设计。下面简要介绍 3 种常见的频率测量仪。

1. 单簧仪或富拿顿(Fullarton)飞球式转速计

这个仪器由一个可变长度的悬臂簧片组成,簧片的一个自由端处有一个集中质量,另一端由夹具固定,它的长度能通过机械装置调节,见图 10.15(a)。因为簧片的每一个长度对应着一个确定的固有频率,所以可用沿其长度方向的标记来显示固有频率。实际上,簧片的固定端是压在振动体上的。通过螺丝装置改变其长度,直到自由端达到最大的振幅。此时,激励频率就等于簧片的固有频率,而该值可以从所作标记上直接读出。

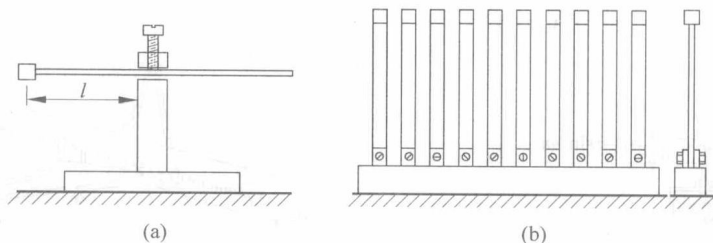


图 10.15 频率测量仪

2. 多簧仪或弗拉姆(Frahm)飞球式转速计

如图 10.15(b)所示,这种仪器包含若干个自由端带微小质量的悬臂簧片。每一个簧片有不同的固有频率并把它们相应地标定出来。许多簧片的使用,使得涵盖更宽范围的频率成为可能。当把仪器安装在振动体上时,固有频率与振动体的未知频率最接近的那个簧片的振幅最大。根据簧片的固有频率就可以得到振动体的频率。

3. 闪光测频仪

闪光测频仪是一种产生周期性光脉冲的仪器。产生光脉冲的频率是可以改变的,且可以从仪器中读出。当用闪光测频仪观测振动体上的某一特定点时,只有当脉冲光的频率等于振动体的速度时,这一点看上去才是静止的。闪光测频仪的主要优点是不与振动体本身接触。由于人眼的视觉暂留,通过闪光测频仪测量的最低频率约为 15 Hz。典型的闪光测频仪如图 10.16 所示。

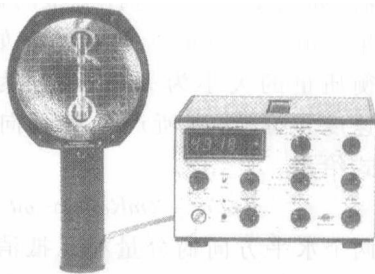


图 10.16 闪光测频仪

10.5 激振器

激振器或叫振荡器通常应用于如下几个方面,如确定机械或结构的动力学特性以及材料的疲劳实验等。激振器可以是机械式的、电磁式的、电动式的或液压式的。这一部分将介绍机械式和电磁式激振器的工作原理。

10.5.1 机械式激振器

如 1.7 节中的图 1.28 所示,正弦机构可以用来产生简谐振动。曲柄由常速或变速电机驱动。当要激发一个结构产生振动时,简谐力可以是惯性力,如图 10.17(a)所示,或弹簧的弹性力,如图 10.17(b)所示。这些激振器通常用于频率低于 30 Hz 或载荷小于 700 N 的情况。

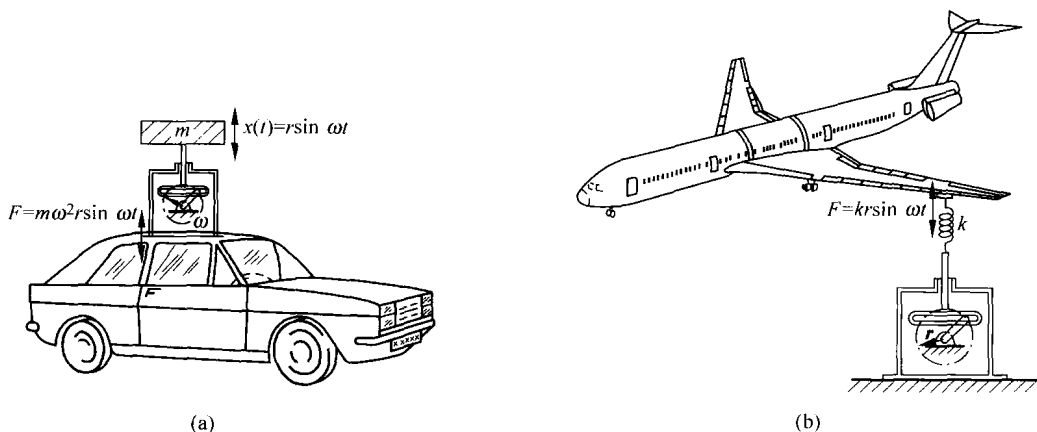


图 10.17 由惯性力和弹簧力引起的结构振动

由速度相同、方向相反的两个旋转质量产生的不平衡力也可以用来作为机械式激振器,如图 10.18。这种类型的振荡器可以产生 250~25 000 N 的载荷。如果两个不平衡质量的大小为 m , 绕半径为 R 的圆以角速度 ω 旋转, 则所产生的垂向力 $F(t)$ 由下式给出:

$$F(t) = 2mR\omega^2 \cos \omega t \quad (10.43)$$

而两个水平方向的分量相互抵消, 因此水平方向的合力为零。力 $F(t)$ 作用于与激振器相连的结构上。

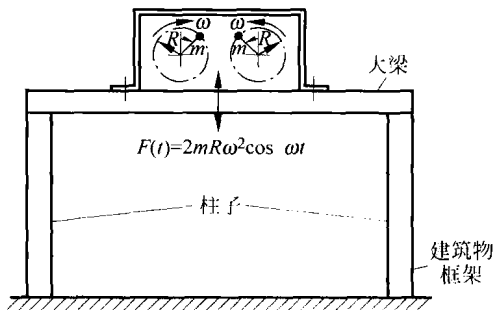


图 10.18 不平衡力引起的振动激励

10.5.2 电动式激振器

电动式激振器或称电磁式激振器的示意图如图 10.19(a)所示。正如 10.2.3 节所述,电动式激振器可以认为是与电动式传感器相反的装置。当电流通过置于磁场中的线圈时,产生一个与电流 I (单位为 A) 及磁通密度 D (单位为 T) 成比例的力 F (单位为 N), 这个力可以加速置于激振器工作台上的元件:

$$F = DIl \quad (10.44)$$

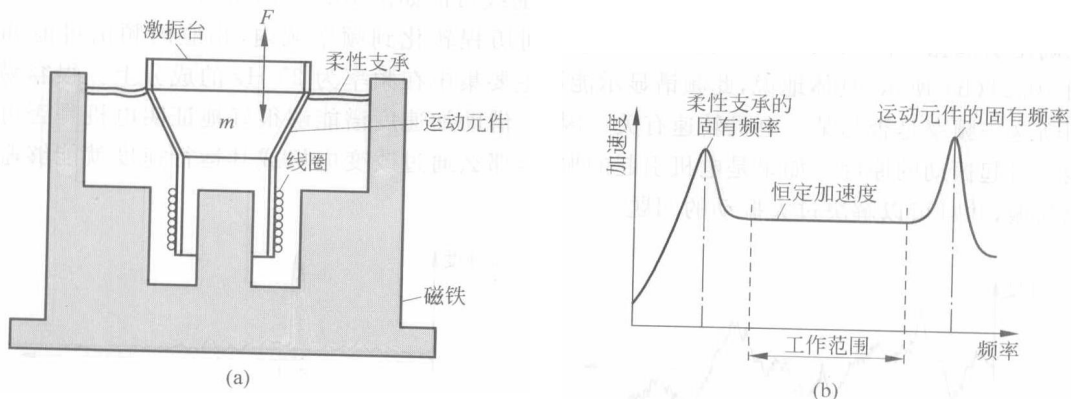


图 10.19 电动式激振器的结构和典型共振特性
(a) 结构; (b) 典型共振特性

式中, l 是线圈的长度, m 。小型激振器的磁场是由永久磁铁产生的, 而大型激振器用的是电磁铁。工作台或置于其上元件加速度的大小决定于最大电流和元件及激振器移动部件的质量。如果通过线圈的电流随着时间按简谐规律变化, 那么产生的力也按简谐规律变化。另一方面, 如果供给线圈的是直流电, 那么在激振器工作台上产生的是一个常力。如图 10.17(a), (b) 所示, 电动式激振器可以以惯性力或弹性力的方式使结构产生振动。

如图 10.19(a) 所示, 由于线圈和移动元件应该作直线运动, 所以它们是悬挂在柔性 (有非常小的刚度) 支承上的。因此, 电磁式激振器有两个固有频率: 一个与柔性支承相对应, 另一个与移动元件相对应, 这两个频率一般比较大。响应的两个共振频率如图 10.19(b) 所示。激振器的工作频率范围在两个共振频率之间。

电动式激振器可以产生的力为 30 000 N, 位移为 25 mm, 频率范围为 5 Hz~20 kHz。^[10.1] 图 10.20 所示为某一型号的电式激振器。

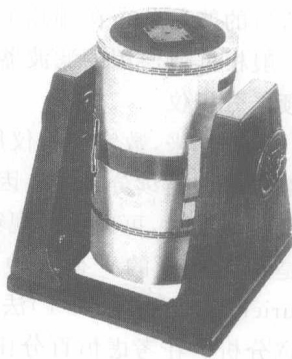


图 10.20 电动式激振器

10.6 信号分析

信号分析的目的就是为了确定某一系统在已知激励下的响应,并把它以一个方便的形式表示出来。通常情况下,系统响应的时间历程并不能给出很多有用的信息。然而,系统的频域响应却能够把能量集中的某一个或一个以上的离散频率显示出来。由于系统单个元件的动态特性常常是已知的,所以可以将那些特殊的频率成分(频率响应)与某一具体元件联系起来。^[10.3]

例如,承受过大振动的机身的加速度-时间曲线可能如图 10.21(a)所示。从这个图并不能确定引起振动的原因。如果将加速度的时间历程转化到频率域内,相应的频谱可能如图 10.21(b)所示。具体地说,此频谱显示能量主要集中在频率为 25 Hz 的成分上。很容易判断这一频率是否与某一电机转速有关。因此,借助加速度谱能够很好地证明电机是否可能是引起振动的原因。如果是电机引起的振动,那么通过改变电机或其运行速度就能够避免共振,并且可以解决过大振动的问题。

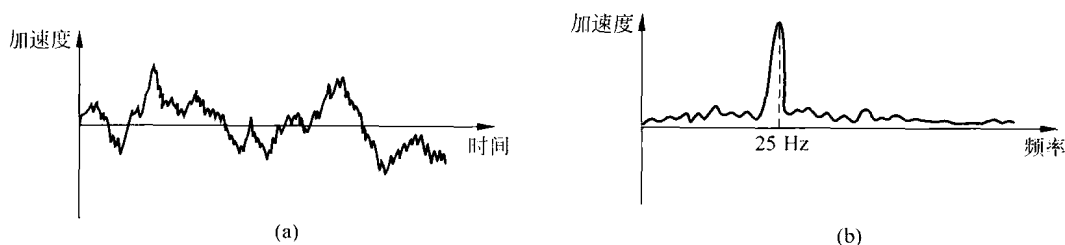


图 10.21 加速度曲线

10.6.1 频谱分析仪

频谱或频率分析仪可以用来进行信号分析。它们能在频率域内对信号进行分析,即识别信号的能量分布在哪几个不同的频带内。这种识别是由一组滤波器来完成的。频谱分析仪一般根据所使用的滤波器的种类分类。例如,如果使用倍频带滤波器,则频谱分析仪称为倍频带分析仪。

近些年来,数字分析仪用于实时信号分析已经十分普及。在实时频率分析中,信号是在全部频带内连续分析的。因此,计算过程未必比采集信号用的时间多。因为机器的运行状况发生变化时,可以同时观察到噪声或振动频谱的变化,所以实时分析对机器的健康状况监测是特别有用的。有两种类型的实时分析方法:数字滤波法和快速傅里叶变换(fast Fourier transform, FFT)法^[10.13]。前者最适合于恒百分比带宽分析,而 FFT 法最适合于恒带宽分析。在考虑恒百分比带宽分析与恒带宽分析的不同之前,首先讨论频谱分析仪的基本元件,即带通滤波器。

10.6.2 带通滤波器

带通滤波器只允许信号中在某一频带内的频率成分通过,而不允许信号的其他频率成分通过。例如,可以通过使用电阻器、电感器和电容器得到一个这样的带通滤波器。图 10.22 为

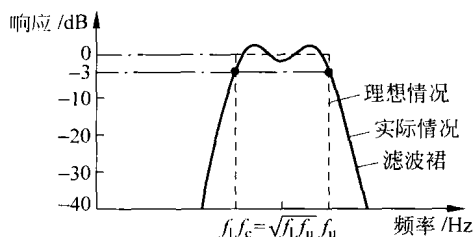


图 10.22 滤波器的响应

某一下截止频率为 f_1 和上截止频率为 f_0 的滤波器的响应特性。实际滤波器的响应特性都是偏离理想矩形的,如图 10.22 中的实线所示。一个好的带通滤波器,应该是在频带内的波动最小、响应特性曲线中的裙线很陡,以保证实际带宽接近理想值 $B=f_0-f_1$ 。对于一个实际滤波器,频率 f_1 和 f_0 称为截止频率,在此二值处,响应比平均带通响应低 3 dB^①。

在信号分析中,有两种类型的带通滤波器:恒百分比带宽滤波器和恒带宽滤波器。对于一个恒百分比带宽滤波器来说,带宽与中心频率的比例 $(f_0-f_1)/f_c$ 是一个常数。倍频程^②、半倍频程和 1/3 倍频程带通滤波器是恒百分比带宽滤波器的例子。表 10.1 是用在信号分析中的倍频程带的截止极限频率和中心频率。对于恒带宽滤波器来说,带宽 (f_0-f_1) 与中心频率 f_c (可调)无关。

表 10.1 截止频率和中心频率

Hz

下截止频率	5.63	11.2	22.4	44.7	89.2	178	355	709	1410
中心频率	8.0	16.0	31.5	63.0	125	250	500	1000	2000
上截止频率	11.2	22.4	44.7	89.2	178	355	709	1410	2820

10.6.3 恒百分比带宽滤波器和恒带宽滤波器

恒百分比带宽滤波器和恒带宽滤波器的主要不同在于各种带宽提供的细节不同。倍频程带通滤波器的上截止频率是下截止频率的 2 倍,它对机器中实际振动和噪声所提供的细节分析太少(分析太粗糙)。半倍频程带通滤波器给出 2 倍量的信息,但要求 2 倍量的时间来获得数据。可以选用具有一组倍频程和 1/3 倍频程滤波装置的频谱分析仪进行噪声分

① 一个物理量如功率 P 的分贝数定义为

$$\text{分贝数} = 10 \lg \frac{P}{P_{\text{ref}}}$$

式中, P 是功率的实际值, P_{ref} 是功率的参考值。

② 任意两个频率 f_2 和 f_1 的比为 2, 即 $f_2/f_1=2$ 时, 它们的差 f_2-f_1 所代表的区间称为倍频带。如果 $f_2/f_1=2^N$, 或 $N=\log_2 \frac{f_2}{f_1}$, 则称 f_1 和 f_2 相差 N 个倍频带, 其中 N 即可以是整数也可以是分数。如果 $N=1$, 即得所说的倍频带; 如果 $N=1/3$, 就得到一个 1/3 倍频带, 依此类推。

析,将每一个滤波器调谐到不同的中心频率就可以涵盖感兴趣的全部频率范围。由于当前滤波器的低截止频率等于前一个滤波器的高截止频率,所以复合滤波器特性如图 10.23 所示。图 10.24 所示是一个实时倍频程数字分析仪和分数倍频程数字分析仪。可以用恒带宽分析仪获得比恒百分比带宽分析仪更详细的分析结果,特别是在信号的高频范围内。当用于连续变化的中心频率时,恒带宽滤波器叫做波分析仪或差频振荡分析仪。它的恒带宽范围从 1 Hz 到几百赫兹不等。图 10.25 所示就是一个实际的差频振荡分析仪。

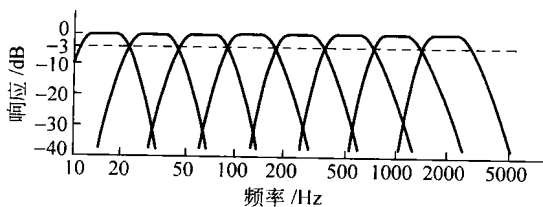


图 10.23 典型倍频程滤波器的响应特性

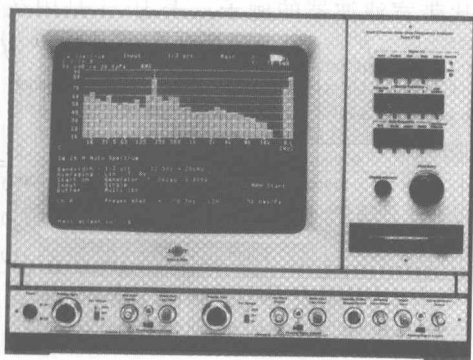


图 10.24 倍频程和分数倍频程数字分析仪(经 Bruel and Kjaer Instruments, Inc., Marlborough, Mass. 授权使用)

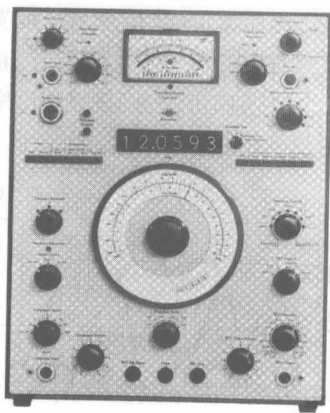


图 10.25 差频振荡分析仪(经 Bruel and Kjaer Instruments, Inc., Marlborough, Mass. 授权使用)

10.7 机械和结构的动态测试

机械或结构的动态测试包括确定机械或结构在极限频率下的变形。这可以通过以下两种方法实现。

10.7.1 测量运行时的变形

这种方法是在系统稳态(运行)频率下测量系统的受迫动态变形。为了测量,在机械或

结构的某些点上安装加速度计作为参考,另一个移动的加速度计安装在另外几个点上。如果有必要,还要安装在不同的方向上。当系统以稳态运转时,所有点处的加速度计幅值的大小以及移动加速度计和参考加速度计的相位差是可以测量的。通过对这些测量结果绘图,可以发现机器(结构)的各个部件之间存在怎样的相对运动以及它们的绝对运动如何。

这种测量仅在力/频率与运行状态有关时才是有效的。因此,不能得到在其他力和频率下的变形信息。然而测量变形可能是相当有用的。例如,如果发现某一个部件或局部有过度的变形,就可以增加那个部件或局部的刚度。这可以有效地增大系统的固有频率,使其在系统运转频率范围以外。

10.7.2 模态测试

因为机械或结构的任何动态响应都可以通过模态的组合得到,所以对模态形状、模态频率和模态阻尼比的了解就构成了对机械或结构的完整的动态描述。实验模态分析的过程在10.8节介绍。

10.8 实验模态分析

10.8.1 基本观点

实验模态分析也称为模态分析或模态测试,是通过振动测试来确定系统的固有频率、阻尼比和模态形状的。与模态分析有关的两个基本观点是:

(1) 一个结构、机械或任何系统受到激励时,若阻尼不是很大,当激振力的频率等于固有频率时,它的响应会由于共振产生一尖峰;

(2) 当激振力的频率经过结构或机械的固有频率时,响应的相位会发生 180° 的改变。共振时,响应与激励的相位差是 90° 。

10.8.2 所需仪器

测量振动需要有以下硬件:

- (1) 可以在结构或机械上产生输入力已知的激振器或振源。
- (2) 可以将结构或机械的物理运动转变成电信号的传感器。
- (3) 使传感器特性与数字数据采集系统的输入电信号相匹配的信号调理放大器。
- (4) 利用合适的软件进行信号处理和模态分析的分析仪。

1. 激振器

激振器可以是电磁振荡器或冲击锤。正如10.5.2节所述,电磁振荡器能够提供较大的

输入力,以便容易地测量响应。而且,如果是电磁型的,振荡器的输出是很容易控制的。激励信号通常是扫频正弦信号或随机信号。当输入为扫频正弦信号时,在感兴趣的特定频率范围内的许多离散频率上可以产生大小为 F 的简谐力。在每一个离散频率处,在测量响应的大小和相位之前应该使结构或机器达到稳态。如果振荡器固定在要测量的结构或机械上,那么振荡器的质量会影响测量的结果(称为**质量负载效应**)。因此,应该采取措施使振荡器的质量影响减到最小。通常振荡器是通过一个称为**衍条**的细短杆与结构或机械刚性地连接在一起,以使被测结构与振荡器分开,从而减小附加质量,并应使力沿衍条的轴线方向作用在结构或机械上。这也使得控制作用在结构或机械上的力的方向成为可能。

冲击锤是一种在其头部内嵌有一个力传感器的重锤,如例 4.4 和例 4.5 所示。用冲击锤敲击要测量的结构或机械,不仅可以产生较宽频率范围的激励,而且没有质量负载的影响。冲击锤产生的冲击力基本上与锤头的质量及冲击速度成正比,这一点可以从嵌在锤头内部的传感器知道。如 6.15 节所述,结构或机械对脉冲的响应包括与结构或机械的固有频率对应的各种频率成分。

虽然冲击锤简单、便携,价格比激振器低,使用方便,但它通常不能够产生足够大的能量以获得感兴趣的频率范围内的足够强的响应信号。同时,通过冲击锤控制作用力的方向也是比较困难的。图 10.26 是用冲击锤获得的结构或机械的典型频率响应特性曲线。该曲线的形状与锤和结构或机械的质量和刚度有关。通常频率激励范围是受截止频率 ω_c 限制的,这意味着结构或机械得不到足够的能量以激起频率超过 ω_c 的振型。一般将频率响应的值比最大值小 10~20 dB 所对应的频率定义为 ω_c 的大小。

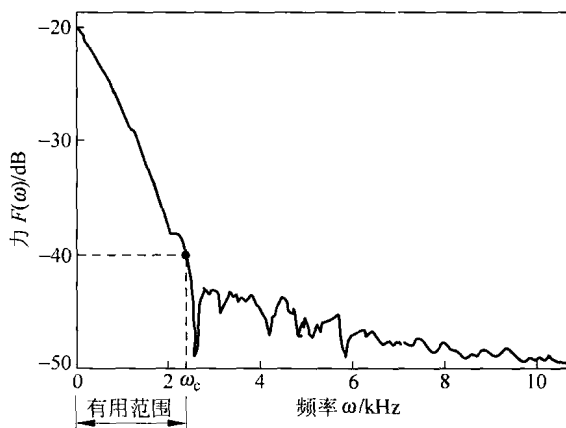


图 10.26 由冲击锤产生的脉冲的频响特性曲线

2. 传感器

在各类传感器中,压电传感器使用最为广泛(见 10.2.2 节)。通过设计,可以使压电传感器输出的信号与力或加速度成正比。在加速度计中,压电材料相当于一个刚性弹簧,使传

感器产生共振频率或固有频率。通常情况下,加速度计的最大可测量频率只是其固有频率的几分之一。如 10.2.1 节所述,也可以用应变片来测量结构或机械的振动响应。

3. 信号调理器

由于传感器的输出阻抗不适于直接输入给信号分析仪器,通常选用电荷放大器或电压放大器作为信号调理器,在对信号进行分析之前对信号进行梳理和放大。

4. 分析仪

响应信号在调理之后输入到分析仪进行信号处理。经常使用的分析仪是快速傅里叶变换(FFT)分析仪。这样的分析仪可以接受来自信号调理放大器、滤波器和数字转换器的模拟电压信号(可以代表位移、速度、加速度、应变或力)。它可以计算单个信号的离散频谱,也可以计算输入信号和输出信号之间的互相关谱。可以根据所分析的信号以数值或图形的形式确定固有频率、阻尼比和模态形状。

结构或机械系统实验模态分析的一般布置如图 10.27 所示。注意:所有的仪器在实验之前都应该校准。例如,力锤的内置式力传感器在每次使用前都应该进行动态校准。与此类似,也应对传感器和信号调理器的幅值和相位在感兴趣的频率范围内进行校准。

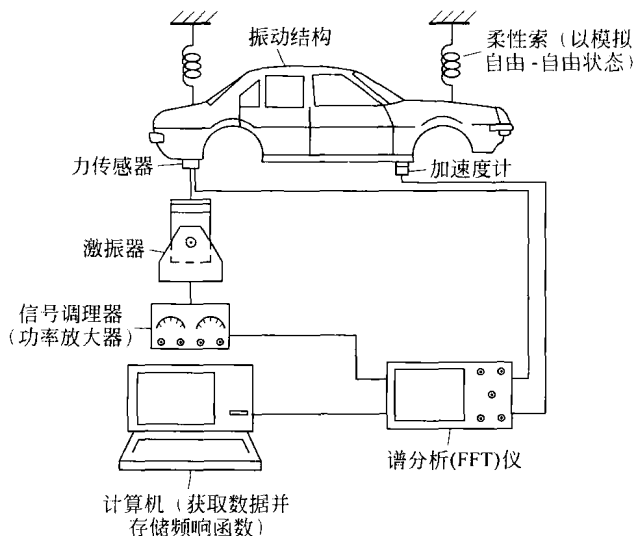


图 10.27 实验模态分析

10.8.3 数字信号处理

为便于进行数字运算,分析仪利用式(1.97)~式(1.99)所示的傅里叶级数关系,将模拟

的时域信号 $x(t)$ 转换成频域内的数字数据。即分析仪对来自加速度计或力传感器的模拟信号 $x(t)$, 利用式(1.97)~式(1.99)计算这些信号在频率域内的谱系数 a_0, a_n 和 b_n 。在图 10.28 中给出了两个代表性信号从模拟信号转化为数字信号的过程。图中, $x(t)$ 表示模拟信号, $x_i = x(t_i)$ 表示相应的数字信号, t_i 代表第 i 个离散时间的值。这个过程是由数字分析仪中的数/模(A/D)转化器实现的。如果 $x(t)$ 的 N 个值是在 N 个离散时间处给出的, 则根据这 N 个离散数据 $[x_1(t_i), x_2(t_i), \dots, x_N(t_i)]$ 所得到的离散傅里叶变换为

$$x_j = x(t_j) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{N/2} \left(a_i \cos \frac{2\pi i t_j}{T} + b_i \sin \frac{2\pi i t_j}{T} \right), \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (10.45)$$

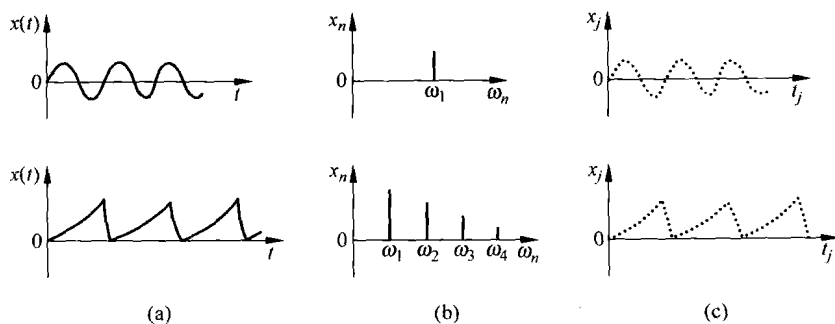


图 10.28 信号的不同表现形式

(a) 时间域; (b) 频率域; (c) 数字记录

式中, 系数 a_0, a_i 和 b_i 由下式给出(见式(1.97)~式(1.99)):

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j \quad (10.46)$$

$$a_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j \cos \frac{2\pi i t_j}{N} \quad (10.47)$$

$$b_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j \sin \frac{2\pi i t_j}{N} \quad (10.48)$$

样本 N 的数值等于 2 的指数次幂(如 256, 215 或 1024), 对于某给定的分析仪来说, 这是固定的值。式(10.46)~式(10.48)代表的 N 个代数方程可以用矩阵的形式表示为

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} \mathbf{d} \quad (10.49)$$

式中, $\mathbf{X} = \{x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N\}^T$ 是样本矢量; $\mathbf{d} = \{a_0 a_1 a_2 \ \dots \ a_{N/2} b_1 b_2 \ \dots \ b_{N/2}\}^T$ 是谱系数矢量; \mathbf{A} 是由式(10.47)和式(10.48)中的系数 $\cos \frac{2\pi i t_j}{T}$ 和 $\sin \frac{2\pi i t_j}{T}$ 构成的矩阵。信号或系统响应的频域信息可以根据下列解确定:

$$\mathbf{d} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{X} \quad (10.50)$$

这里, \mathbf{A}^{-1} 是分析仪利用快速傅里叶变换计算得到的。

10.8.4 随机信号分析

传感器测量的输入和输出数据中通常包含一些随机成分或噪声,这使得以确定性的方式对其进行分析变得比较困难。而且,在某些情况下进行振动测试时也会用到随机激励。因此在进行振动测试时,对随机信号进行分析也是必要的。如图 10.29 所示,如果 $x(t)$ 是一个随机信号,其平均值 \bar{x} 的定义为^①

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_0^T x(t) dt \quad (10.51)$$

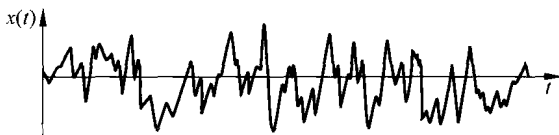


图 10.29 随机信号的波形

对于数字信号来说,此式可以表示为

$$\bar{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x(t_j) \quad (10.52)$$

对应于任意随机信号 $y(t)$,总可以定义一个新的变量 $x(t) = y(t) - \bar{y}(t)$,从而使 $x(t)$ 的平均值为零。因此,不失一般性,假定信号 $x(t)$ 的均值为零,定义 $x(t)$ 的均方值或方差 $\bar{x}^2(t)$ 为

$$\bar{x}^2(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \quad (10.53)$$

对于数字信号来说,上式变为

$$\bar{x}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x^2(t_j) \quad (10.54)$$

$x(t)$ 的均方根值定义为

$$x_{\text{rms}} = \sqrt{\bar{x}^2} \quad (10.55)$$

随机信号 $x(t)$ 的自相关函数 $R(t)$ 是其在时域内变化快慢的量度,其定义为

$$R(t) = \bar{x^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(\tau) x(\tau + t) d\tau \quad (10.56)$$

对于数字信号来说,上式可以写为

$$R(n, \Delta t) = \frac{1}{N-n} \sum_{j=0}^{N-n} x_j x_{j+n} \quad (10.57)$$

^① 有关随机信号(过程)和随机变量的详细讨论见第 12 章。

这里, N 是样本数; Δt 是采样间隔; n 是可调整参数, 用来控制计算点的数量。可以看出, $R(0)$ 表示 $x(t)$ 的均方值 \bar{x}^2 。自相关函数可以用来识别随机信号中的周期性成分。如果 $x(t)$ 是纯粹的随机信号, 那么当 $T \rightarrow \infty$ 时 $R(t) \rightarrow 0$ 。然而, 如果 $x(t)$ 是周期性的或有一个周期性的成分, 那么 $R(t)$ 也将是周期性的。

随机信号 $x(t)$ 的功率谱密度(power spectral density, PSD)记为 $S(\omega)$, 是信号在频域内变化快慢的量度, 其定义为 $R(t)$ 的傅里叶变换, 即

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (10.58)$$

对于数字信号来说, 上式可以表示为

$$S(\Delta\omega) = \frac{|x(\omega)|^2}{N\Delta t} \quad (10.59)$$

式中, $|x(\omega)|^2$ 代表 $x(t)$ 的采样数据的傅里叶变换的大小。自相关函数和功率频谱密度函数的定义可以推广到两个不同信号的情况, 例如位移信号 $x(t)$ 和作用力信号 $f(t)$ 。这就是互相关函数 $R_{xf}(t)$ 和互相关功率谱密度函数 $S_{xf}(\omega)$:

$$R_{xf}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(\tau) f(\tau+t) d\tau \quad (10.60)$$

$$S_{xf}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xf}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (10.61)$$

式(10.60)和式(10.61)可以用来确定被测结构或机械的传递函数。在式(10.60)中, 如果用 $x(\tau+t)$ 代替 $f(\tau+t)$, 可以得到 $R_{xx}(t)$ 。同样, 在式(10.61)中, 用 $x(\tau+t)$ 代替 $f(\tau+t)$, 可以得到 $S_{xx}(\omega)$ 。频率响应函数 $H(i\omega)$ 与功率谱密度函数的关系为

$$S_{xx}(\omega) = |H(i\omega)|^2 S_{ff}(\omega) \quad (10.62)$$

$$S_{fx}(\omega) = H(i\omega) S_{ff}(\omega) \quad (10.63)$$

$$S_{xx}(\omega) = H(i\omega) S_{xf}(\omega) \quad (10.64)$$

式中, $f(t)$ 和 $x(t)$ 分别表示随机的力输入和相应的输出。式(10.62)定义的 $S_{xx}(\omega)$ 包括了系统(结构或机械)传递函数的大小信息, 而式(10.63)和式(10.64)定义的 $S_{fx}(\omega)$ 和 $S_{xx}(\omega)$ 则同时包括了传递函数的大小和相位信息。在进行振动测试时, 频谱分析仪首先根据传感器的输出计算谱密度函数, 然后通过式(10.63)和式(10.64)计算系统的频率响应函数 $H(i\omega)$ 。

相干函数 β 用来量度测试信号中的噪声, 其定义如下:

$$\beta(\omega) = \frac{S_{fx}(\omega) S_{xf}(\omega)}{S_{ff}(\omega) S_{xx}(\omega)} = \frac{|S_{xf}(\omega)|^2}{S_{xx}(\omega) S_{ff}(\omega)} \quad (10.65)$$

注意: 如果测量的 x 和 f 是纯噪声, 那么 $\beta=0$ 。如果测量的 x 和 f 不含任何噪声, 那么 $\beta=1$ 。典型的相干函数如图 10.30 所示。一般来说, 在系统的固有频率附近 $\beta \approx 1$, 因为此时信号比较强, 并且受噪声的影响很小。

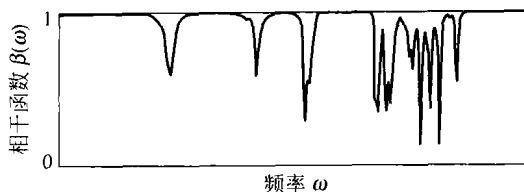


图 10.30 一个典型的相干函数

10.8.5 从观察到的峰值确定模态数据

根据式(10.63)或式(10.64)计算出的频率响应函数 $H(i\omega)$, 可以用来确定与频响函数曲线中观察到的全部共振峰对应的系统的固有频率、阻尼比和模态。例如, 假设频响函数如图 10.31 所示, 共有 4 个共振峰, 则说明测试系统可以用一个四自由度系统来模拟。有时确定系统的自由度数很困难, 尤其是频率响应函数曲线中的共振峰比较接近时。频率响应函数曲线可以通过下面的方法确定: 在结构或机械的特殊点处作用频率可调的简谐力, 在另一点处测量响应(如位移), 再利用方程(10.63)或方程(10.64)得到频率响应函数的值。根据 $H(i\omega)$ 在一系列不同简谐力频率处的值, 就可以作出与图 10.31 类似的频率响应函数曲线。

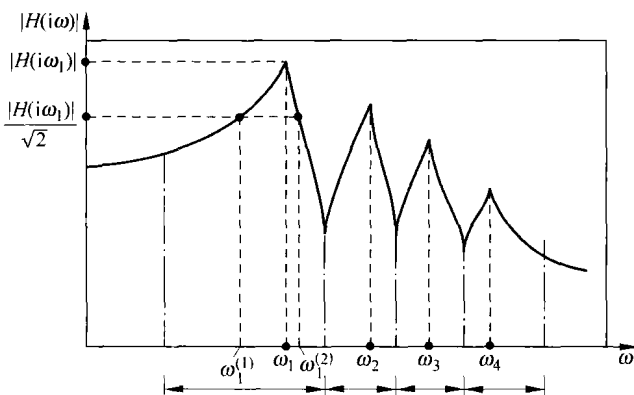


图 10.31 一个典型的频响函数

得到模态数据的简单方法之一是单自由度法。在这种方法中, 频率响应函数曲线被分成几个频率范围, 且在每一个范围内有一个峰值, 如图 10.31 所示。这样, 可以认为每一个频率范围为单自由度系统的频率响应函数。这表明, 在每一个频率范围内的频率响应函数是由特定的单一模态决定的。正如 3.4 节所述, 每一个峰值对应着一个相角为 90° 的共振点。因此可以通过频响函数曲线上的峰值来识别共振频率, 这可以通过观察每一个峰值处的相角是否为 90° 得到验证。图 10.31 中, 对应于共振频率为 ω_j 的第 j 个峰值的阻尼比表

示模态阻尼比 ζ_j 。由式(3.45)得到该阻尼比为

$$\zeta_j = \frac{\omega_j^{(2)} - \omega_j^{(1)}}{2\omega_j} \quad (10.66)$$

式中, $\omega_j^{(1)}$ 和 $\omega_j^{(2)}$ 是半功率点, 它们分布在共振频率 ω_j 的两侧, 并满足下列关系:

$$|H(i\omega_j^{(1)})| = |H(i\omega_j^{(2)})| = \frac{|H(i\omega_j)|}{\sqrt{2}} \quad (10.67)$$

注意: ω_j 实际上代表测试系统的有阻尼固有频率。然而, 当阻尼比较小时, ω_j 可以认为近似等于系统的无阻尼固有频率。当测试系统可以近似为一个 k (对应于图 10.31 的系统 $k=4$) 自由度系统时, 频响函数曲线上的每一个峰值可以认为对应着一个单自由度系统。通过重复上述步骤(用方程(10.66)) k 次, 可以确定 k 个共振频率(峰值)及对应的阻尼比。

例 10.5 某单自由度系统响应的幅值和相角随频率的变化即频响函数如图 3.11 所示。如果不是直接处理频响函数曲线, 而是纵轴采用幅值比的对数(单位为 dB), 则绘制的曲线称为波特图。根据图 10.32 所示的波特图确定系统的固有频率和阻尼比。

解: 从图中可以看出, 对应于系统峰值响应的固有频率大概是 10 Hz, 响应的峰值为 -35 dB。对应于半功率点 ω_1 和 ω_2 的响应大小等于 0.707 倍的峰值。根据图 10.32, 可以确定半功率点为 $\omega_1=9.6$ Hz 和 $\omega_2=10.5$ Hz。因此, 可以用方程(10.66)确定阻尼比为

$$\zeta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_n} = \frac{10.5 - 9.6}{2 \times 10.0} = 0.045$$

本节介绍的确定模态参数的过程基本上是一个可视化方法。10.8.6 节将介绍一种更系统的基于计算机的方法, 它可以通过分析仪以及适当的编程来实现。

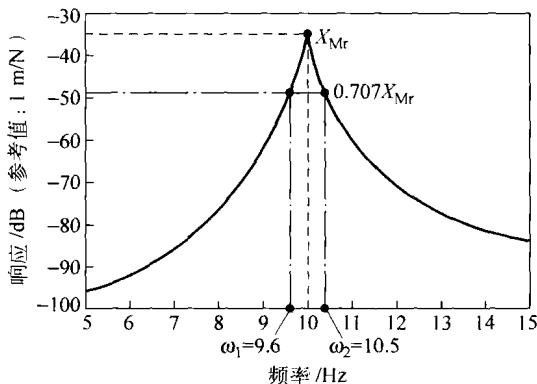


图 10.32 波特(Bode)图

10.8.6 根据奈奎斯特图确定模态数据

上面的方法实际上是认为在频率响应函数中, 在固有频率附近只有单一模态在起主要

作用。对单自由度系统而言,当分别用横、纵坐标表示其在某一频率范围内的频率响应函数(由式(3.54)给出)的实部和虚部时,所得图形将是一个圆,称为奈奎斯特(Nyquist)圆或奈奎斯特图。式(3.54)给出的频率响应函数可以写为

$$\alpha(i\omega) = \frac{1}{1 - r^2 + i2\zeta r} = u + iv \quad (10.68)$$

式中

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} \quad (10.69)$$

$$u = \alpha(i\omega) \text{ 的实部} = \frac{1 - r^2}{(1 - r^2)^2 + 4\zeta^2 r^2} \quad (10.70)$$

$$v = \alpha(i\omega) \text{ 的虚部} = \frac{-2\zeta r}{(1 - r^2)^2 + 4\zeta^2 r^2} \quad (10.71)$$

在进行振动测试时,分析仪能够根据其驱动频率 ω 计算相应的测量数据的 $u = \text{Re } \alpha$ 和 $v = \text{Im } \alpha$ 的值。对于大的阻尼值 ζ ,奈奎斯特图近似于一个圆;随着阻尼越来越小,可以假设其形状接近于一个圆,如图 10.33 所示。

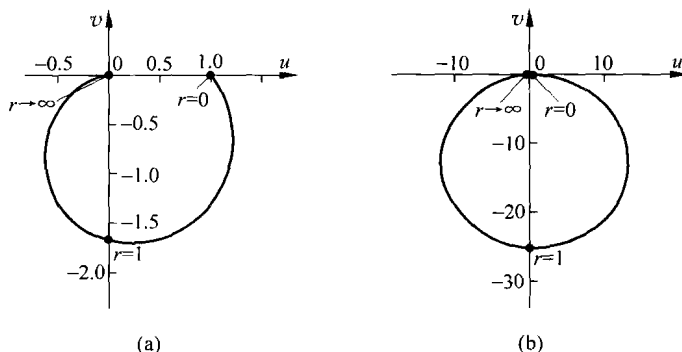


图 10.33 奈奎斯特圆
(a) 大阻尼比; (b) 小阻尼比

在说明奈奎斯特圆的特性时,首先观察到在共振即 $r=1$ 附近时可得到较大的 u 和 v 的值。在这一区域,可以对式(10.70)和式(10.71)中的 $(1-r^2)$ 作如下近似:

$$1 - r^2 = (1+r)(1-r) \approx 2(1-r), \quad 2\zeta r \approx 2\zeta$$

所以

$$u = \text{Re } \alpha \approx \frac{1-r}{2[(1-r)^2 + \zeta^2]} \quad (10.72)$$

$$v = \text{Im } \alpha \approx \frac{-\zeta}{2[(1-r)^2 + \zeta^2]} \quad (10.73)$$

很容易证明,由式(10.72)和式(10.73)表示的 u 和 v 满足如下关系:

$$u^2 + \left(v + \frac{1}{4\zeta}\right)^2 = \left(\frac{1}{4\zeta}\right)^2 \quad (10.74)$$

该方程所表示圆的圆心坐标为 $\left(u=0, v=-\frac{1}{4\zeta}\right)$, 半径为 $\frac{1}{4\zeta}$ 。半功率点 $r=1 \pm \zeta$ 对应着

$u = \pm \frac{1}{4\zeta}$ 和 $v = \frac{1}{4\zeta}$, 这两个点在圆的水平直径的两端点处, 此时 u 取得最大值。

这些结果可以用来确定 ω_n ($r=1$) 和 ζ 。一旦得到某一驱动频率范围内的频率响应函数 $H(i\omega)$ 的测量值 (作用力的大小固定), 而不是寻找频率响应函数曲线的峰值, 就可以通过最小二乘法拟合一个圆来绘制奈奎斯特图, 即 $\operatorname{Re} H(i\omega) - \operatorname{Im} H(i\omega)$ 曲线。这个过程还可以求出实验误差的平均值。拟合的圆与虚轴的负半轴的交点对应着 $H(i\omega_n)$ 。从水平直径两端点处的频率的差值可以得到带宽 $(\omega^{(2)} - \omega^{(1)})$, 据此可以求出 $\zeta = \frac{\omega^{(2)} - \omega^{(1)}}{2\omega_n}$ 的值。

10.8.7 模态形状的测量

为了根据测量结果确定模态形状, 需要用模态坐标来表示多自由度系统的运动微分方程。为此, 首先考虑无阻尼的情况。

1. 多自由度无阻尼系统

用物理坐标表示的无阻尼多自由度系统的运动微分方程的形式为

$$m \ddot{x} + kx = f \quad (10.75)$$

对于简谐自由振动, 方程(10.75)变为

$$(k - \omega_i^2 m) y_i = 0 \quad (10.76)$$

式中, ω_i 为第 i 阶固有频率; y_i 是对应的模态。模态的正交性可以表示为

$$Y^T m Y = \operatorname{diag} M = [M_i] \quad (10.77)$$

$$Y^T k Y = \operatorname{diag} K = [K_i] \quad (10.78)$$

式中, Y 是以模态 y_1, y_2, \dots, y_N 作为列的模态矩阵 (N 表示系统的自由度数, 也等于测量的固有频率或峰值数); M_i 和 K_i 分别是对角阵 M 和 K 的元素, 也称为对应于第 i 阶模态的模态质量和模态刚度, 且

$$\omega_i^2 = \frac{K_i}{M_i} \quad (10.79)$$

当激励函数是简谐函数时, 可以表示为 $f(t) = F e^{i\omega t}$, 其中 $i = \sqrt{-1}$ 。由方程(10.75)得

$$x(t) = X e^{i\omega t} = (k - \omega^2 m)^{-1} F e^{i\omega t} \equiv \alpha(\omega) F e^{i\omega t} \quad (10.80)$$

$\alpha(\omega)$ 称为系统的频率响应函数或响应矩阵。根据式(10.77)和式(10.78), $\alpha(\omega)$ 可以表示为

$$\alpha(\omega) = Y [K - \omega^2 M]^{-1} Y^T \quad (10.81)$$

矩阵 $\alpha(\omega)$ 的第 p 行第 q 列元素表示由简谐力 F_q (没有其他力)引起的响应 X_p 。其又可以写为

$$\alpha_{pq}(\omega) = [\alpha(\omega)]_{pq} = \frac{X_p}{F_q} \bigg|_{F_j=0, j=1,2,\dots,N, j \neq q} = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i)_p (y_i)_q}{K_i - \omega^2 M_i} \quad (10.82)$$

式中, $(y_i)_j$ 表示第 i 阶模态的第 j 个元素。如果模态矩阵 Y 进一步正则化为

$$\Phi \equiv [\phi^{(1)} \phi^{(2)} \dots \phi^{(N)}] = Y M^{-1/2} \quad (10.83)$$

模态 $\phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \dots, \phi^{(N)}$ 的形状将不会改变,但式(10.82)变为

$$\alpha_{pq}(\omega) = \sum_{i=1}^N \frac{(\phi_i)_p (\phi_i)_q}{\omega_i^2 - \omega^2} \quad (10.84)$$

2. 多自由度有阻尼系统

用物理坐标表示的有阻尼多自由度系统的运动微分方程为

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = f \quad (10.85)$$

为简化,假设系统存在比例阻尼,即阻尼矩阵可以表示为

$$c = ak + bm \quad (10.86)$$

式中, a 和 b 是常数。无阻尼系统的模态 $y^{(i)}$ 和 $\phi^{(i)}$ 不仅可以是将质量矩阵和刚度矩阵对角化,如式(10.77)和式(10.78)所示,而且也可以将阻尼矩阵对角化,即

$$Y^T c Y = \text{diag} C = [C_i] \quad (10.87)$$

因此,阻尼系统的模态形状将会与无阻尼系统的模态形状一样,但是固有频率将会改变,而且一般来说变化比较复杂。当假设式(10.85)中的力均为简谐函数时,可以推得频率响应函数的表达式为

$$\alpha_{pq}(\omega) = [\alpha(\omega)]_{pq} = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i)_p (y_i)_q}{K_i - \omega^2 M_i + i \omega C_i} \quad (10.88)$$

当采用关于质量正交的正则模态时(见方程(10.83)), $\alpha_{pq}(\omega)$ 变为

$$\alpha_{pq}(\omega) = \sum_{i=1}^N \frac{(\phi_i)_p (\phi_i)_q}{\omega_i^2 - \omega^2 + 2i \zeta_i \omega_i \omega} \quad (10.89)$$

式中, ζ_i 是第 i 阶模态的阻尼比。

如前所述,矩阵 $\alpha(\omega)$ 的第 p 行第 q 列元素 $\alpha_{pq}(\omega) = [\alpha(\omega)]_{pq}$ 表示被测系统在点 p 处的位移或响应 X_p 和点 q 处的输入 F_q (其他各点处力均为零)之间的传递函数。因为传递函数表示比值 $\frac{X_p}{F_q}$,它一般用 $H_{pq}(\omega)$ 表示,因此

$$\alpha_{pq}(\omega) = H_{pq}(\omega) \quad (10.90)$$

如果能够很好地将系统的峰值或共振(固有)频率分散开来,那么式(10.88)或式(10.89)中对应于特定峰值(第 i 峰值)的项与其他项相比将处于主导地位。在式(10.89)中令 $\omega = \omega_i$,于是得到

$$\alpha_{pq}(\omega_i) = H_{pq}(\omega_i) = \frac{(\phi_i)_p(\phi_i)_q}{\omega_i^2 - \omega^2 + i\tilde{2}\zeta_i\omega_i^2}$$

或者

$$|\alpha_{pq}(\omega_i)| = |H_{pq}(\omega_i)| = \frac{|(\phi_i)_p(\phi_i)_q|}{2\zeta_i\omega_i^2}$$

即

$$|(\phi_i)_p(\phi_i)_q| = 2\zeta_i\omega_i^2 |H_{pq}(\omega_i)| \quad (10.91)$$

从式(10.91)可以看出,根据所测得的第 i 个峰值处的固有频率 ω_i 、阻尼比 ζ_i 和传递函数 $|H_{pq}(\omega_i)|$ 就可以计算 $(\phi_i)_p(\phi_i)_q$ 的绝对值。可以根据 $H_{pq}(\omega_i)$ 的相图确定元素 $(\phi_i)_p(\phi_i)_q$ 的正负号。因为在 N^2 个矩阵元素 $[(\phi_i)_p(\phi_i)_q] = [\phi_i \phi_i^T]_{pq}$ 中,只有 N 个未知元素是互不相关的,所以需要 $|H_{pq}(\omega_i)|$ 的 N 个测量值来确定对应于振型频率 ω_i 的振型 ϕ_i 。这可以通过在 q 点处分别测量首先在 1 点输入,其次在 2 点输入, ..., 最后在 N 点输入时的系统位移或响应实现。

10.9 机器运行状态监测与诊断

当设计合理时,大多数机器都只会引起不太剧烈的振动。在运行过程中,所有的机器都会受到疲劳、磨损、变形和地基下沉的影响。这些影响会使配合零件之间的间隙和轴的不平行度增大,转子的不平衡加剧,并会增大机械零件产生初始微裂纹的可能。这些都会导致振动强度的增加,从而对轴承产生附加的动力载荷。随着运行时间的延长,振动强度会继续提高,最终导致机器的故障或破坏。引起机器振动强度增加的故障或运转状态一般包括轴的弯曲和偏心、零件的不对中和不平衡、轴承故障、齿轮故障、叶轮叶片故障和机械零件的松动等。

10.9.1 振动强度标准

一些标准如 ISO 2372 给出的振动强度图表可以作为确定机器运行状态的指导。大多数情况下,是将机器振动速度的均方根值与标准中规定的值进行比较。虽然执行这个过程很简单,但是用于作比较的全部速度信号可能不会对机器即将发生的破坏给出足够的警告。

10.9.2 设备检修技术

机器的寿命符合图 10.34 所示的浴盆曲线。因为机器故障通常会以引起振动或噪声级别的增加为特征,振动级别也符合同样的浴盆曲线。在最初的磨合阶段,振动级别会逐渐下降。在正常的运行阶段,由于正常的磨损,振动级别会缓慢增加,最后因为过度磨损,振动级别会迅速增加直到在磨损期发生失效或故障。

在工程实际中,通常采用如下 3 种检修方案:

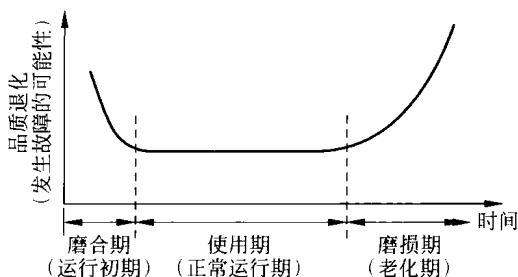


图 10.34 机器寿命的浴盆曲线

(1) 事后检修。机器设备允许报废,当报废时就只能用新设备来代替。如果替换机器的价格低廉或并不会引起其他破坏时,就可以采用这种策略。否则,如果存在因停工引起的巨大损失,或由此带来安全方面的风险以及连带对其他机器造成破坏时,这种策略就是不可接受的。

(2) 定期检修。在固定的时间(如工作 3000 小时或 1 年)进行一次检修。合适的检修周期可以根据基于以前经验的统计数据来确定。虽然这种方法可以降低预料不到的故障发生的概率,但却是不经济的。因为检修时不仅损失生产时间,而且还要冒着由于人为原因产生差错的风险。除此之外,在正常磨损期,用新零件代替旧零件并不会降低其发生故障的可能性。

(3) 基于运行状态的检修。在固定的时间间隔内对设备进行测试,以代替在固定的时间间隔内对设备进行检修,从而定期观察机器运转状况的改变。因此,可以在初期就检测到运行故障并密切跟踪其发展情况。可以对测量的振动级别进行外推,以预测在什么时候振动的级别将达到不能接受的程度,以及在什么时候必须对设备进行检修。因此这种方法也称为**预测性检修**。采用这种方法时,由于可以减少突发性事故,能够较好地利用备用零件以及排除不必要的预防性检修,所以可以使得检修费用大幅降低。基于运行状态对设备进行检修时,机械设备的振动级别(亦即发生故障的可能性)随时间的变化规律如图 10.35 所示。

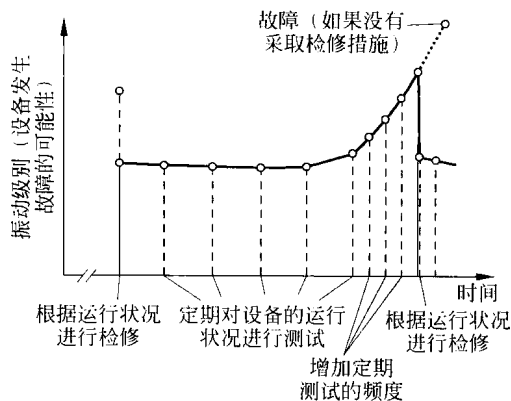


图 10.35 基于运行状况的设备检修

10.9.3 机械运行状况监测技术

如图 10.36 所示,有几种方法可以用来监测机械的运行状况。听和看是监测机械运行状况的基本形式,一个熟练的技术人员,具有丰富的关于设备运行状况的知识,仅仅通过听机械运转产生的声音或观察设备振动幅度的大小就可以确定设备的运行状况是否正常。有时还可以借助扩音器或闪光测频仪听机械产生的噪声。与此类似,可以利用放大镜或闪光测频仪观察机械的运行状态。可以利用对电流或电压的监测对电气设备如大型发电机和电动机的运行状态进行监测。

运行变量监测法(也称为性能或运行循环监测),是将观测到的机械性能与期望的运行值进行比较。与预期性能的任何偏离,都意味着机械的运行出现了故障。温度监测包括测量机械运转或表面的温度。这种方法可以认为是一种运行变量监测法。由于磨损所致零件温度的迅速上升,在大多数情况下,往往意味着设备故障,例如滑动轴承的润滑不好。温度检测经常使用的仪器包括光学测温计、热电偶、热分析仪、电阻温度计等。在有些情况下,使用染料渗透剂来确认机器表面出现的裂纹。此时,需要使用热敏涂料(也叫示热涂料)来检测热表面的裂纹。在这些情况下,需要选出与预计表面温度相匹配的涂料。

在承载机械零件的相对运动表面上会产生磨损碎片。在润滑油或润滑脂中发现的磨粒,可以用来估计损坏程度。随着磨损程度的增加,构成机器零件(如轴承和齿轮)材料的颗粒会不断增加。因此,可以通过观察磨粒的多少、尺寸、形状和颜色来估计机器的磨损程度。注意:磨粒的颜色可以说明它们曾达到的温度。

振动分析也广泛应用于机器运行状态监测。引起机械振动的因素有由于不平衡引起的周期性激励力、磨损或零件的故障。振动的强度会发生何种改变?这些改变如何进行检测?如何根据检测的数据说明机械的运行状态?这些在过去曾经是许多研究关注的课题。可用于振动监测的技术分类如图 10.37 所示,这些技术将在接下来的章节进行讨论。

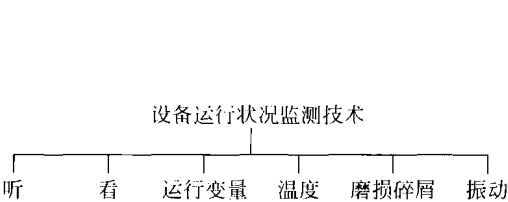


图 10.36 设备运行状况监测技术

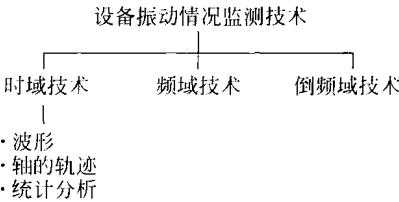


图 10.37 设备振动情况监测技术

10.9.4 振动监测技术

1. 时域分析

(1) 时域波形。时域分析是利用信号(波形)的时间历程来进行的。信号存储在示波器

或实时分析仪中,任何非稳态或瞬态脉冲都可以记录下来。不连续的损坏,如齿轮轮齿的损坏、轴承内圈或外圈的裂纹,都很容易通过变速箱外壳的波形来确认。例如,图 10.38 显示的是一个单级变速箱的加速度信号。小齿轮装在功率为 5.6 kW、转速为 2865 r/min 的交流电动机轴上。因为小齿轮的转速是 2865 r/min 或 47.75 Hz,周期就可以认为是 20.9 ms。加速度的波形表明,信号中的脉冲是周期性出现的,周期大约为 20 ms。注意到这个周期与小齿轮的周期近似相等,因而可以判断加速度信号中的脉冲可能是由于小齿轮的轮齿损坏造成的。

(2) 指标。在某些情况下,进行设备运行状态监测时,可以用如峰值大小、均方根值大小和波峰因素等指标来确认机器设备的损坏。由于峰值只出现一次,它不是一个统计量,因此,并不是一个检测连续运转系统是否发生破坏的可靠指标。虽然均方根值在应用于检测稳态过程是否发生损坏时是一个比较好的指标,但是如果信号包含的信息来自多个零件,如由几个齿轮、轴、轴承组成的整个齿轮箱的振动情况,那么这个值可能是没用的。波峰因素定义为峰值与均方根值的比,虽然它同时包含了峰值与均方根值的信息,但也可能无法确定某些情况下的故障。例如,如果故障是逐渐发生的,那么均方根值的大小可能是逐渐增加的,但波峰因素的大小却呈逐渐下降的趋势。

(3) 轨迹。有时,可以通过显示从两个传感器输出的时域波形(相位变化 90°)得到称为李萨茹(Lissajous)图的特性曲线。这些特性曲线或轨迹模式的任何改变,都可以用来确定如轴未对中、轴的不平衡、轴的摩擦、滑动轴承的磨损和润滑轴承的流体动力不稳定性等故障。图 10.39 显示的是由于轴承磨损引起的轨迹的变化。轨迹直径在竖直方向的变大表明轴承在水平方向的硬度变大,即在竖直方向轴承的间隙变大。

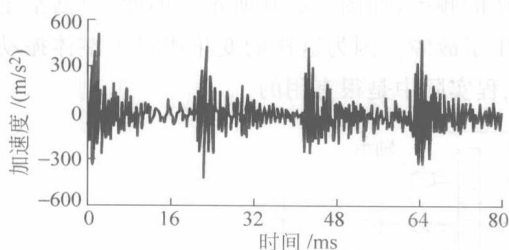


图 10.38 故障齿轮箱的时域波形

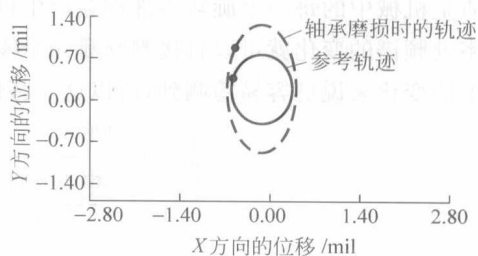


图 10.39 由于轴承磨损引起的轨迹变化

2. 统计分析

所有振动信号的概率密度曲线都有其特有的形状。信号的概率密度可以定义为其瞬时振幅发生在某一区间内的概率除以该区间的长度。通常情况下,与完好零件对应的波形的概率密度曲线是与正态分布的概率密度曲线类似的钟形曲线。因此,任何与钟形曲线有严重偏差的概率密度曲线,都可以认为是与零件的故障有关。由于使用概率密度曲线涉及形

状的变化而不是振幅的变化,因此这对诊断机械故障是非常有用的。

可以利用概率密度曲线的矩来对机械设备的运行状态进行监测。这些矩的定义与该曲线围成的面积对于其形心轴的矩的定义类似。经常使用的概率密度曲线(经过适当的规范化)的矩分别为平均值、标准差、非对称性和峭度。对于实际测试信号,奇数阶矩通常接近零,而偶数阶矩表示信号的冲击。四阶矩即峭度一般用于机械设备的运行状态监测。峭度的定义为

$$k = \frac{1}{\sigma^4} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^4 f(x) dx \quad (10.92)$$

式中, $f(x)$ 是 t 时刻瞬态振幅 $x(t)$ 的概率密度函数; \bar{x} 是平均值; σ 是 $x(t)$ 的标准差。轴承内外圈的破裂以及球或滚柱的破碎等故障,会在信号的时域波形中引起比较大的脉冲,即会导致较大的峭度。因此,峭度的变大可以认为是机器零件发生故障的结果。

3. 频域分析

频域信号或频谱是振动响应的幅值与频率的关系曲线,可以通过对时域波形进行数字快速傅里叶分析得到。它能够提供关于机械设备运行状态的有用信息。机械的振动响应不仅与其零件有关,而且与装配和安装等因素有关。因此,任何机械的振动特性在某种程度上都具有唯一性,是与特定的运行条件相对应的。故振动的频谱可以看作是机械振动特征的标示。只要激振力是常值或变化比较小,那么测得的振动强度也应保持常值或有比较小的变化。然而,随着机械开始出现故障,它的振动强度以及频谱的形状就会发生变化。通过将故障状态下机械的频谱与正常状态下的频谱进行比较,就可以判断故障的性质和位置。频谱的另一个重要性质是机械中的每一个旋转零件都会产生可以辨认的频率,如图 10.40 所示。因此,根据给定频率处频谱的变化就可以直接判断哪一个零件发生了故障。因为这样的变化相对于整体振动强度的变化来说更容易检测到,所以这一特性在工程实际中是很有用的。

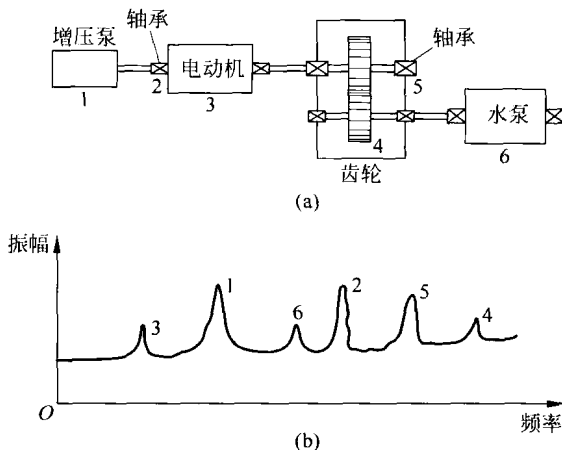


图 10.40 机械零件与振动谱之间的关系

因为频谱中的峰值是与各种机器零件相关的,所以计算故障频率是十分必要的。可以利用相关的公式计算常用零部件如轴承、变速箱、水泵、风扇和滑轮等的故障频率。类似地,可以用某些典型的故障状态来描述常见的故障,如不平衡、不对中、松动、油膜涡动和共振等。

4. 倒频域分析

以倒频作为横坐标(x 轴)所得的频谱称为倒频谱,这与以频率作为横坐标所得到的频谱是类似的。在已知的参考文献中,倒频谱并没有一个统一的定义。最初,倒频谱定义为对数功率谱的功率谱。如果 $x(t)$ 代表时间信号,它的功率谱 $S_X(\omega)$ 由下式给出:

$$S_X(\omega) = |F\{x(t)\}|^2 \quad (10.93)$$

式中, $F\{\quad\}$ 表示 $\{\quad\}$ 的傅里叶变换,有

$$F\{x(t)\} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{i\omega t} dt \quad (10.94)$$

因此,倒频谱 $c(\tau)$ 为

$$c(\tau) = |F\{\lg S_X(\omega)\}|^2 \quad (10.95)$$

后来,倒频谱被定义为对数功率谱的傅里叶逆变换,所以 $c(\tau)$ 为

$$c(\tau) = F^{-1}\{\lg S_X(\omega)\} \quad (10.96)$$

倒频谱(cepstrum)一词是将频谱(spectrum)中的字母重新排列得到的。这一联系的原因是倒频谱基本上可以理解为是一个频谱的频谱。实际上,谱分析中的许多术语在倒频谱分析中已发生了改变。一些例子如下:

倒频率—频率
倒谐波—谐波
倒大小—大小
倒相位—相位

由此可以理解为什么在倒频谱中以倒频率作为横坐标。

实际上,因为如果在对数谱中有很强的周期性,方程(10.95)和方程(10.96)给出的两个定义将在同一位置出现显著的峰值,所以倒频谱定义的选择并不重要。由于倒频谱可以发现零件(如汽轮机中的叶片和变速箱的轮齿)故障引起的谱的周期性,所以其在机械运行状态检测和诊断中是很有用的。例如,两个卡车变速箱,一个处于良好的运行状态,而另一个处于不良的运行状态。在一个实验台上对它们的第一个齿轮进行检测时,频谱和倒频谱分别如图 10.41(a)~(d)所示。可以看出,在图 10.41(a)中,处于良好运行状态的变速箱的频谱中没有明显的周期性;而在图 10.41(b)中,处于不良运行状态的变速箱的频谱中出现了大量间距约为 10 Hz 的边带,但根据此图不能更准确地确定间距的大小。与之类似,处于良好运行状态的变速箱的倒频谱中没有出现任何明显占优的倒频率,如图 10.41(d)所示。但是如图 10.41(c)所示,处于不良运行状态的变速箱的倒频谱中分别在 28.1 ms(35.6 Hz),

95.9 ms(10.4 Hz)和 191.0 ms(5.2 Hz)处出现了 3 个明显占优的倒频率。对应于 35.6 Hz 的第一系列倒谐波已经被确认是与变速箱的输入速度相对应的。由于理论输出速度是 5.4 Hz,所以很难想象对应于 10.4 Hz 的倒谐波会与输出速度的二次谐波相同(其频率为 10.8 Hz)。详细的分析发现,对应于 10.4 Hz 的倒谐波与第二个齿轮的速度相同。这表明虽然检测的是第一个齿轮,但却能发现第二个齿轮存在故障。

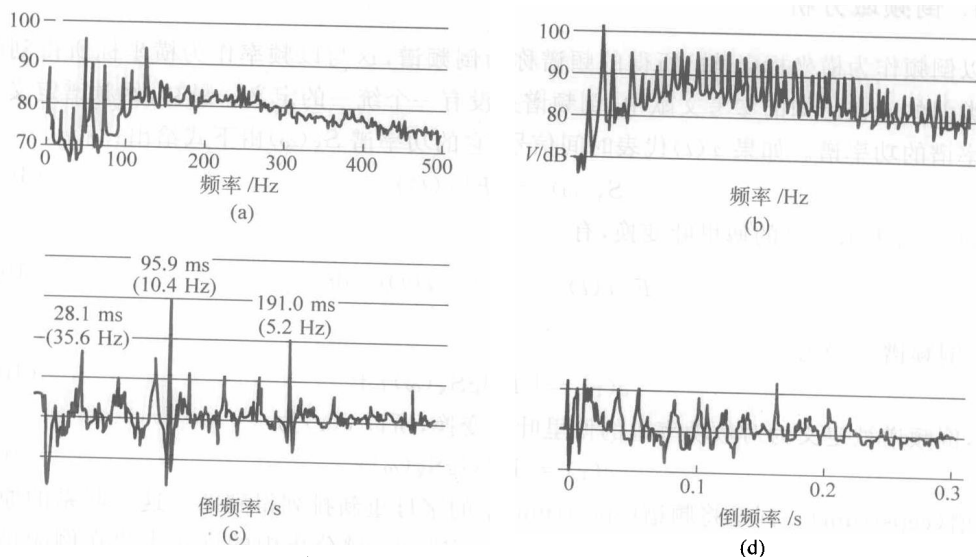


图 10.41 齿轮箱的频谱与倒频谱

(a) 状态良好齿轮箱的频谱; (b) 故障齿轮箱的频谱; (c) 故障齿轮箱的倒频谱; (d) 状态良好齿轮箱的倒频谱

10.9.5 仪器系统

基于其精密程度,有 3 类仪器系统可以用于机械运行状态的监测——基本系统、便携式系统、基于计算机的监测系统。基本系统包括一个简单的袖珍振动计、一个闪光测频仪和一个耳机。振动计在合适的频率范围内测量总的振动强度(加速度或速度的均方根值或峰值);闪光测频仪显示机器的运行速度;耳机辅助通过听觉辨别机械的振动。读出的总的均方根速度可以与打印出来的振动强度的图表进行对比,从而得出基于运行状态检修所需的任何信息。还可以画出总的振动强度随时间的变化情况,以确定机器运行状态变化的快慢。还可以联合使用振动计和袖珍计算机来采集和储存测量值。有时,一个有经验的操作人员可以凭借听觉判断机械在一段时间内的振动情况,并记录相应的运行工况。在有些情况下,通过观察就可以发现零件的故障,如未对中、不平衡或松动等。

便携式状态监测系统包括一个使用电池的便携式快速傅里叶变换振动分析仪。这种振动分析仪可以通过记录并存储每个测量点的振动谱来检测故障。每一个新记录的谱都可以与那个特定点处的参考谱作比较,此参考谱是在机械处于良好运行状态时得到的。新记录

谱中幅值的任何明显增加都意味着存在需要进一步研究的运行故障。振动分析仪也有一定的故障诊断能力,如变速箱故障、带传动故障和轴承松动等。当诊断的故障需要对零件进行替换时,可由操作者来完成。如果需要对转子重新进行平衡,振动分析仪可以用来计算所需附加质量的位置和大小。

当机械的数量、检测点的数量和故障检测的复杂性增加时,基于计算机的机械运行状态检测系统是非常有用的,而且是一个比较经济的选择。它是由一个 FFT 振动分析仪和一个具有中央数据库的计算机组成的,该中央数据库具有故障诊断能力。记录的数据存储在一个磁盘上,可以用来进行频谱比较以及生成三维图(见图 10.42)。某些基于计算机的监测系统用磁带记录各个机械测量点处的振动信号。这些记录可以回放到计算机中,以进行存储和后处理。

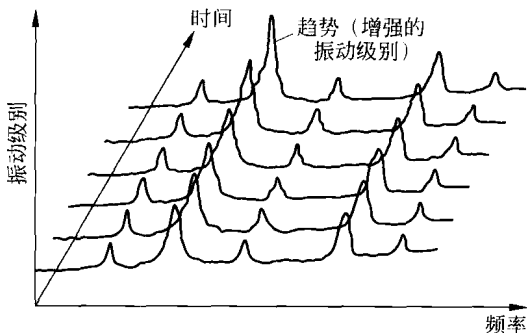


图 10.42 记录数据的三维显示

10.9.6 监测参数的选取

压电加速度计广泛应用于机械的振动测量。由于它们尺寸小,适合的频率范围大,可靠性好,耐用,因而是首选的。当加速度计用作拾振器时,可以利用分析仪中的积分器得到位移和速度信号。因此,使用者可以选择加速度、速度和位移作为监测参数。虽然这 3 个谱的任何一个都可以用于机械运行状态的检测,但通常速度谱是最平缓的(说明速度的大小变化最小)。因为速度幅值的改变可以很容易地通过比较平直的谱观察到,所以一般是选速度作为检测机器运行状态的参数。

10.10 利用 MATLAB 求解的例子

例 10.6 根据下列数据利用 MATLAB 绘制奈奎斯特圆:

(a) $\zeta=0.75$

(b) $\zeta=0.05$

解: 分别以式(10.70)和式(10.71)的结果为数据点的横坐标和纵坐标。绘制奈奎斯特圆的 MATLAB 程序如下:

```
%Ex10_6.m
zeta=0.05;
for i=1:10001
    r(i)=50*(i-1)/10000;
    Re1(i)=(1-r(i)^2)/((1-r(i)^2)^2+4*zeta^2*r(i)^2);
    Im1(i)=-2*zeta*r(i)/((1-r(i)^2)^2+4*zeta^2*r(i)^2);
end
zeta=0.75;
for i=1:10001
    r(i)=50*(i-1)/10000;
    Re2(i)=(1-r(i)^2)/((1-r(i)^2)^2+4*zeta^2*r(i)^2);
    Im2(i)=-2*zeta*r(i)/((1-r(i)^2)^2+4*zeta^2*r(i)^2);
end
plot(Re1, Im1);
title('Nyquist plot: zeta=0.05');
ylabel('Imaginary axis');
xlabel('Real axis');
pause;
plot(Re2, Im2);
title('Nyquist plot: zeta=0.75');
ylabel('Imaginary axis');
xlabel('Real axis');
```

所绘曲线如图 10.43 所示。

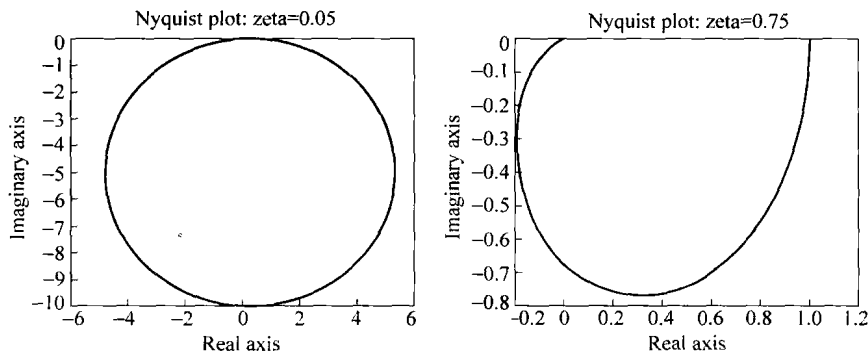


图 10.43 例 10.6 图

例 10.7 利用 MATLAB 绘制由下式给出的测量加速度和真实加速度比的变化曲线:

$$f(r) = \frac{1}{\{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2\}^{1/2}} \quad (\text{E. 1})$$

分别取 $\zeta=0.0, 0.25, 0.5, 0.75$ 和 1.0 。

解：在 $0 \leq r \leq 1$ 内绘制式(E. 1)图形的 MATLAB 程序如下：

```
%Ex10_7.m
zeta=0.0;
for i=1:101
    r(i)=(i-1)/100;
    f1(i)=1/sqrt((1-r(i)^2)^2+(2*zeta*r(i))^2);
end
zeta=0.25;
for i=1:101
    r(i)=(i-1)/100;
    f2(i)=1/sqrt((1-r(i)^2)^2+(2*zeta*r(i))^2);
end
zeta=0.5;
for i=1:101
    r(i)=(i-1)/100;
    f3(i)=1/sqrt((1-r(i)^2)^2+(2*zeta*r(i))^2);
end
zeta=0.75;
for i=1:101
    r(i)=(i-1)/100;
    f4(i)=1/sqrt((1-r(i)^2)^2+(2*zeta*r(i))^2);
end
zeta=1.0;
for i=1:101
    r(i)=(i-1)/100;
    f5(i)=1/sqrt((1-r(i)^2)^2+(2*zeta*r(i))^2);
end
plot(r,f1);
axis([0 1 0 5]);
gtext('zeta=0.00');
hold on;
plot(r,f2);
gtext('zeta=0.25');
hold on;
plot(r,f3);
gtext('zeta=0.50');
hold on;
```



```

plot(r,f4);
gtext('zeta=0.75');
hold on;
plot(r,f5);
gtext('zeta=1.00');
xlabel('r');
ylabel('f(r)');

```

所给曲线如图 10.44 所示。

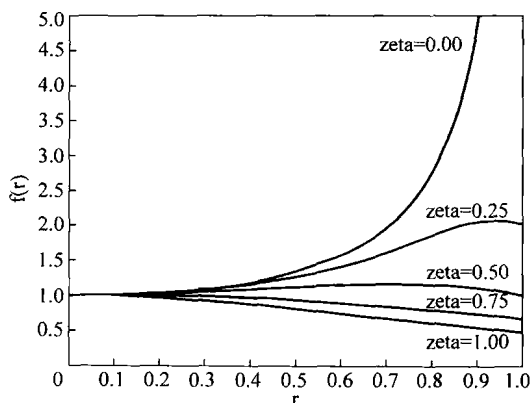


图 10.44 例 10.6 图

参考文献

- 10.1 G. Buzdugan, E. Mihailescu, and M. Rades, *Vibration Measurement*, Martinus Nijhoff, Dordrecht, The Netherlands, 1986.
- 10.2 *Vibration Testing*, Bruel & Kjaer, Naerum, Denmark, 1983.
- 10.3 O. Dossing, *Structural Testing. Part I. Mechanical Mobility Measurements*, Bruel & Kjaer, Naerum, Denmark, 1987.
- 10.4 D. N. Keast, *Measurements in Mechanical Dynamics*, McGraw-Hill, New York, 1967.
- 10.5 B. W. Mitchell (ed.), *Instrumentation and Measurement for Environmental Sciences* (2nd ed.), American Society of Agricultural Engineers, Saint Joseph, Mich., 1983.
- 10.6 J. P. Holman, *Experimental Methods for Engineers* (4th ed.), McGraw-Hill, New York, 1984.
- 10.7 J. T. Broch, *Mechanical Vibration and Shock Measurements*, Bruel & Kjaer, Naerum, Denmark, 1976.
- 10.8 R. R. Bouche, *Calibration of Shock and Vibration Measuring Transducers*, Shock and Vibration Information Center, Washington, D. C., SVM-11, 1979.
- 10.9 M. Rades, "Methods for the analysis of structural frequency-response measurement data," *Shock and Vibration Digest*, Vol. 8, No. 2, February 1976, pp. 73-88.

- 10. 10 J. D. Irwin and E. R. Graf, *Industrial Noise and Vibration Control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1979.
- 10. 11 R. K. Vierck, *Vibration Analysis*, Harper & Row, New York, 1979.
- 10. 12 J. A. Macinante, *Seismic Mountings for Vibration Isolation*, Wiley, New York, 1984.
- 10. 13 R. B. Randall and R. Upton, "Digital filters and FFT technique in real-time analysis." pp. 45-67, in *Digital Signal Analysis Using Digital Filters and FFT Techniques*, Bruel & Kjaer, Naerum, Denmark, 1985.
- 10. 14 G. Dovel, "A modal analysis—a dynamic tool for design and troubleshooting," *Mechanical Engineering*, Vol. 111, No. 3, March 1989, pp. 82-86.
- 10. 15 C. W. deSilva and S. S. Palusamy, "Experimental modal analysis—a modeling and design tool," *Mechanical Engineering*, Vol. 106, No. 6, June 1984, pp. 56-65.
- 10. 16 K. Zaveri, *Modal Analysis of Large Structures—Multiple Exciter Systems*, Bruel & Kjaer, Denmark, 1984.
- 10. 17 O. Dossing, *Structural Testing—Part 2: Modal Analysis and Simulation*, Bruel & Kiaer, Naerum, Denmark, 1988.
- 10. 18 D. J. Ewins, "Modal analysis as a tool for studying structural vibration," in *Mechanical Signature Analysis: Theory and Applications*, S. Braun (ed.), Academic Press, London, pp. 217-261, 1986.
- 10. 19 B. A. Brinkman and D. J. Macioce, "Understanding modal parameters and mode shape scaling," *Sound and Vibration*, Vol. 19, No. 6, pp. 28-30, June 1985.
- 10. 20 N. Tandon and B. C. Nakra, "Vibration and acoustic monitoring techniques for the detection of defects in rolling element bearings—a review," *Shock and Vibration Digest*, Vol. 24, No. 3, March 1992, pp. 3-11.
- 10. 21 S. Braun, "Vibration monitoring," in *Mechanical Signature Analysis: Theory and Applications*, S. Braun (ed.), Academic Press, London, 1986, pp. 173-216.
- 10. 22 A. El-Shafei, "Measuring vibration for machinery monitoring and diagnostics," *Shock and Vibration Digest*, Vol. 25, No. 1, January 1993, pp. 3-14.
- 10. 23 J. Mathew, "Monitoring the vibrations of rotating machine elements—an overview," in *Diagnostics, Vehicle Dynamics and Special Topics*, T. S. Sankar (ed.), American Society of Mechanical Engineers, New York, 1989, pp. 15-22.
- 10. 24 R. B. Randall, "Advances in the application of cepstrum analysis to gearbox diagnosis," in *Second International Conference Vibrations in Rotating Machinery (1980)*, Institution of Mechanical Engineers, London, 1980, pp. 169-174.

思 考 题

10.1 简答题

1. 振动测量的重要性是什么?

2. 振动计和示振仪的区别是什么?
3. 什么是传感器?
4. 讨论应变片工作的基本原理。
5. 定义应变片的灵敏系数。
6. 传感器和拾振器的不同点是什么?
7. 什么是压电材料? 举两个此类材料的例子。
8. 电动式传感器的工作原理是什么?
9. 什么是 LVDT? 它是怎样工作的?
10. 什么是地震仪?
11. 地震仪的频率范围是什么?
12. 什么是加速度计?
13. 什么是相移误差? 它在什么时候变得非常重要?
14. 举两个机械式振动激励器的例子。
15. 什么是电磁式激振器?
16. 讨论利用测量运行时的变形进行动态测试的优点。
17. 实验模态分析的目的是什么?
18. 叙述模态分析中频响函数的用途。
19. 列举两种频率测量仪器。
20. 列举 3 种表示频率响应数据的方法。
21. 怎样使用波特图?
22. 怎样绘制奈奎斯特图?
23. 模态叠加原理是什么? 它在模态分析中有什么用途?
24. 叙述用于机械设备检修的 3 种方案。
25. 如何利用特性轨线对设备进行故障诊断?
26. 术语峭度和倒频谱是如何定义的?

10.2 判断题

1. 应变片是一种变电阻传感器。 ()
2. 应变片的灵敏系数是由制造商提供的。 ()
3. 电磁式传感器的输出电压与线圈的相对速度成正比。 ()
4. 电动式传感器的原理可以用于激振器。 ()
5. 地震仪也是一种振动计。 ()
6. 所有振动测量仪器都存在相位滞后。 ()
7. 当测量频率为 ω 的简谐运动时, 相位滞后是很重要的。 ()
8. 止转棒铰机构(正弦机构)可以用于机械式激振器。 ()

9. 系统的时间响应比频率响应能给出更好的能量分布信息。 ()
10. 频谱分析仪是在频率域内对信号进行分析的一种装置。 ()
11. 通过模态实验可以得出机器的全部动态响应。 ()
12. 从波特图中可以得到振动系统的阻尼比。 ()
13. 频谱分析仪也称为快速傅里叶变换(FFT)分析仪。 ()
14. 在事后检修方案中,机器一直运行直到出现故障。 ()
15. 可以利用时域波形来发现机械设备的不连续损坏。 ()

10.3 填空题

1. 一个可以将非物理量的值转变成等效的电信号的装置称为_____。
2. 当受到机械压力时,压电传感器产生电_____。
3. 安装在振动体上的地震仪由_____系统构成。
4. 测量振动物体加速度的仪器称为_____。
5. _____可以用于记录地震。
6. 测量振动物体速度的仪器称为_____。
7. 大多数机械式频率测量仪都是基于_____原理。
8. 弗拉姆转速计是由在自由端带有质量块的几个_____构成的装置。
9. 闪光测频仪的主要优点是它可以不与旋转体_____就能测量速度。
10. 实时频率分析中,是在全部_____带上对信号连续进行分析。
11. 因为可以立刻观测到噪声和振动谱的改变,所以实时分析仪对机器的_____监测是很有用的。
12. _____是任意的频率间隔($f_2 - f_1$),其中两频率比 $\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = 2$ 。
13. 机器的动态测试包括确定在极限频率下运行时,机器设备的_____。
14. 在进行振动测试时,对设备的支承应能模拟_____条件,以便能够观察到系统的刚体振型。
15. 激振力可以通过_____测量。
16. 系统响应通常通过_____测量。
17. 系统的频率响应通常通过_____分析仪测量。
18. 机械的运行状况可以利用_____来确定。
19. 机械设备的寿命曲线是典型的_____曲线。
20. 在李萨茹图中观察到的_____可以用来识别机器设备的故障。
21. 倒频谱可以定义为_____的对数的功率谱。

10.4 选择题

1. 当传感器与另一个装置联合用来测量振动时,称为_____。

- (a) 振动传感器 (b) 振动拾振器 (c) 振动激励器
2. 测量振动体位移的仪器称为_____。
- (a) 地震仪 (b) 传感器 (c) 加速度计
3. 允许信号中一个频带内的频率成分通过,拒绝所有其他频率成分通过的电路称为_____。
- (a) 带通滤波器 (b) 频率滤波器 (c) 频谱滤波器
4. 以功率(P)为例,根据参考值(P_{ref}),其分贝(dB)数定义为_____。
- (a) $10\lg \frac{P}{P_{\text{ref}}}$ (b) $\lg \frac{P}{P_{\text{ref}}}$ (c) $\frac{1}{P_{\text{ref}}} \lg P$
5. _____在模态分析中起重要作用。
- (a) 时间响应函数 (b) 模态响应函数 (c) 频率响应函数
6. 使系统受到一个已知力的作用作为初始条件,之后不再受力,这种激励方式称为_____。
- (a) 阶跃松弛 (b) 电磁激励器激励 (c) 冲击器
7. 利用频谱分析仪产生的电信号,对一个系统施加一个机械力的过程称为_____。
- (a) 阶跃松弛 (b) 电磁激励器激励 (c) 冲击器
8. 利用有内置力传感器的力锤在系统的不同点处施加载荷的过程称为_____。
- (a) 阶跃松弛 (b) 电磁激励器激励 (c) 冲击器
9. 在最初的磨合阶段,机械设备的运行故障一般会随着时间的延长而_____。
- (a) 减少 (b) 增加 (c) 保持不变
10. 在正常运转阶段,机械设备的运行故障一般会随着时间的延长而_____。
- (a) 减少 (b) 增加 (c) 保持不变
11. 在老化或磨损阶段,机械设备的运行故障一般会随着时间的延长而_____。
- (a) 减少 (b) 增加 (c) 保持不变

10.5 连线题

- | | |
|--------------|-------------------------|
| 1. 压电加速度计 | (a) 产生间歇光脉冲 |
| 2. 电动式传感器 | (b) 有高的输出且对温度不敏感 |
| 3. LVDT 传感器 | (c) 在速度拾振器中经常使用 |
| 4. 富拿顿飞球式转速计 | (d) 有高的灵敏度和大的适用频率范围 |
| 5. 闪光测频仪 | (e) 在自由端有一个集中质量的可变长度悬臂梁 |

习 题

- 10.1 罗谢尔(Rochelle)盐晶体的电压灵敏度是 $0.098 \text{ V} \cdot \text{m}/\text{N}$,厚度是 2 mm ,在某压力作用下的输出电压为 200 V 。求此压力的大小。

10.2 可以忽略阻尼的弹簧-质量系统用来作拾振器,质量块的质量为 $m=0.5\text{ kg}$,弹簧的刚度系数为 $k=10\,000\text{ N/m}$ 。当装在一个振幅为 4 mm 的结构上时,拾振器质量块的绝对位移是 12 mm 。求振动结构的频率。

10.3 利用如图 10.45 所示装置测量机器的竖向运动时,质量块 m 相对于机身的运动记录在磁鼓上。如果阻尼常数等于 $c=c_{\text{cri}}/\sqrt{2}$,机身的竖向运动由 $y(t)=Y\sin\omega t$ 给出,求记录在磁鼓上的运动的振幅。

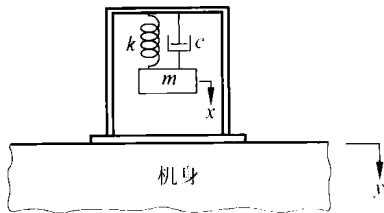


图 10.45 习题 10.3 图

10.4 在工程实际中,一般建议内燃机的转速在 $500\sim 1500\text{ r/min}$ 范围内时,应利用振动计对其基础的振动进行测试。此振动是由两个谐振动组成的,它们分别是由发动机上的主惯性力和次惯性力引起的。确定振动计的最大固有频率,以使所测振幅的失真率不超过 2% 。

10.5 频率比范围为 $4\leq r<\infty$,阻尼比为 $\zeta=0$ 时,求振动计的最大百分误差。

10.6 当阻尼比 $\zeta=0.67$ 时,求解习题 10.5。

10.7 现利用一振动计来测量运转速度在 $500\sim 1500\text{ r/min}$ 之间的发动机的振动。已知发动机的振动是由两个谐振动组成的。若要求所测振幅的失真率不超过 3% ,确定振动计的固有频率:(a)忽略阻尼;(b)阻尼比是 0.6 。

10.8 用来作振动计的弹簧-质量系统的静变形是 10 mm ,忽略阻尼。当安装在转速为 4000 r/min 的机器上时,相对运动振幅的记录值为 1 mm 。求此机器的位移、速度、加速度的最大值。

10.9 拾振器的固有频率为 5 Hz ,阻尼比为 $\zeta=0.5$ 。求能够测量的最低频率。要求测量误差不超过 1% 。

10.10 拾振器的设计测量频率的最小值为 100 Hz ,误差不超过 2% 。当安装到振动频率为 100 Hz 的结构上时,质量块的相对振幅是 1 mm 。如果弹簧的刚度是 4000 N/m ,忽略阻尼,确定拾振器的悬挂质量。

10.11 振动计的无阻尼固有频率和有阻尼固有频率分别为 10 Hz 和 8 Hz 。若要求可以直接从振动计中读出的振幅误差不超过 2% ,确定测量频率的最小值。

10.12 当频率比为 $0<r\leq 0.65$,阻尼比为 $\zeta=0$ 时,确定加速度计的最大百分误差。

10.13 当阻尼比为 0.75 时,求解习题 10.12。

10.14 如果要求最大误差限制在 3% 以内,测量频率的范围为 $0\sim 100\text{ Hz}$,确定加速度计的最小刚度和阻尼常数。假定质量块的质量为 0.05 kg 。

10.15 加速度计由刚度系数为 $10\,000\text{ N/m}$ 、悬挂质量为 0.1 kg 的弹簧-质量系统组成,忽略阻尼。当安装到发动机的基础上时,加速度计质量块振动的峰-峰值为 10 mm ,发动机转速为 1000 r/min 。确定基础的最大位移、最大速度和最大加速度。

10.16 无阻尼固有频率是 100 Hz ,阻尼常数是 $20\text{ N}\cdot\text{s/m}$ 的弹簧-质量-阻尼系统用作加速

度计来测量机器在转速为 3000 r/min 时的振动。如果实际加速度是 10 m/s^2 , 而记录的加速度值是 9 m/s^2 , 求加速度计质量块的质量和弹簧的刚度系数。

- 10.17 电动机以不同的速度运行时, 车间地面产生以下形式的振动:

$$x(t) = 20\sin 4\pi t + 10\sin 8\pi t + 5\sin 12\pi t \text{ (mm)}$$

如果用无阻尼固有频率和有阻尼固有频率分别为 0.5 Hz 和 0.48 Hz 的振动计来记录地面的振动, 那么振动计的测量精度是多少?

- 10.18 机器的振动规律如下:

$$x(t) = 20\sin 50t + 5\sin 150t \text{ (mm)} \quad (t \text{ 的单位是 s})$$

有阻尼固有频率和无阻尼固有频率分别为 80 rad/s 和 100 rad/s 的加速度计安装在该机器上, 以直接读出加速度值(单位: mm/s^2)。讨论加速度记录值的精度。

- 10.19 由弹簧钢制成的横截面为 $\frac{1}{16} \text{ in} \times 1 \text{ in}$ 的可变长度矩形悬臂梁用于测量振动频率。

悬臂梁的长度可在 2~10 in 之间变化。确定这种装置能够测量的频率范围。

- 10.20 根据式(3.54), 证明当

$$R_1 = \frac{\omega_1}{\omega_n} = \sqrt{1-2\zeta} \quad \text{和} \quad R_2 = \frac{\omega_2}{\omega_n} = \sqrt{1+2\zeta}$$

时, 单自由度黏性阻尼系统简谐响应的实部分别取最大值和最小值。

- 10.21 根据式(3.54), 求单自由度黏性阻尼系统简谐响应的虚部取最小值时的激励频率值。

- 10.22 绘制单自由度滞后阻尼系统的奈奎斯特图。

- 10.23 惯性测试中汽轮机轴振动的波特图如图 10.46 所示, 若轴的静变形等于 0.05 mil, 确定系统的阻尼比。

- 10.24 内燃机轴承的振动响应如图 10.47 所示。确定系统的等效黏性阻尼比。

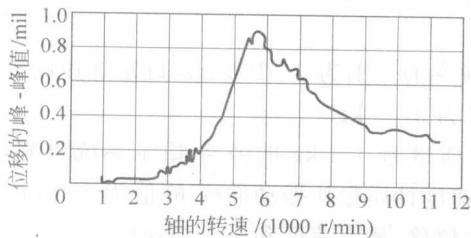


图 10.46 习题 10.23 图

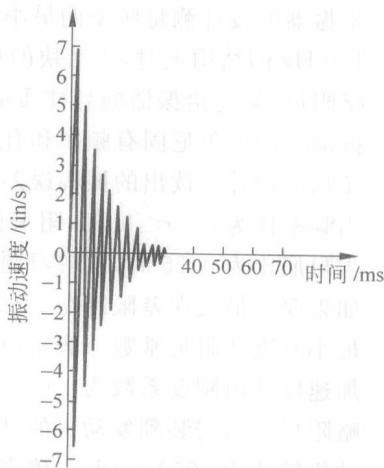


图 10.47 习题 10.24 图

- 10.25 提出一种利用相角-频率波特图(图 3.11(b))确定系统固有频率和阻尼比的方法。
- 10.26 每个有 16 个球的一对球轴承用于支承风机轴以 750 r/min 的速度旋转,假定 $d=15\text{ mm}$, $D=100\text{ mm}$, $\alpha=30^\circ$, 确定对应于以下组件故障的振动频率(单位: Hz): 保持架, 内圈, 外圈, 钢球。
- 10.27 假定 $d=2\text{ cm}$, $D=15\text{ cm}$, $\alpha=20^\circ$, 轴的转速为 1000 r/min。求具有 18 个滚柱的滚柱轴承的滚柱、内圈、外圈和保持架出现故障时的振动频率(单位: Hz)。
- 10.28 角接触推力轴承是由直径为 10 mm 的 18 个滚子构成的, 安装在转速为 1500 r/min 的轴上。如果轴承接触角是 40° , 平均直径是 80 mm, 求保持架、内圈和外圈出现故障时相应的频率。^①
- 10.29 求 1~5 mm 范围内均匀分布的振动信号的峭度:

$$f(x) = \frac{1}{4}, \quad 1\text{ mm} \leq x \leq 5\text{ mm}$$

- 10.30 求可以用具有下列概率密度函数的离散随机变量近似的振动振幅的峭度。

x/mm	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	1/32	3/32	3/16	6/16	3/16	3/32	1/32

- 10.31 图 10.48 为通过实验得到的某结构的传递函数, 求 ω_i 和 ζ_i 的近似值。
- 10.32 通过实验得到某结构的奈奎斯特圆如图 10.49 所示, 估计对应于这个圆的模态阻尼比。

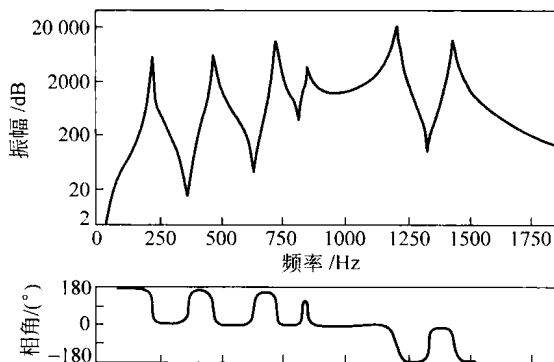


图 10.48 习题 10.31 图

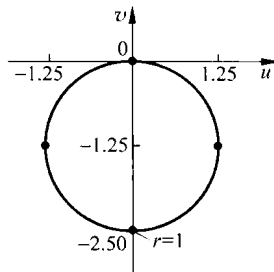


图 10.49 习题 10.32 图

① 球轴承和滚珠轴承的每一种失效形式都会产生一种振动频率 f (每分钟的冲击次数), 具体说来如下所述。内圈缺陷 $f = \frac{1}{2}nN(1+c)$; 外圈缺陷 $f = \frac{1}{2}nN(1-c)$; 球或滚柱缺陷 $f = \frac{DN}{d}c(2-c)$; 保持架缺陷 $f = \frac{1}{2}N(1-c)$ 。式中, d 代表球或滚柱的直径; D 代表轴承的节圆直径; α 代表接触角; n 代表球或滚柱数; N 代表转速, r/min; $c = \frac{d}{D} \cos \alpha$ 。

设计题目

- 10.33 设计一个激振器满足下列要求:
- 待测试样的最大重量为 10 N ;
 - 工作频率范围为 $10\sim 50\text{ Hz}$;
 - 最大加速度为 $20g$;
 - 最大振幅为 0.5 cm (峰-峰值)。
- 10.34 弗拉姆转速计在测量旋转轴不易接近的发动机的转速时特别有用。将转速计放于运行中的发动机的框架内,当发动机的转速对应着某一个簧片的共振频率时,发动机产生的振动会使一个簧片产生明显振动。设计一个结构紧凑且轻质的有 12 个簧片的弗拉姆转速计,测量发动机在 $300\sim 600\text{ r/min}$ 范围内的转速。
- 10.35 多层建筑的顶层固定着一个末端质量为 m 的悬臂梁,以测量风载和地震载荷引起的建筑物顶层的加速度(见图 10.50)。假设末端质量等于梁质量的一半,设计此悬臂梁的结构(即确定材料、横截面尺寸和梁的长度),使其在建筑物的顶层加速度为 $0.2g$ 时,梁中引发的应力不超过材料的屈服应力。

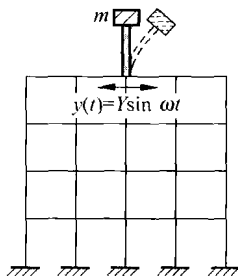
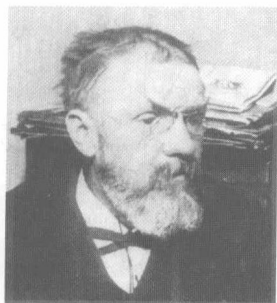


图 10.50 习题 10.35 图



庞加莱 (Jules Henri Poincaré, 1854—1912), 法国数学家, 巴黎大学天体力学教授, 埃可尔(Ecole)工业大学力学教授。他对纯数学和应用数学, 特别是对天体力学和电动力学的贡献都是非常巨大的。他关于非线性自治系统奇点的分类在非线性振动理论中占有非常重要的地位。

(照片引自: Struik D.J. A Concise History of Mathematics, 2nd ed, New York: Dover Publications, 1948)

第 11 章 非线性振动

11.1 引言

在前述各章中, 运动微分方程仅仅包含位移和它对时间导数的一次项, 没有位移和速度的二次项或高次项。因此, 运动微分方程和相应的系统被称为线性的。为分析方便, 大多数系统都被模型化为线性系统。但是实际上, 真实系统是非线性的情况比线性的情况更常见^[11.1~11.6]。当研究有限小振幅的运动时, 非线性分析就变得非常重要。在线性分析中非常有用的叠加原理, 在非线性分析中并不适用。由于质量、阻尼和弹簧是振动系统的基本构成, 所以控制微分方程中的非线性可以由这些构成中的任何一种引入的。在许多情况下, 线性分析对充分描述物理系统的行为是远远不够的。把一个物理系统模型化为一个非线性系统的主要理由之一是那些有时出现在非线性系统中的完全超出想象的现象——利用线性理论根本无法作出预测甚至没有任何线索。本章介绍几种对非线性振动问题求解的方法, 包括一些精确的解析法、近似分析方法、图解法和数值方法。

11.2 非线性振动问题的例子

下面给出几个物理系统中反映非线性特征的实例。

11.2.1 单摆

考虑摆长为 l 、质点质量为 m 的单摆, 如图 11.1(a)所示。根据图 11.1(b), 得单摆的自

由振动微分方程为

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0 \quad (11.1)$$

对于小角度情况, $\sin\theta \approx \theta$, 方程(11.1)简化为线性方程:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \quad (11.2)$$

其中

$$\omega_0 = (g/l)^{1/2} \quad (11.3)$$

方程(11.2)的解为

$$\theta(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (11.4)$$

其中, A_0 是摆动的振幅; ϕ 是相角; ω_0 是固有角频率。 A_0 和 ϕ 的值由初始条件确定; ω_0 的值与振幅 A_0 无关。式(11.4)表示单摆的近似解。更好的近似可用 $\sin\theta$ 在 $\theta=0$ 附近的两项代替, 即 $\sin\theta \approx \theta - \theta^3/6$, 则有

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right) = 0$$

或

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\left(\theta - \frac{1}{6}\theta^3\right) = 0 \quad (11.5)$$

由于方程(11.5)包含立方项 θ^3 , 所以是非线性方程(属于几何非线性)。方程(11.5)类似于具有非线性弹簧的弹簧-质量系统。如果弹簧是非线性的(属于材料非线性), 恢复力可以表达成 $f(x)$, x 表示弹簧的变形, 则弹簧-质量系统的运动微分方程为

$$m\ddot{x} + f(x) = 0 \quad (11.6)$$

如果 $df/dx = k = \text{常数}$, 则弹簧是线性的; 如果 df/dx 是严格单调递增的, 则弹簧被称为硬弹簧; 如果 df/dx 是严格单调递减的, 则弹簧被称为软弹簧, 如图 11.2 所示。简化的方程(11.5)与方程(11.6)是类似的, 于是考虑摆的大幅运动时, 这个系统可以看作是具有非线性弹性元件。

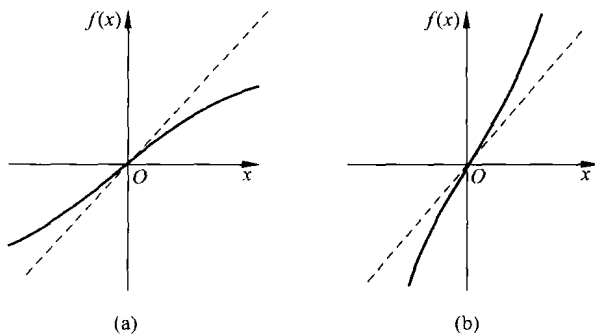


图 11.2 非线性弹簧特征

(a) 软弹簧; (b) 硬弹簧

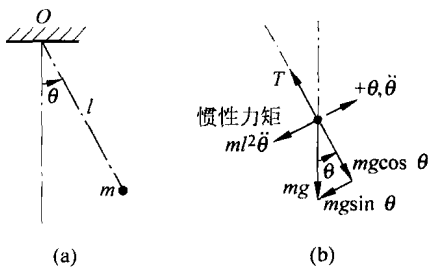


图 11.1 单摆

11.2.2 机械颤振, 皮带摩擦系统

如图 11.3(a)所示,非线性也可能是由阻尼项引起的。系统的非线性行为是由于在质量 m 和运动的皮带之间的干摩擦产生的。这个系统有两个摩擦系数:静摩擦系数 μ_s ,它对应着质量块 m 与皮带没有相对运动时所受的摩擦力;动摩擦系数 μ_k ,它对应着质量块 m 与皮带有相对运动时所受的摩擦力。在这两种情况下,沿摩擦面切线方向的摩擦力 F 总是等于摩擦系数与正压力的乘积。

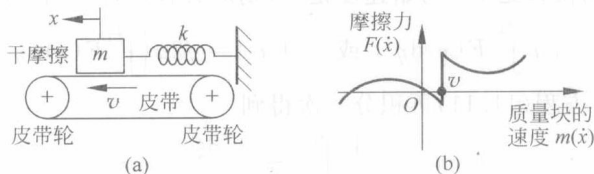


图 11.3 干摩擦阻尼

图 11.3(a)所示系统中,质量块 m 振动的诱发过程如下:质量块 m 开始与皮带保持相对静止。由于质量块 m 随皮带运动产生位移,所以弹簧伸长。随着弹簧的伸长,在质量块上的弹簧力增加,直到超过静摩擦力时质量块开始滑动。质量块快速向右滑动弹簧力不断减小,直到向左的动摩擦力使其静止下来。然后随着质量块一起与皮带运动,弹簧再次产生恢复力。阻尼力随质量块速度的变化如图 11.3(b)所示。运动微分方程可以表达为

$$m\ddot{x} + F(\dot{x}) + kx = 0 \quad (11.7)$$

其中,摩擦力 F 是 \dot{x} 的非线性函数,如图 11.3(b)所示。

对于较大的 \dot{x} ,阻尼力是正的(曲线具有正斜率),系统的能量减少;相反,对于较小的 \dot{x} ,阻尼力是负的(曲线具有负斜率),系统的能量增加。虽然没有外激励作用,但系统可以产生振荡运动,这个系统相当于非线性自激系统。这种自激振动现象称为机械颤振。

11.2.3 变质量系统

如图 11.4 所示,非线性也可能出现在质量项上。对大位移问题,系统的质量依赖于位移 x ,所以运动微分方程变成

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) + kx = 0 \quad (11.8)$$

这是一个第一项具有非线性的非线性常微分方程。

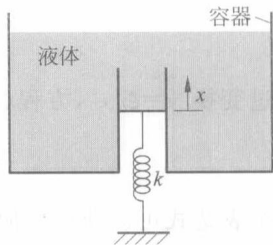


图 11.4 变质量系统

11.3 精确解法

只有极少数特殊类型的二阶非线性常微分方程才有可能得到精确解。精确解的含义是

指得到一个精确的表达式,或者可以获得任何精度数值解的表达式。在这一部分,我们将考虑一个可以获得精确解的简单非线性系统。对具有一般恢复力 $F(x)$ 的单自由度系统,自由振动方程可以表达为

$$\ddot{x} + a^2 F(x) = 0 \quad (11.9)$$

其中, a^2 为常数。方程(11.9)可以重写成

$$\frac{d}{dx} \dot{x}^2 + 2a^2 F(x) = 0 \quad (11.10)$$

假定在 $t=t_0$ 时的初始位移是 x_0 , 初始速度是零, 则对方程(11.10)积分可以得到

$$\dot{x}^2 = 2a^2 \int_x^{x_0} F(\eta) d\eta \quad \text{或} \quad |\dot{x}| = \sqrt{2}a \left\{ \int_x^{x_0} F(\eta) d\eta \right\}^{1/2} \quad (11.11)$$

这里, η 是积分变量。方程(11.11)再积分一次得到

$$t - t_0 = \frac{1}{\sqrt{2}a} \int_0^x \frac{d\xi}{\left\{ \int_\xi^{x_0} F(\eta) d\eta \right\}^{1/2}} \quad (11.12)$$

这里, ξ 是新的积分变量, 时间 t_0 对应于 $x=0$ 。因此, 方程(11.12)给出了方程(11.9) 的精确解, 方程(11.12)的积分给出了精确的表达式。在计算方程(11.12)的积分后, 将所得结果转化, 可以获得位移-时间关系。如果 $F(x)$ 是偶函数, 则

$$F(-x) = -F(x) \quad (11.13)$$

考虑到方程(11.12)是从零位移到最大位移的积分, 则可以得到振动的周期 τ 为

$$\tau = \frac{4}{\sqrt{2}a} \int_0^{x_0} \frac{d\xi}{\left\{ \int_\xi^{x_0} F(\eta) d\eta \right\}^{1/2}} \quad (11.14)$$

例如, 若设 $F(x) = x^n$, 方程(11.12)和方程(11.14)变成

$$t - t_0 = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{n+1}{2}} \int_0^{x_0} \frac{d\xi}{(x_0^{n+1} - \xi^{n+1})^{1/2}} \quad (11.15)$$

和

$$\tau = \frac{4}{a} \sqrt{\frac{n+1}{2}} \int_0^{x_0} \frac{d\xi}{(x_0^{n+1} - \xi^{n+1})^{1/2}} \quad (11.16)$$

通过变换 $y = \xi/x_0$, 方程(11.16) 可以写成

$$\tau = \frac{4}{a} \frac{1}{(x_0^{n+1})^{1/2}} \sqrt{\frac{n+1}{2}} \int_0^1 \frac{dy}{(1 - y^{n+1})^{1/2}} \quad (11.17)$$

这个表达式可以获得任何精度的数值解。

11.4 近似分析方法

非线性振动问题如果没有精确解, 我们至少希望找到近似解。虽然对非线性振动问题的解析近似解和数值近似解都是有用的, 但是解析方法更是人们所希望的。其理由是一旦获得

解析解,就可以取得任何数值结果并且可以找到解的范围。下面讨论 4 种近似分析的方法。

11.4.1 基本原理

把控制非线性系统振动的微分方程采用由 n 个一阶微分方程构成的方程组来描述^①:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \alpha \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \quad (11.18)$$

这里,非线性项假设仅仅出现在 $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ 上, α 是小参数。方程 (11.18) 中,

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{Bmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \\ \vdots \\ dx_n/dt \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \begin{Bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{Bmatrix}$$

及

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \begin{Bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \vdots \\ g_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{Bmatrix}$$

具有非线性项微分方程的解假设为小参数的展开式是由庞加莱首先提出的。他假设方程 (11.18) 的解是下列级数形式:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t) + \alpha \mathbf{x}_1(t) + \alpha^2 \mathbf{x}_2(t) + \alpha^3 \mathbf{x}_3(t) + \dots \quad (11.19)$$

形如式 (11.19) 的级数解有两个基本特征:

(1) 当 $\alpha \rightarrow 0$ 时, 方程 (11.19) 退化为线性方程 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ 的精确解;

(2) 当参数 α 的值比较小时, 在式 (11.19) 所示的级数解中, 取前 2 项或前 3 项就可能快速收敛到适当的精确解。

在这一部分介绍的各种近似解析方法是式 (11.19) 所包含的基本思想的改进或修正。虽然庞加莱解即式 (11.19) 仅仅对小参数 α 有效, 但这种方法仍然适合于大参数系统。现在作为例子, 利用庞加莱方法求单摆的运动微分方程, 即式 (11.5) 的解。

方程 (11.5) 可以写成

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^3 = 0 \quad (11.20)$$

其中, $x = \theta$, $\omega_0 = (g/l)^{1/2}$, $\alpha = -\omega_0^2/6$ 。方程 (11.20) 是熟知的自由达芬 (Duffing) 方程。假设是弱非线性 (即 α 是小参数), 则方程 (11.20) 的解可以表示成

$$x(t) = x_0(t) + \alpha x_1(t) + \alpha^2 x_2(t) + \dots + \alpha^n x_n(t) + \dots \quad (11.21)$$

其中, $x_i(t)$ ($i=0, 1, 2, \dots, n$) 是待定函数。取方程 (11.21) 的两项近似, 则方程 (11.20) 可以

^① 在式 (11.18) 中, 由于显含时间 t , 此类方程所代表的系统称为非自治系统。与之相反, 如下形式的控制方程:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \alpha \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

由于不显含时间 t , 此类方程所代表的系统称为自治系统。

写成

$$(\ddot{x}_0 + \alpha \ddot{x}_1) + \omega_0^2(x_0 + \alpha x_1) + \alpha(x_0 + \alpha x_1)^3 = 0$$

即

$$(\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0) + \alpha(\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + x_0^3) + \alpha^2(3x_0^2 x_1) + \alpha^3(3x_0 x_1^2) + \alpha^4 x_1^3 = 0 \quad (11.22)$$

如果忽略 α^2, α^3 和 α^4 项 (因为 α 是小参数), 则下列方程成立:

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad (11.23)$$

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -x_0^3 \quad (11.24)$$

方程(11.23)的解可以表示为

$$x_0(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (11.25)$$

考虑到式(11.25), 方程(11.24)变成

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 &= -A_0^3 \sin^3(\omega_0 t + \phi) \\ &= -A_0^3 \left[\frac{3}{4} \sin(\omega_0 t + \phi) - \frac{1}{4} \sin 3(\omega_0 t + \phi) \right] \end{aligned} \quad (11.26)$$

方程(11.26)的特解是 (代入后可以验证)

$$x_1(t) = \frac{3}{8\omega_0} t A_0^3 \cos(\omega_0 t + \phi) - \frac{A_0^3}{32\omega_0^2} \sin 3(\omega_0 t + \phi) \quad (11.27)$$

因此方程(11.20)的近似解为

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0(t) + \alpha x_1(t) \\ &= A_0 \sin(\omega_0 t + \phi) + \frac{3\alpha t}{8\omega_0} A_0^3 \cos(\omega_0 t + \phi) - \frac{A_0^3 \alpha}{32\omega_0^2} \sin 3(\omega_0 t + \phi) \end{aligned} \quad (11.28)$$

根据 $x(t)$ 的初始条件可以确定常数 A_0 和 ϕ 。

注意:

(1) 由于式(11.28)右边第2项不具有周期性, 因此即使是弱非线性 (即 α 是小参数) 的情况, 该解也是非周期的。一般来说, 如果只取有限项, 则由式(11.21)确定的解将不是周期的。

(2) 由于式(11.28)中存在第2项, 所以整体解随着时间 t 趋向无穷大而趋向无穷大。众所周知, 方程(11.20)的精确解对所有时间 t 是有界的。导致解(11.28)的无界性的原因是在式(11.21)中仅取了两项。方程(11.28)的第2项称为长期项^①。式(11.21)中无穷级数的收敛性将导致方程(11.20)的解的有界性。为了说明这一点, 考察 $\sin(\omega t + \alpha t)$ 的泰勒展开式:

$$\sin(\omega + \alpha)t = \sin \omega t + \alpha t \cos \omega t - \frac{\alpha^2 t^2}{2!} \sin \omega t - \frac{\alpha^3 t^3}{3!} \cos \omega t + \cdots \quad (11.29)$$

如果仅仅取式(11.29)右边的前两项, 当 $t \rightarrow \infty$ 时解将趋向无穷大。然而, 这个函数本身和

^① 有的中文文献中也称为永年项。——译者

它的无穷级数表达式都是有界的。

11.4.2 林兹泰德摄动方法

这种方法假设角频率和解都是振幅 A_0 的函数。在这种方法中,每一步都要根据使近似解保持周期性来消除长期项^[13,5]。假设解和角频率的形式分别如下:

$$x(t) = x_0(t) + \alpha x_1(t) + \alpha^2 x_2(t) + \cdots \quad (11.30)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \alpha \omega_1(A_0) + \alpha^2 \omega_2(A_0) + \cdots \quad (11.31)$$

作为摄动方法的例子,仍讨论单摆运动微分方程(即式(11.20))的解。在式(11.30)和式(11.31)中仅取 α 的线性项,有

$$x(t) = x_0(t) + \alpha x_1(t) \quad (11.32)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \alpha \omega_1(A_0) \quad \text{或} \quad \omega^2 = \omega^2 - \alpha \omega_1(A_0) \quad (11.33)$$

把式(11.32)和式(11.33)代入式(11.20),得到

$$\ddot{x}_0 + \alpha \ddot{x}_1 + [\omega^2 - \alpha \omega_1(A_0)][x_0 + \alpha x_1] + \alpha[x_0 + \alpha x_1]^3 = 0$$

即

$$\begin{aligned} & \ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 + \alpha(\omega^2 x_1 + x_0^3 - \omega_1 x_0 + \ddot{x}_1) \\ & + \alpha^2(3x_1 x_0^2 - \omega_1 x_1) + \alpha^3(3x_1^2 x_0) + \alpha^4 x_1^3 = 0 \end{aligned} \quad (11.34)$$

在方程(11.34)中忽略含 α 的高次幂 α^2, α^3 和 α^4 的项,得到

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0 \quad (11.35)$$

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = -x_0^3 + \omega_1 x_0 \quad (11.36)$$

方程(11.35)的解为

$$x_0(t) = A_0 \sin(\omega t + \phi) \quad (11.37)$$

代入方程(11.36),得到

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= -[A_0 \sin(\omega t + \phi)]^3 + \omega_1 [A_0 \sin(\omega t + \phi)] \\ &= -\frac{3}{4} A_0^3 \sin(\omega t + \phi) + \frac{1}{4} A_0^3 \sin 3(\omega t + \phi) + \omega_1 A_0 \sin(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (11.38)$$

式(11.38)中右边的第一项和最后一项将引起长期项,消除长期项得到

$$\omega_1 = \frac{3}{4} A_0^2, \quad A_0 \neq 0 \quad (11.39)$$

这样式(11.38)变成

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \frac{1}{4} A_0^3 \sin 3(\omega t + \phi) \quad (11.40)$$

方程(11.40)的解为

$$x_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \phi_1) - \frac{A_0^3}{32\omega^2} \sin 3(\omega t + \phi) \quad (11.41)$$

假设初始条件为 $x(t=0) = A$ 和 $\dot{x}(t=0) = 0$ 。利用林兹泰德(Lindstedt)方法时,应使解

$x_0(t)$ (即式(11.37))满足初始条件:

$$x(0) = A = A_0 \sin \phi, \quad \dot{x}(0) = 0 = A_0 \omega \cos \phi$$

或

$$A_0 = A \quad \text{及} \quad \phi = \frac{\pi}{2}$$

由于 $x_0(t)$ 本身满足初始条件, 所以解 $x_1(t)$ (即式(11.41)) 必须满足零初始条件。^① 因此

$$x_1(0) = 0 = A_1 \sin \phi_1 - \frac{A_0^3}{32\omega^2} \sin 3\phi$$

$$\ddot{x}_1(0) = 0 = A_1 \omega \cos \phi_1 - \frac{A_0^3}{32\omega^2} (3\omega) \cos 3\phi$$

由于 $A_0 = A$ 和 $\phi = \pi/2$, 根据以上方程解得

$$A_1 = -\frac{A^3}{32\omega^2} \quad \text{和} \quad \phi_1 = \frac{\pi}{2}$$

因此方程(11.20)的全解为

$$x(t) = A_0 \sin(\omega t + \phi) - \frac{\alpha A_0^3}{32\omega^2} \sin 3(\omega t + \phi) \quad (11.42)$$

并且

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \alpha \frac{3}{4} A_0^2 \quad (11.43)$$

式(11.30)中考虑3项的情况见习题11.11。注意: Lindstedt 方法仅能给出方程(11.20)的周期解, 即使周期解不存在, 它也不能求出非周期解。

11.4.3 迭代法

在基本的迭代法中, 首先是把原方程忽略某些项后进行求解。然后把解的结果代入原方程, 得到第1次改进的近似解。仍以达芬方程为例说明迭代法的求解过程。此处讨论的达芬方程是谐波激励下, 具有阻尼和非线性弹簧的单自由度系统。首先讨论无阻尼方程的解。

1. 无阻尼方程的解

如果忽略阻尼, 达芬方程可以写成

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x \pm \alpha x^3 = F \cos \omega t$$

或

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x \mp \alpha x^3 + F \cos \omega t \quad (11.44)$$

作为第1次近似, 假设解为

$$x_1(t) = A \cos \omega t \quad (11.45)$$

这里, A 是未知数。把式(11.45)代入方程(11.44), 可以得到微分方程的第2次近似:

^① 如果 $x_0(t)$ 满足初始条件, 式(11.30)中的 $x_1(t), x_2(t), \dots$ 必满足零初始条件。

$$\ddot{x}_2 = -A\omega_0^2 \cos \omega t \mp A^3 \alpha \cos^3 \omega t + F \cos \omega t \quad (11.46)$$

利用恒等式

$$\cos^3 \omega t = \frac{3}{4} \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos 3\omega t \quad (11.47)$$

方程(11.46)可以表示成

$$\ddot{x}_2 = -\left(A\omega_0^2 \pm \frac{3}{4}A^3\alpha - F\right) \cos \omega t \mp \frac{1}{4}A^3\alpha \cos 3\omega t \quad (11.48)$$

积分这个方程并且使积分常数为零(为了使谐波解具有周期 $\tau=2\pi/\omega$),可以得到第 2 次近似的解为

$$x_2(t) = \frac{1}{\omega^2} \left(A\omega_0^2 \pm \frac{3}{4}A^3\alpha - F \right) \cos \omega t \pm \frac{A^3\alpha}{36\omega^6} \cos 3\omega t \quad (11.49)$$

达芬认为,如果 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 是 $x(t)$ 的较好近似,那么式(11.45)和式(11.49)中 $\cos \omega t$ 的系数不应该有很大的误差。因此令它们相等,则得到

$$A = \frac{1}{\omega^2} \left(A\omega_0^2 \pm \frac{3}{4}A^3\alpha - F \right)$$

或

$$\omega^2 = \omega_0^2 \pm \frac{3}{4}A^2\alpha - \frac{F}{A} \quad (11.50)$$

由于此处只是说明迭代法的过程,故可停止用二次近似解继续迭代。令 $\alpha=0$, 式(11.50)就退化为线性弹簧情况下的精确解:

$$A = \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (11.51)$$

这里, A 表示线性系统谐波响应的振幅。对于一个非线性系统(有 $\alpha \neq 0$), 方程(11.50)表示激励频率 ω 与 α 、 A 和 F 之间的函数关系。注意: A 在非线性系统中并不是谐波响应的振幅,而仅仅是它的解的第 1 项的系数。然而它通常被看作系统谐波响应的振幅。^① 对非线性自由振动,有 $F=0$, 则方程(11.50)退化为

$$\omega^2 = \omega_0^2 \pm \frac{3}{4}A^2\alpha \quad (11.52)$$

这个方程表示响应的频率,对于硬弹簧系统,随振幅的增加而增加;对于软弹簧系统,随振幅的增加而减少。方程(11.52)的解与采用 Lindstedt 方法得到的解(式(11.43))是完全相同的。

对于线性系统 and 非线性系统,当 $F \neq 0$ (强迫振动)时,对任何给定的振幅 $|A|$, 频率 ω 都有两个值:一个 ω 值比自由振动时该振幅对应的频率小,另一个 ω 值比自由振动时该振幅对应的频率大。对较小的 ω 值, $A > 0$, 系统的谐波响应和强迫力同相位;对较大的 ω 值, $A < 0$, 系统的谐波响应和强迫力反相位。注意:我们仅仅讨论了达芬方程的谐波解,即现在的分析只考虑了和外激励 $F \cos \omega t$ 频率相同的解。达芬方程还可能产生如 $\frac{1}{2}\omega, \frac{1}{3}\omega, \dots, \frac{1}{n}\omega$

① 可以看出,第一次近似的解即式(11.45)满足初始条件 $x(0)=A$ 和 $\dot{x}(0)=0$ 。

等分频响应。这样的振动称为**亚谐振动**,将在 11.5 节中讨论。

2. 阻尼方程的解

如果考虑黏性阻尼,可以得到达芬方程为

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \omega_0^2 x \pm \alpha x^3 = F \cos \omega t \quad (11.53)$$

对于阻尼系统,在前面的章节中我们已经观察到强迫力和响应之间有一个相位差。通常是首先规定强迫力的相位,然后再确定解的相位。然而为了方便起见,此处先固定解的相位,然后将强迫力的相位用一个待定的量来表示。把微分方程(11.53)写成

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \omega_0^2 x \pm \alpha x^3 = F \cos(\omega t + \phi) = A_1 \cos \omega t - A_2 \sin \omega t \quad (11.54)$$

强迫力的振幅 $F = (A_1^2 + A_2^2)^{1/2}$ 和比 $A_1/A_2 = \arctan \phi$ 是确定的。假设 c, A_1 和 A_2 都是 α 的同阶小量。与讨论方程(11.44)时的情况一样,假设第 1 阶近似解为

$$x_1 = A \cos \omega t \quad (11.55)$$

这里,假设 A 是固定的, ω 是待定的。把式(11.55)代入方程(11.54),利用关系式(11.47)得

$$\begin{aligned} & \left[(\omega_0^2 - \omega^2)A \pm \frac{3}{4}\alpha A^3 \right] \cos \omega t - c\omega A \sin \omega t \pm \frac{\alpha A^3}{4} \cos 3\omega t \\ &= A_1 \cos \omega t - A_2 \sin \omega t \end{aligned} \quad (11.56)$$

忽略含 $\cos 3\omega t$ 的项并且比较方程(11.56)两边 $\cos \omega t$ 和 $\sin \omega t$ 的系数,得到下列关系:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)A \pm \frac{3}{4}\alpha A^3 = A_1 \quad (11.57a)$$

$$c\omega A = A_2 \quad (11.57b)$$

把方程(11.57)的两边平方后相加,得到强迫力和常量 A 及 ω 之间的关系:

$$\left[(\omega_0^2 - \omega^2)A \pm \frac{3}{4}\alpha A^3 \right]^2 + (c\omega A)^2 = A_1^2 + A_2^2 = F^2 \quad (11.58)$$

方程(11.58)可以写成

$$S^2(\omega, A) + c^2 \omega^2 A^2 = F^2 \quad (11.59)$$

其中

$$S(\omega, A) = (\omega_0^2 - \omega^2)A \pm \frac{3}{4}\alpha A^3 \quad (11.60)$$

如果 $c=0$,则方程(11.59)退化为 $S(\omega, A)=F$,这与方程(11.50)是相同的。方程(11.59)的响应曲线如图 11.5 所示。

3. 跳跃现象

如前所述,非线性系统出现的跳跃现象在线性系统中是不会出现的。如图 11.6 所示,由方程(11.54)描述的系统的振幅会随着激励频率 ω 的增加或减少产生突然增加或减少的现象。对于一个确定的 F 值,当激励频率 ω 缓慢增加时,振幅将沿着曲线上点 1,2,3,4,5 变化,并且振幅在曲线上由点 3 跳跃到点 4。同样,当激励频率 ω 缓慢减少时,振幅将沿着

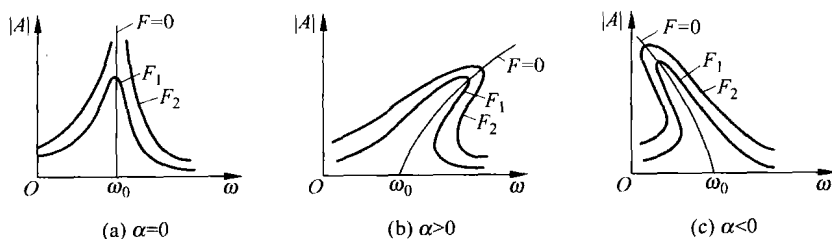


图 11.5 达芬方程的响应曲线

点 5, 4, 6, 7, 2, 1 变化, 并且振幅在曲线上由点 6 跳跃到点 7。这种行为称为跳跃现象。如图 11.6 中的阴影部分所示, 显然, 对于一个给定的激励频率, 对应两个振幅。在某种意义上, 阴影区的下边界曲线是不稳定的。因此, 跳跃现象的理解在数学上变成了周期解的稳定性分析。跳跃现象也可以通过实验研究观察到。

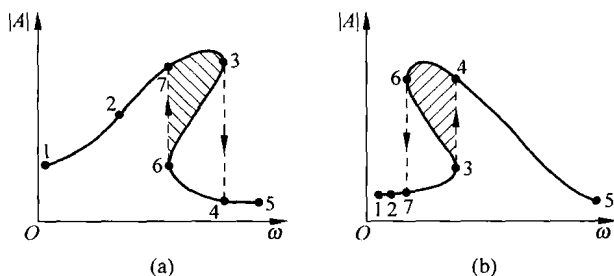


图 11.6 跳跃现象

(a) $\alpha > 0$ (硬弹簧); (b) $\alpha < 0$ (软弹簧)

11.4.4 李兹-伽辽金法

李兹-伽辽金法(Ritz-Galerkin)法是按平均法思想, 通过满足控制非线性微分方程得到问题的近似解。为了说明这种方法, 首先把非线性微分方程表达成

$$E[x] = 0 \quad (11.61)$$

假设方程(11.61)的一个近似解为

$$\underline{x}(t) = a_1 \phi_1(t) + a_2 \phi_2(t) + \cdots + a_n \phi_n(t) \quad (11.62)$$

这里, $\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t)$ 是假定的时间函数; a_1, a_2, \dots, a_n 是待定的权系数。如果把方程(11.62)代入方程(11.61), 可以得到函数 $E[\underline{x}(t)]$ 。由于一般来说 $\underline{x}(t)$ 不是方程(11.61)的精确解, 所以 $E(t) = E[\underline{x}(t)]$ 将不等于零。然而, $E[t]$ 的值可以作为近似解准确度的测量。事实上, 当 $E[t] \rightarrow 0$ 时, 有 $\underline{x} \rightarrow x$ 。

权系数 a_i 通过使下列积分的值最小确定:

$$\int_0^\tau \tilde{E}^2[t] dt \quad (11.63)$$

这里, τ 表示运动的周期。为使函数(11.63)的值最小, 需

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \left(\int_0^\tau \tilde{E}^2[t] dt \right) = 2 \int_0^\tau \tilde{E}[t] \frac{\partial \tilde{E}[t]}{\partial a_i} dt = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (11.64)$$

联立求解方程(11.64)表示的 n 个代数方程, 从而得到 a_1, a_2, \dots, a_n 。具体过程通过下面的例子说明。

例 11.1 利用 Ritz-Galerkin 法求单摆的运动微分方程

$$E[x] = \ddot{x} + \omega_0^2 x - \frac{\omega_0^2}{6} x^3 = 0 \quad (E.1)$$

的一阶近似解。

解: 假设 $x(t)$ 的一阶近似解为

$$\tilde{x}(t) = A_0 \sin \omega t \quad (E.2)$$

由方程(E.1)和方程(E.2)得到

$$\begin{aligned} E[\tilde{x}(t)] &= -\omega^2 A_0 \sin \omega t + \omega_0^2 \left[A_0 \sin \omega t - \frac{1}{6} \sin^3 \omega t \right] \\ &= \left(\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{1}{8} \omega_0^2 A_0^2 \right) A_0 \sin \omega t + \frac{\omega_0^2}{24} A_0^3 \sin 3\omega t \end{aligned} \quad (E.3)$$

采用 Ritz-Galerkin 法, 求

$$\int_0^\tau \tilde{E}^2[\tilde{x}(t)] dt \quad (E.4)$$

对 A_0 的最小值。利用方程(11.64)得到

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \tilde{E} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial A_0} dt &= \int_0^\tau \left[\left(\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{1}{8} \omega_0^2 A_0^2 \right) A_0 \sin \omega t + \frac{\omega_0^2}{24} A_0^3 \sin 3\omega t \right] \left[\left(\omega_0^2 - \omega^2 \right) \right. \\ &\quad \left. \left(-\frac{1}{8} \omega_0^2 A_0^2 \right) \sin \omega t + \frac{1}{8} \omega_0^2 A_0^2 \sin 3\omega t \right] dt = 0 \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} &A_0 \left(\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{1}{8} \omega_0^2 A_0^2 \right) \left(\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{3}{8} \omega_0^2 A_0^2 \right) \int_0^\tau \sin^2 \omega t dt \\ &+ \frac{\omega_0^2 A_0^3}{24} \left(\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{3}{8} \omega_0^2 A_0^2 \right) \int_0^\tau \sin \omega t \sin 3\omega t dt \\ &+ \frac{1}{8} \omega_0^2 A_0^2 \left(\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{3}{8} \omega_0^2 A_0^2 \right) \int_0^\tau \sin \omega t \sin 3\omega t dt \\ &+ \frac{\omega_0^4 A_0^5}{192} \int_0^\tau \sin^2 3\omega t dt = 0 \end{aligned}$$

即

$$A_0 \left[\left(\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{1}{8} \omega_0^2 A_0^2 \right) \left(\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{3}{8} \omega_0^2 A_0^2 \right) + \frac{\omega_0^4 A_0^4}{192} \right] = 0 \quad (E.5)$$

对非平凡解, $A_0 \neq 0$, 由方程(E. 5)得到

$$\omega^4 + \omega^2 \omega_0^2 \left(\frac{1}{2} A_0^2 - 2 \right) + \omega_0^4 \left(1 - \frac{1}{2} A_0^2 + \frac{5}{96} A_0^4 \right) = 0 \quad (\text{E. 6})$$

解关于 ω^2 的一元二次方程(E. 6), 可以得到

$$\omega^2 = \omega_0^2 (1 - 0.147\,938 A_0^2) \quad (\text{E. 7})$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 (1 - 0.352\,062 A_0^2) \quad (\text{E. 8})$$

可以验证, 方程(E. 7)确定的 ω^2 使式(E. 4)取得最小值, 而方程(E. 8)确定的 ω^2 使式(E. 4)取得最大值。因此由式(E. 2)给出的方程(E. 1)的解中

$$\omega^2 = \omega_0^2 (1 - 0.147\,938 A_0^2) \quad (\text{E. 9})$$

这个表达式和 Lindstedt 法的结果式(11. 43)以及迭代法的结果式(11. 52)比较接近:

$$\omega^2 = \omega_0^2 (1 - 0.125 A_0^2) \quad (\text{E. 10})$$

利用 $x(t)$ 的两项近似解可以改善解的精度:

$$\tilde{x}(t) = A_0 \sin \omega t + A_3 \sin 3\omega t \quad (\text{E. 11})$$

对于解(E. 11), 利用方程(11. 64)可以得到关于 A_0 和 A_3 的两个代数方程, 但必须采用数值方法求解。

其他近似方法, 例如等效线性化方法和谐波平衡法, 对于求解非线性振动问题也是非常有效的。^[11. 10~11. 12] 利用这些方法, 人们得到了单自由度系统的自由振动响应^[11. 13~11. 14]、两自由度系统自由振动的响应^[11. 15]、弹性梁的自由振动响应^[11. 16~11. 17]和受迫振动系统的瞬态响应^[11. 18~11. 19]。在文献[11. 30]中, Crandall 讨论了几个结构动力学中的非线性问题。

11.5 亚谐振动和超谐振动

在第 3 章中, 我们注意到对于线性系统, 当激励频率为某一确定值时, 稳态响应将具有与之相同的频率。然而, 非线性系统还会出现亚谐振动和超谐振动。亚谐振动的频率 ω_n 与激励频率 ω 的关系为

$$\omega_n = \frac{\omega}{n} \quad (11. 65)$$

这里, n 是整数, $n=2, 3, 4, \dots$ 。类似地, 超谐振动的频率 ω_n 与激励频率 ω 的关系为

$$\omega_n = n\omega \quad (11. 66)$$

这里, $n=2, 3, 4, \dots$ 。

11.5.1 亚谐振动

下面讨论下列方程确定的无阻尼摆的 $\frac{1}{3}$ 亚谐振动(无阻尼达芬方程):

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^3 = F \cos 3\omega t \quad (11.67)$$

这里, α 是小参数。采用摄动方法寻找下列形式的解:

$$x(t) = x_0(t) + \alpha x_1(t) \quad (11.68)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \alpha \omega_1 \quad \text{或} \quad \omega_0^2 = \omega^2 - \alpha \omega_1 \quad (11.69)$$

这里, ω 表示解的基频 (等于激励频率的 $\frac{1}{3}$)。把式 (11.68) 和式 (11.69) 代入式 (11.67) 得到

$$\begin{aligned} & \ddot{x}_0 + \alpha \ddot{x}_1 + \omega^2 x_0 + \omega^2 \alpha x_1 - \alpha \omega_1 x_0 - \alpha^2 x_1 \omega_1 + \alpha (x_0 + \alpha x_1)^3 \\ & = F \cos 3\omega t \end{aligned} \quad (11.70)$$

如果忽略含 α^2, α^3 和 α^4 的项, 式 (11.70) 简化为

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 + \alpha \ddot{x}_1 + \alpha \omega^2 x_1 - \alpha \omega_1 x_0 + \alpha x_0^3 = F \cos 3\omega t \quad (11.71)$$

首先考虑线性方程 (使 $\alpha=0$):

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = F \cos 3\omega t \quad (11.72)$$

式 (11.72) 的解可以表达为

$$x_0(t) = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t + C \cos 3\omega t \quad (11.73)$$

如果初始条件为 $x(t=0)=A$ 和 $\dot{x}(t=0)=0$, 可以得到 $A_1=A$ 和 $B_1=0$, 所以式 (11.73) 简化为

$$x_0(t) = A \cos \omega t + C \cos 3\omega t \quad (11.74)$$

这里, C 表示强迫振动的振幅。为确定 C 的值, 把式 (11.74) 代入式 (11.72), 令方程两边 $\cos 3\omega t$ 的系数相等, 得到

$$C = -\frac{F}{8\omega^2} \quad (11.75)$$

现在考虑式 (11.71) 中含 α 的项, 使它们等于零, 得

$$\alpha(\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 - \omega_1 x_0 + x_0^3) = 0$$

或

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \omega_1 x_0 - x_0^3 \quad (11.76)$$

把式 (11.74) 代入式 (11.76) 得到

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= \omega_1 A \cos \omega t + \omega_1 C \cos 3\omega t - A^3 \cos^3 \omega t - C^3 \cos^3 3\omega t \\ &\quad - 3A^2 C \cos^2 \omega t \cos 3\omega t - 3AC^2 \cos \omega t \cos^2 3\omega t \end{aligned} \quad (11.77)$$

利用下列三角恒等关系:

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 \theta &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \\ \cos^3 \theta &= \frac{3}{4} \cos \theta + \frac{1}{4} \cos 3\theta \\ \cos \theta \cos \phi &= \frac{1}{2} \cos(\theta - \phi) + \frac{1}{2} \cos(\theta + \phi) \end{aligned} \right\} \quad (11.78)$$

式(11.77)可以表示成

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = & A \left(\omega_1 - \frac{3}{4}A^2 - \frac{3}{2}C^2 - \frac{3}{4}AC \right) \cos \omega t \\ & + \left(\omega_1 C - \frac{A^3}{4} - \frac{3}{4}C^3 - \frac{3}{2}A^2 C \right) \cos 3\omega t \\ & - \frac{3}{4}AC(A+C) \cos 5\omega t - \frac{3AC^2}{4} \cos 7\omega t - \frac{C^3}{4} \cos 9\omega t\end{aligned}\quad (11.79)$$

在式(11.79)中消除长期项,使 $\cos \omega t$ 的系数等于零。由于在亚谐响应中 $A \neq 0$, 则

$$\omega_1 = \frac{3}{4}(A^2 + AC + 2C^2) \quad (11.80)$$

由式(11.80)和式(11.75)给出

$$\omega_1 = \frac{3}{4} \left(A^2 - \frac{AF}{8\omega^2} + \frac{2F^2}{64\omega^4} \right) \quad (11.81)$$

把式(11.81)代入式(11.69),整理后即可得到亚谐振动中 A 和 ω 满足的关系:

$$\omega^6 - \omega_0^2 \omega^4 - \frac{3\alpha}{256} (64A^2 \omega^4 - 8AF\omega^2 + 2F^2) = 0 \quad (11.82)$$

方程(11.82)可以看成是关于 ω^2 的三次方程和 A 的二次方程。图 11.7 表示由方程(11.82)给出的亚谐频率 ω 和振幅 A 之间的关系。由图可见,曲线 PQ 的斜率是正的,表示响应是稳定的;而曲线 QR 的斜率是负的,表示不稳定解。^[11.4, 11.6] 由 $d\omega^2/dA=0$ 得到 $A=(F/16\omega^2)^4$, 此式确定了稳定亚谐振动振幅的最小值。^①

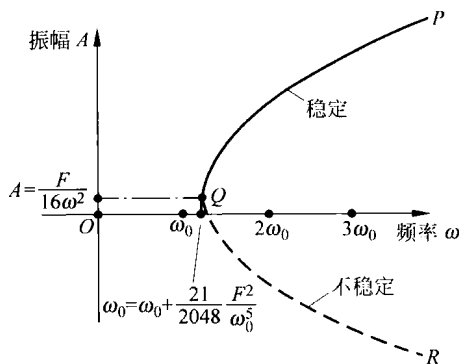


图 11.7 亚谐振动

11.5.2 超谐振动

考虑无阻尼达芬方程

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^3 = F \cos \omega t \quad (11.83)$$

这个方程的解可以假设为

$$x(t) = A \cos \omega t + C \cos 3\omega t \quad (11.84)$$

① 式(11.82)可以重写为

$$(\omega^2)^3 - \omega_0^2 (\omega^2)^2 - \frac{3\alpha}{4} A^2 (\omega^2)^2 + \frac{3\alpha F}{32} A (\omega^2) - \frac{3\alpha F^2}{128} = 0$$

对上式求导得

$$3(\omega^2)^2 d\omega^2 - 2\omega_0^2 \omega^2 d\omega^2 - \frac{3\alpha}{4} (2A dA) (\omega^2)^2 - \frac{3\alpha}{2} A^2 \omega^2 d\omega^2 + \frac{3\alpha F}{32} \omega^2 dA + \frac{3\alpha F}{32} A d\omega^2 = 0$$

令 $d\omega^2/dA=0$, 得 $A=(F/16\omega^2)$ 。

式中, A 和 C 分别是待定的谐波和超谐波分量的振幅。把方程(11.84)代入方程(11.83)并利用三角恒等关系(11.78), 得到

$$\begin{aligned} & \cos \omega t \left[-\omega^2 A + \omega_0^2 A + \frac{3}{4} \alpha A^3 + \frac{3}{4} \alpha A^2 C + \frac{3}{2} \alpha A C^2 \right] \\ & + \cos 3\omega t \left[-9\omega^2 C + \omega_0^2 C + \frac{1}{4} \alpha A^3 + \frac{3}{4} \alpha C^3 + \frac{3}{2} \alpha A^2 C \right] \\ & + \cos 5\omega t \left[\frac{3}{4} \alpha A^2 C + \frac{3}{4} \alpha A C^2 \right] + \cos 7\omega t \left[\frac{3}{4} \alpha A C^2 \right] \\ & + \cos 9\omega t \left[\frac{1}{4} \alpha C^3 \right] = F \cos \omega t \end{aligned} \quad (11.85)$$

忽略含 $\cos 5\omega t$, $\cos 7\omega t$ 和 $\cos 9\omega t$ 的项, 并令式(11.85)两边 $\cos \omega t$ 和 $\cos 3\omega t$ 的系数相等, 得

$$\omega_0^2 A - \omega^2 A + \frac{3}{4} \alpha A^3 + \frac{3}{4} \alpha A^2 C + \frac{3}{2} \alpha A C^2 = F \quad (11.86)$$

$$\omega_0^2 C - 9\omega^2 C + \frac{1}{4} \alpha A^3 + \frac{3}{4} \alpha C^3 + \frac{3}{2} \alpha A^2 C = 0 \quad (11.87)$$

可以利用数值方法联立求解式(11.86)和式(11.87)。

在特殊情况下, 如果 C 与 A 相比是比较小的, 则可以忽略含 C^2 和 C^3 的项, 由式(11.87)得

$$C \approx \frac{-\frac{1}{4} \alpha A^3}{\frac{3}{2} \alpha A^2 + \omega_0^2 - 9\omega^2} \quad (11.88)$$

而由式(11.86)得

$$C \approx \frac{F - \omega_0^2 A + \omega^2 A - \frac{3}{4} \alpha A^3}{\frac{3}{4} \alpha A^2} \quad (11.89)$$

由式(11.88)和式(11.89)中的 C 相等, 得

$$\left(-\frac{1}{4} \alpha A^3 \right) \left(\frac{3}{4} \alpha A^2 \right) = \left(\frac{3}{2} \alpha A^2 + \omega_0^2 - 9\omega^2 \right) \left(F - \omega_0^2 A + \omega^2 A - \frac{3}{4} \alpha A^3 \right) \quad (11.90)$$

这个方程可以重新写成

$$\begin{aligned} & -A^5 \left(\frac{15}{16} \alpha^2 \right) + A^3 \left(\frac{33}{4} \alpha \omega^2 - \frac{9}{4} \alpha \omega_0^2 \right) + A^2 \left(\frac{3}{2} \alpha F \right) \\ & + A(10\omega^2 \omega_0^2 - 9\omega^4 - \omega_0^4) + (\omega_0^2 F - 9\omega^2 F) = 0 \end{aligned} \quad (11.91)$$

方程(11.88)与方程(11.91)给出了超谐振动振幅 C 和相应频率 3ω 之间的关系。

11.6 变参数系统(马休方程)

考虑图 11.8(a)所示的单摆。设支点在铅垂方向作如下形式的简谐运动:

$$y(t) = Y \cos \omega t \quad (11.92)$$

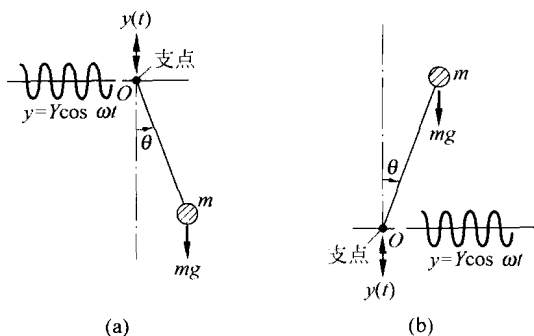


图 11.8 带运动支承的单摆

这里, Y 是振幅, ω 是频率。因为整个系统具有铅垂方向的加速度, 所以实际加速度为 $g - \ddot{y}(t) = g - \omega^2 Y \cos \omega t$ 。单摆的运动微分方程可以写成

$$ml^2 \ddot{\theta} + m(g - \ddot{y})l \sin \theta = 0 \quad (11.93)$$

对于接近于 $\theta=0$ 的小角度, $\sin \theta \approx \theta$, 方程(11.93)简化为

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l} - \frac{\omega^2 Y}{l} \cos \omega t \right) \theta = 0 \quad (11.94)$$

如果是如图 11.8(b)所示的倒立摆, 则运动微分方程为

$$ml^2 \ddot{\theta} - mgl \sin \theta = 0$$

或

$$\ddot{\theta} - \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (11.95)$$

这里, 角 θ 是从不稳定的竖直位置量起的。如果支点 O 以 $y(t) = Y \cos \omega t$ 作简谐振动, 则运动微分方程变为

$$\ddot{\theta} + \left(-\frac{g}{l} + \frac{\omega^2 Y}{l} \cos \omega t \right) \sin \theta = 0 \quad (11.96)$$

对于 $\theta=0$ 附近的微小角位移, 式(11.96)可以简化为

$$\ddot{\theta} + \left(-\frac{g}{l} + \frac{\omega^2 Y}{l} \cos \omega t \right) \theta = 0 \quad (11.97)$$

式(11.94)和式(11.97)中, θ 的系数是随时间变化的, 这构成了一类特殊的非自治齐次微分方程, 称为马休(Mathieu)方程。下面用 Lindstedt 摄动方法求马休方程的周期解^[11.7]和 Y 是小值时系统的稳定性特征。

考虑下列形式的马休方程:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (a + \epsilon \cos t) y = 0 \quad (11.98)$$

这里假设 ϵ 是小参数。设式(11.98)的近似解为

$$y(t) = y_0(t) + \epsilon y_1(t) + \epsilon^2 y_2(t) + \cdots \quad (11.99)$$

$$a = a_0 + \epsilon a_1 + \epsilon^2 a_2 + \cdots \quad (11.100)$$

这里, a_0, a_1, a_2, \dots 是常数。由于方程(11.98)中周期系数 $\cos t$ 的周期是 2π , 因此只存在周期为 2π 和周期为 4π 的解^[11.7, 11.28]。我们采用这样一种方法来寻找式(11.99)中的函数 $y_0(t), y_1(t)$, 使得到的 $y(t)$ 就是式(11.98)的周期为 2π 或周期为 4π 的解。把式(11.99)和式(11.100)代入式(11.98)得到

$$\begin{aligned} & (\ddot{y}_0 + a_0 y_0) + \epsilon(\ddot{y}_1 + a_1 y_0 + y_0 \cos t + a_0 y_1) \\ & + \epsilon^2(\ddot{y}_2 + a_2 y_0 + a_1 y_1 + y_1 \cos t + a_0 y_2) + \cdots = 0 \end{aligned} \quad (11.101)$$

这里, $\ddot{y}_i = d^2 y_i / dt^2, i=0, 1, 2, \dots$ 。在式(11.101)中令 ϵ 的各次幂系数等于零, 得到

$$\epsilon^0: \ddot{y}_0 + a_0 y_0 = 0 \quad (11.102)$$

$$\epsilon^1: \ddot{y}_1 + a_0 y_1 + a_1 y_0 + y_0 \cos t = 0 \quad (11.103)$$

$$\epsilon^2: \ddot{y}_2 + a_0 y_2 + a_2 y_0 + a_1 y_1 + y_1 \cos t = 0 \quad (11.104)$$

⋮

在这里, 每一个函数 y_i 需要具有周期 2π 或 4π 。式(11.102)的解可以表达为

$$y_0(t) = \begin{cases} \cos \sqrt{a_0} t \\ \sin \sqrt{a_0} t \end{cases} \equiv \begin{cases} \cos \frac{n}{2} t, \\ \sin \frac{n}{2} t, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (11.105)$$

其中

$$a_0 = \frac{n^2}{4}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

现在考虑下列 n 的特殊值。

(1) $n=0$ 时的情形

对这种情形, 式(11.105) 给出 $a_0=0$ 和 $y_0=1$, 并且式(11.103)变成

$$\ddot{y}_1 + a_1 + \cos t = 0 \quad \text{或} \quad \ddot{y}_1 = -a_1 - \cos t \quad (11.106)$$

为了使 y_1 成为周期函数, a_1 必须为零。将式(11.106) 积分两次, 得到周期解的表达式为

$$y_1(t) = \cos t + \alpha \quad (11.107)$$

这里, α 是常数。把 $a_0=0, a_1=0, y_0=1$ 和 $y_1=\cos t + \alpha$ 代入式(11.104), 得到

$$\ddot{y}_2 + a_2 + (\cos t + \alpha) \cos t = 0$$

或

$$\ddot{y}_2 = -\frac{1}{2} - a_2 - \alpha \cos t - \frac{1}{2} \cos 2t \quad (11.108)$$

为了使 y_2 成为周期函数, $\left(-\frac{1}{2} - a_2\right)$ 必须为零 (即 $a_2 = -\frac{1}{2}$)。因此对 $n=0$, 式(11.100)成为

$$a = -\frac{1}{2}\epsilon^2 + \dots \quad (11.109)$$

(2) $n=1$ 时的情形

对这种情形, 式(11.105)给出 $a_0 = \frac{1}{4}$, $y_0 = \cos(t/2)$ 或 $y_0 = \sin(t/2)$ 。对 $y_0 = \cos(t/2)$, 由式(11.103)得到

$$\ddot{y}_1 + \frac{1}{4}y_1 = \left(-a_1 - \frac{1}{2}\right)\cos \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\cos \frac{3t}{2} \quad (11.110)$$

式(11.110)的齐次解可以假设为

$$y_1(t) = A_1 \cos \frac{t}{2} + A_2 \sin \frac{t}{2}$$

这里, A_1 和 A_2 是积分常数。由于激励函数和齐次解函数同时出现 $\cos(t/2)$, 所以特解包含 $t\cos(t/2)$, 这不是周期的。因此, 激励函数中 $\cos(t/2)$ 的系数 $(-a_1 - 1/2)$ 必须为零, 得到 $a_1 = -1/2$, 式(11.110)变成

$$\ddot{y}_1 + \frac{1}{4}y_1 = -\frac{1}{2}\cos \frac{3t}{2} \quad (11.111)$$

把亚谐特解 $y_1(t) = A_2 \cos(3t/2)$ 代入式(11.111), 得到 $A_2 = \frac{1}{4}$, 因此 $y_1(t) = \frac{1}{4}\cos(3t/2)$ 。把 $a_0 = \frac{1}{4}$, $a_1 = -\frac{1}{2}$ 和 $y_1 = \frac{1}{4}\cos(3t/2)$ 代入式(11.104), 得到

$$\begin{aligned} \ddot{y}_2 + \frac{1}{4}y_2 &= -a_2 \cos \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\cos \frac{3t}{2}\right) - \left(\frac{1}{4}\cos \frac{3t}{2}\right)\cos t \\ &= \left(-a_2 - \frac{1}{8}\right)\cos \frac{t}{2} + \frac{1}{8}\cos \frac{3t}{2} - \frac{1}{8}\cos \frac{5t}{2} \end{aligned} \quad (11.112)$$

由于式(11.112)的齐次通解包含 $\cos(t/2)$ 项, 所以式(11.112)中右边 $\cos(t/2)$ 的系数必须为零, 由此得到 $a_2 = -\frac{1}{8}$ 。因此, 式(11.100)变成

$$a = \frac{1}{4} - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon^2}{8} + \dots \quad (11.113a)$$

同样, 对 $y_0 = \sin(t/2)$, 得到关系式 (见习题 11.17)

$$a = \frac{1}{4} + \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon^2}{8} + \dots \quad (11.113b)$$

(3) $n=2$ 时的情形

对这种情形, 式(11.105)给出 $a_0 = 1$, $y_0 = \cos t$ 或 $y_0 = \sin t$ 。把 $a_0 = 1$ 和 $y_0 = \cos t$ 代入式(11.103), 得到

$$\ddot{y}_1 + y_1 = -a_1 \cos t - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t \quad (11.114)$$

根据消除式(11.114)长期项的条件得到 $a_1 = 0$ 。由此, 式(11.114)的特解可以假设为 $y_1(t) =$

$A_3 + B_3 \cos 2t$ 。将其代入式(11.114),可得 $A_3 = -\frac{1}{2}$ 和 $B_3 = \frac{1}{6}$ 。因此式(11.104)变成

$$\ddot{y}_2 + y_2 + a_2 \cos t + y_1 \cos t = 0$$

或

$$\begin{aligned} \ddot{y}_2 + y_2 &= -a_2 \cos t - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cos 2t\right) \cos t \\ &= \cos t \left(-a_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\right) + \frac{1}{2} \cos 3t \end{aligned} \quad (11.115)$$

根据消除式(11.115)长期项的条件得到 $a_2 = \frac{5}{12}$ 。因此

$$a = 1 + \frac{5}{12}\epsilon^2 + \dots \quad (11.116a)$$

同样,对 $y_0 = \sin t$ 可得(见习题 11.17)

$$a = 1 - \frac{1}{12}\epsilon^2 + \dots \quad (11.116b)$$

为了观察系统的稳定性特征,把式(11.109)、式(11.113)和式(11.116)在平面(a, ϵ)上画出,如图 11.9 所示。

这些方程所代表的曲线称为**边界曲线**或**转迁曲线**,它们把平面(a, ϵ)分割成稳定区域和不稳定区域。属于这些边界线上的点表示式(11.98)的一个周期解。还可以研究这些周期解的稳定性^[11.7, 11.25, 11.28]。在图 11.9 中,阴影区代表不稳定区,非阴影区代表稳定区。从图中可以看出,稳定区域 a 也可能取为负数,它对应于 $\theta = 180^\circ$ 的平衡位置。因此如果参数选择正确,可以通过使支点作简谐运动,使单摆运动到铅垂位置成倒摆形式而仍然保持稳定。

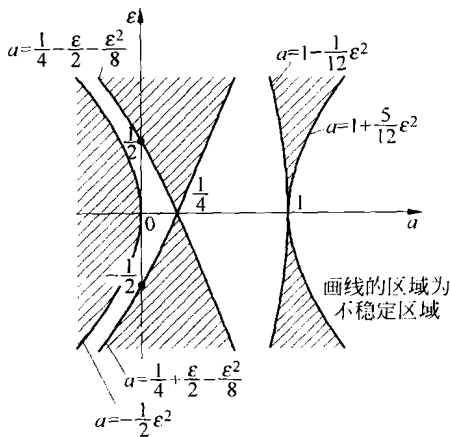


图 11.9 周期解的稳定性

11.7 图解法

11.7.1 相平面法

图解法可以获得非线性系统动力学特性的定性信息,也可以用来对运动微分方程进行积分。首先考虑相平面的基本概念。对于单自由度系统,两个变量就可以完全描述运动的状态。这些变量通常选作系统的运动位移和速度。以这些变量作为坐标轴时,相应的运动图形表示方法称为相平面法。因此,相平面上的每一点都表示系统可能的状态。随着时间的变化,系统的状态也在变化。相平面上一个代表性的点(例如代表 $t=0$ 时刻系统状态的

点)的运动轨线称作轨线。轨线表示系统的解随时间是如何变化的。

例 11.2 画出简单谐波振子的轨线。

解: 无阻尼线性系统的运动微分方程为

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (\text{E. 1})$$

令 $y = \dot{x}$, 式(E. 1)可以写成

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -\omega_n^2 x \\ \frac{dx}{dt} &= y \end{aligned} \right\} \quad (\text{E. 2})$$

由式(E. 2)得

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\omega_n^2 x}{y} \quad (\text{E. 3})$$

式(E. 3)的积分为

$$y^2 + \omega_n^2 x^2 = c^2 \quad (\text{E. 4})$$

这里, c 是积分常数, 由系统的初始条件确定。式(E. 4)表示系统在相平面($x-y$ 平面)上的轨线是一族椭圆, 如图 11.10 所示。可以看到, 由闭轨线包围着一个点($x=0, y=0$), 这个点称为**中心**。轨线运动的方向可以由方程(E. 2)确定。例如, 如果 $x>0, y>0$, 式(E. 2)隐含着 $dx/dt>0, dy/dt<0$, 因此运动是顺时针方向的。

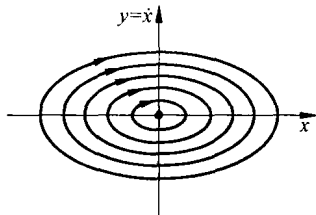


图 11.10 简单谐波振子的轨线

例 11.3 作无阻尼单摆的轨线。

解: 由式(11.1)得运动微分方程为

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin \theta \quad (\text{E. 1})$$

这里, $\omega_0^2 = g/l$ 。引进变量 $x = \theta$ 和 $y = \dot{x} = \dot{\theta}$, 式(E. 1)可以重新写为

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\omega_0^2 \sin x$$

或

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\omega_0^2 \sin x}{y}$$

或

$$y dy = -\omega_0^2 \sin x dx \quad (\text{E. 2})$$

积分式(E. 2)并利用条件 $x=x_0$ 时, $\dot{x}=0$ (在摆动的极限位置时), 得到

$$y^2 = 2\omega_0^2 (\cos x - \cos x_0) \quad (\text{E. 3})$$

引进变量 $z = y/\omega_0$, 式(E. 3)可以表达为

$$z^2 = 2(\cos x - \cos x_0) \quad (\text{E. 4})$$

由式(E.4)表示的轨线如图 11.11 所示。

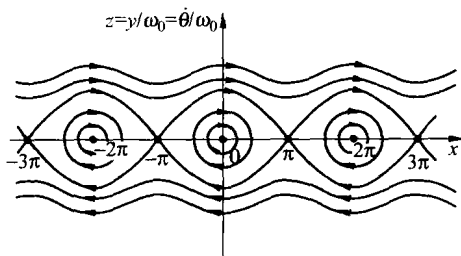


图 11.11 无阻尼单摆的轨线

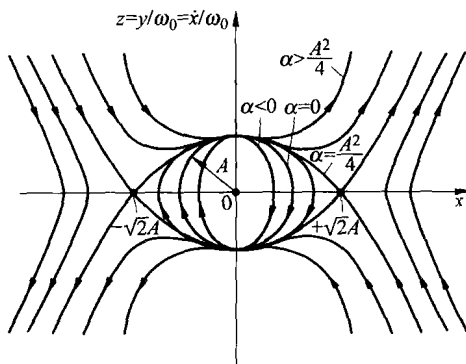


图 11.12 非线性系统的相轨线

例 11.4 画出下列非线性弹簧-质量系统的轨线：

$$\ddot{x} + \omega_0^2(x - 2\alpha x^3) = 0 \quad (\text{E.1})$$

解：非线性摆方程可以看作式(E.1)的特殊情况。可以看出,对例 11.3 中的式(E.1),在 $\theta=0$ 附近有 $\sin \theta \simeq \theta - \theta^3/6$, 得到

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right) = 0$$

它可以看作式(E.1)的特殊情况。式(E.1)可以改写为

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\omega_0^2(x - 2\alpha x^3)$$

或

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\omega_0^2(x - 2\alpha x^3)}{y}$$

或

$$ydy = -\omega_0^2(x - 2\alpha x^3)dx \quad (\text{E.2})$$

积分式(E.2),利用条件 $x=x_0$ 时 $\dot{x}=0$ (对于单摆,相当于摆动到极限位置时),得到

$$z^2 + x^2 - \alpha x^4 = A^2 \quad (\text{E.3})$$

这里, $z = y/\omega_0$; $A^2 = x_0^2(1 - \alpha x_0^2)$ 是积分常数。由式(E.3)得到的相平面轨线如图 11.12 所示。

可以观察到 $\alpha=0$ 时,式(E.3)表示半径为 A 的圆,它对应简谐振动。当 $\alpha<0$ 时,式(E.3)对应 $\alpha=0$ 圆内的椭圆,并且椭圆在点 $(0, \pm A)$ 和圆相切。当 $\alpha=(1/4)A^2$ 时,式(E.3)变成

$$y^2 + x^2 - \frac{x^4}{4A^2} - A^2 = \left[y - \left(A - \frac{x^2}{2A}\right)\right]\left[y + \left(A - \frac{x^2}{2A}\right)\right] = 0 \quad (\text{E.4})$$

式(E.4)表明,系统的轨线可以由抛物线表示,即

$$y = \pm \left(A - \frac{x^2}{2A} \right) \quad (\text{E. } 5)$$

这两条抛物线的交点($x = \pm\sqrt{2}A, y=0$), 对应着不稳定的平衡点, 称为鞍点。

当 $(1/4)A^2 \geq \alpha \geq 0$ 时, 式(E. 3)所代表的轨线是位于 $\alpha=0$ 对应的圆与 $\alpha=(1/4)A^2$ 对应的两条抛物线之间的椭圆。由于轨线是封闭的曲线, 所以它们对应系统的周期振动。当 $\alpha > (1/4)A^2$ 时, 式(E. 3)的轨线位于两条抛物线所围成的区域之外, 并延伸到无穷远外。这些轨线对应着允许物体离开其平衡位置的条件。

为了了解轨线的一些特征, 考虑一个由如下形式的控制微分方程描述的单自由度非线性振动系统:

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0 \quad (11.117)$$

通过定义

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = y \quad (11.118)$$

和

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} = -f(x, y) \quad (11.119)$$

可得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = -\frac{f(x, y)}{y} = \phi(x, y) \quad (11.120)$$

因此, 在相平面上的每一个点(x, y)都有唯一一个斜率, 只要 $\phi(x, y)$ 是确定的。如果 $y=0$ 且 $f \neq 0$ (即如果点位于 x 轴), 则轨线的斜率是无穷大的。这就是说, 所有相轨线与横坐标轴正交。如果 $y=0$ 且 $f=0$, 则这个点称为奇点。在奇点处斜率不确定。奇点对应着系统的一个平衡状态。在奇点处, 系统的速度 $y=\dot{x}$ 和加速度 $\ddot{x} = -f$ 均为零, 必须进行进一步的研究, 以说明奇点所代表的平衡状态是稳定的还是不稳定的。

11.7.2 相速度

点沿轨线运动的速度 v 称为相速度。相速度沿 x 轴和 y 轴方向的分量为

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y} \quad (11.121)$$

相速度 v 的大小为

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \quad (11.122)$$

显然, 如果系统具有周期运动, 那么它的轨线在相平面上是一条封闭曲线。这是因为从轨线上任意位置(x, y)出发的点, 经过一个周期后将回到运动开始的位置。该点沿着封闭轨线运动 1 周所需的时间(即系统的振动周期)是有限的, 因为在轨线上任何位置点的相速度都是一个不为零的值。

11.7.3 绘制相轨线的方法

下面讨论绘制单自由度动力学系统相轨线的等倾线法。把系统的运动微分方程写成如下形式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (11.123)$$

其中, f_1 和 f_2 是 x 和 $y = \dot{x}$ 的非线性函数。由式(11.123)得积分曲线满足的方程为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_2(x, y)}{f_1(x, y)} = \phi(x, y) \quad (11.124)$$

对于某一个固定的 c 值, 下列方程所确定的曲线称为等倾线:

$$\phi(x, y) = c \quad (11.125)$$

不难看出, 等倾线是相轨线上切线斜率等于常数 c 的点的轨迹。在利用等倾线法时, 首先给斜率 dy/dx 一个确定的常数 c_1 , 然后再利用式(11.125)确定轨线。显然, 曲线 $\phi(x, y) - c_1 = 0$ 就代表相平面中的等倾线。给定斜率 $\phi = dy/dx$ 不同的值, 就可以得到一族等倾线。在图 11.13(a) 中, 这些等倾线用 h_1, h_2, \dots 表示。不失一般性, 假设想绘制经过等倾线 h_1 上点 R_1 的轨线。为此首先过点 R_1 作两条线段: 一条的斜率为 c_1 且与 h_2 相交于点 R'_2 , 另一条的斜率为 c_2 且与 h_2 相交于点 R''_2 。 h_2 上点 R'_2 和点 R''_2 的中点用点 R_2 表示。以点 R_2 为起点, 重复上述过程, 找到 h_3 上的点 R_3 。依此类推, 直到所得的以 $R_1 R_2, R_2 R_3, R_3 R_4, \dots$ 为边的折线可以看作是过点 R_1 的实际轨线的近似。显然, 所作等倾线的数目越多, 用这种作图法所得的相轨线的近似程度越好。图 11.13(b) 给出了一个用这种方法确定的完整的相轨线。

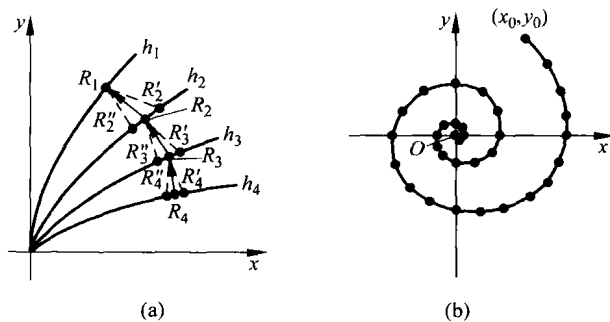


图 11.13 等倾线法

例 11.5 利用等倾线法作简谐振子的相轨线。

解：简谐振子的相轨线方程为例 11.2 中的式 (E. 3)，所以等倾线族可以由下式定义：

$$c = -\frac{\omega_n^2 x}{y} \quad \text{或} \quad y = \frac{-\omega_n^2}{c} x \quad (\text{E. 1})$$

这个方程代表了一族经过坐标原点的直线。其中, c 是轨线在等倾线上的斜率。式 (E. 1) 所代表的等倾线如图 11.14 所示。一旦知道了这些等倾线, 就可以按照上面的步骤画出轨线。

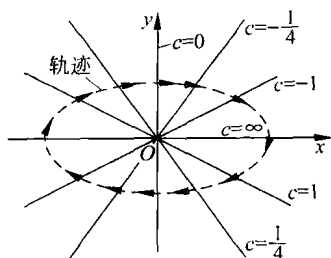


图 11.14 简谐振子的等倾线

11.7.4 根据相轨线求时域解

相平面中的相轨线是 \dot{x} 作为 x 的函数所对应的曲线, 并没有显式地出现时间 t 。对于系统的定性分析, 相轨线所反映的系统特性是足够的。但在某些情况下, 也需要知道振动位移随时间 t 的变化规律。这可以借助于相图得到, 即使不能通过原始运动微分方程求解。基于相图求时域解是一个逐步的过程。有几种方法可以利用, 在这一部分所介绍的方法基于关系 $\dot{x} = \Delta x / \Delta t$ 。

对于小的位移增量 Δx 和时间增量 Δt , 平均速度可取为 $\dot{x}_{av} = \Delta x / \Delta t$, 故

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{\dot{x}_{av}} \quad (11.126)$$

在图 11.15 所示的相轨线中, 与位移增量 Δx_{AB} 对应的时间用 Δt_{AB} 表示。如果 \dot{x}_{AB} 表示在 Δt_{AB} 内的平均速度, 则有 $\Delta t_{AB} = \Delta x_{AB} / \dot{x}_{AB}$ 。类似地有 $\Delta t_{BC} = \Delta x_{BC} / \dot{x}_{BC}$ 等。如果知道 Δt_{AB} , $\Delta t_{BC} \dots$ 则时域解可以像图 11.15(b) 所示的那样很容易地画出。显然, 为了得到较好的近似, 位移增量 $\Delta x_{AB} \Delta x_{BC} \dots$ 必须取得足够小, 以保证相应的速度增量和时间增量也足够小。注意: 位移增量 Δx 可以不取常数, 根据相轨线的特点其值可以变化。

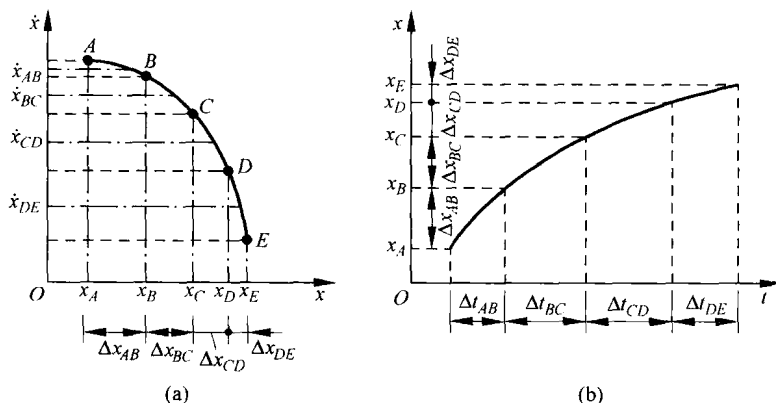


图 11.15 根据相图求时域解

11.8 平衡状态的稳定性

11.8.1 稳定性分析

考虑用如下两个一阶常微分方程描述的单自由度非线性振动系统:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (11.127)$$

式中, f_1 和 f_2 是 x 和 y 的非线性函数。在相平面中, 相轨线的斜率为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{f_2(x, y)}{f_1(x, y)} \quad (11.128)$$

用 (x_0, y_0) 表示奇点, 也叫平衡点, 则在此处 dy/dx 为 $0/0$ 不定式的形式:

$$f_1(x_0, y_0) = f_2(x_0, y_0) = 0 \quad (11.129)$$

研究式(11.127)在奇点附近的行为称为平衡点的稳定性分析。不失一般性, 假设奇点在 $(0, 0)$ 。这是因为当把 x 和 y 轴分别平移到 x' 和 y' 时, 相轨线的斜率并不发生变化, 即

$$\begin{aligned} x' &= x - x_0 \\ y' &= y - y_0 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{dy'}{dx'} \end{aligned} \quad (11.130)$$

所以可以假设点 $(0, 0)$ 是奇点, 即

$$f_1(0, 0) = f_2(0, 0) = 0$$

将 f_1 和 f_2 在奇点处进行泰勒展开, 得

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x, y) = a_{11}x + a_{12}y + \text{高阶项} \\ \dot{y} &= f_2(x, y) = a_{21}x + a_{22}y + \text{高阶项} \end{aligned} \right\} \quad (11.131)$$

式中

$$a_{11} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial x} \right|_{(0,0)}, \quad a_{12} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial y} \right|_{(0,0)}, \quad a_{21} = \left. \frac{\partial f_2}{\partial x} \right|_{(0,0)}, \quad a_{22} = \left. \frac{\partial f_2}{\partial y} \right|_{(0,0)}$$

在原点 $(0, 0)$ 附近, x 和 y 都是小量; f_1 和 f_2 可以只用线性项近似。此时式(11.131)可以写为

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad (11.132)$$

可以期望, 式(11.132)的解与式(11.127)的解在几何上是相似的。假设式(11.132)的解为

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} e^{\lambda t} \quad (11.133)$$

式中, X, Y 和 λ 是常量。将式(11.133)代入式(11.132), 得下列特征值问题:

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11.134)$$

根据下列特征方程

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

可以求得两个特征根为

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2}(p \pm \sqrt{p^2 - 4q}) \quad (11.135)$$

式中, $p = a_{11} + a_{22}$, $q = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 。如果用

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{Bmatrix} \quad \text{及} \quad \begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix}$$

分别表示与 λ_1 和 λ_2 对应的特征向量, 方程(11.127)的解可以表示为(假设 $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$, 且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$)

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = C_1 \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{Bmatrix} e^{\lambda_1 t} + C_2 \begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} e^{\lambda_2 t} \quad (11.136)$$

式中, C_1 和 C_2 是两个任意常数。这里我们不加证明地给出以下结论:

如果 $p^2 - 4q < 0$, 则运动具有振动的属性;

如果 $p^2 - 4q > 0$, 则运动是非周期的;

如果 $p > 0$, 则系统是不稳定的;

如果 $p < 0$, 则系统是稳定的。

如果引入变换

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ Y_1 & Y_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix}$$

其中, \mathbf{T} 是振型矩阵; α 和 β 是正则坐标。则方程(11.132)可以解耦为

$$\begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \dot{\alpha} = \lambda_1 \alpha \\ \dot{\beta} = \lambda_2 \beta \end{cases} \quad (11.137)$$

方程(11.137)的解可以写成如下形式:

$$\begin{cases} \alpha(t) = e^{\lambda_1 t} \\ \beta(t) = e^{\lambda_2 t} \end{cases} \quad (11.138)$$

11.8.2 奇点的分类

根据式(11.135)中 λ_1 和 λ_2 的值, 奇点可以分成如下几类。

(1) λ_1 和 λ_2 均为实数且不相等 ($p^2 > 4q$)。此时, 由式(11.138)得

$$\alpha(t) = \alpha_0 e^{\lambda_1 t} \quad \text{及} \quad \beta(t) = \beta_0 e^{\lambda_2 t} \quad (11.139)$$

式中, α_0 和 β_0 分别是 α 和 β 的初始值。运动的属性依赖于 λ_1 和 λ_2 是同号还是反号。如果 λ_1 和 λ_2 同号 ($q > 0$), 此时的奇点称为**结点**。图 11.16(a) 中给出了 $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ (λ_1 和 λ_2 是负的实数或 $p < 0$) 相轨线的形状。式(11.139)表明, 在这种情况下当 t 趋于无穷时, 所有的轨线都趋向原点。所以此时的结点称为**稳定结点**。反之, 如果 $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ ($p > 0$), 则相图中箭头的指向就会发生变化, 此时的结点称为**不稳定结点**(图 11.16(b))。如果 λ_1 和 λ_2 是符号相反的实数 ($q < 0$), 则其中的一个解趋于原点而另一个解趋于无穷大, 此时的奇点称为**鞍点**, 它对应着系统的不稳定平衡点(图 11.16(d))。

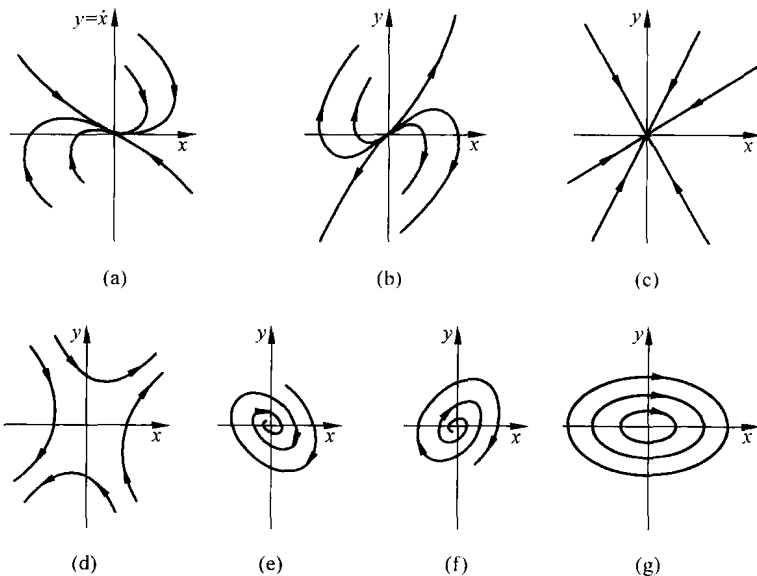


图 11.16 平衡点的分类

(a), (c) 稳定结点; (b) 不稳定结点; (d) 鞍点; (e) 稳定焦点; (f) 不稳定焦点; (g) 中心

(2) λ_1 和 λ_2 是相等的实数 ($p^2 = 4q$)。此时, 由式(11.138)得

$$\alpha(t) = \alpha_0 e^{\lambda_1 t} \quad \text{及} \quad \beta(t) = \beta_0 e^{\lambda_1 t} \quad (11.140)$$

对应的相轨线是经过原点的直线。当 $\lambda_1 < 0$ 时, 平衡点(原点)是稳定结点(图 11.16(c)); 当 $\lambda_1 > 0$ 时, 平衡点是不稳定结点。

(3) λ_1 和 λ_2 是共轭复数 ($p^2 < 4q$)。令 $\lambda_1 = \theta_1 + i\theta_2$, $\lambda_2 = \theta_1 - i\theta_2$, 其中 θ_1 和 θ_2 是实数, 由方程(11.137)得

$$\dot{\alpha} = (\theta_1 + i\theta_2)\alpha \quad \text{及} \quad \dot{\beta} = (\theta_1 - i\theta_2)\beta \quad (11.141)$$

这表明 α 和 β 也必然是复数。式(11.138)可以重写为

$$\alpha(t) = (\alpha_0 e^{i\theta_1 t}) e^{i\theta_2 t}, \quad \beta(t) = (\beta_0 e^{i\theta_1 t}) e^{-i\theta_2 t} \quad (11.142)$$

这些方程对应的是对数螺旋线,此时的平衡点称为焦点。既然 $\alpha(t)$ 中的幅值项 $e^{i\theta_2 t}$ 代表复平面中角速度为 θ_2 的单位旋转矢量,所以运动的稳定性由 $e^{i\theta_1 t}$ 决定。如果 $\theta_1 < 0$, 则运动是渐进稳定的,此时的平衡点为稳定焦点 ($p < 0, q > 0$)。如果 $\theta_1 > 0$, 则是不稳定焦点 ($p > 0, q > 0$)。 θ_2 的符号只是给出复数矢量的旋转方向。当 $\theta_2 > 0$ 时为逆时针方向;当 $\theta_2 < 0$ 时为顺时针方向。

如果 $\theta_1 = 0$ ($p = 0$), 复矢量 $\alpha(t)$ 的模将是一个常数,所以轨线退化为以平衡点(原点)为中心的圆。运动将是周期的,因而是稳定的。此时的平衡点称为中心,运动是稳定的而不是渐进稳定的。稳定焦点、不稳定焦点和中心分别如图 11.16 (e)~(g) 所示。

11.9 极限环

在某些有非线性阻尼的振动问题中,从原点附近或远离原点出发的轨线都趋于对应系统周期解的封闭曲线。这表明当 t 趋于无穷时,系统所有的解都趋于一个周期解。这条全部解都无限接近的封闭轨线称为极限环。

为了说明极限环的概念,考虑如下的范德波尔(Van der Pol)方程:

$$\ddot{x} - \alpha(1 - x^2) \dot{x} + x = 0, \quad \alpha > 0 \quad (11.143)$$

这个方程可以从数学上说明某些振动系统的基本特点,如某些电子管控制的反馈振荡电路中,能源随振幅的增加而增加。这个方程是范德波尔提出的,其阻尼具有这样的特点:对小振幅为负阻尼,但对大振幅则变成正阻尼。在这个方程中,他假设阻尼项是 $-(1 - x^2) \dot{x}$, 从而保证阻尼项的幅值与 x 的符号无关。

该方程解的定性性质依赖于参数 α 。尽管不能得到其解析解,但可以借助于等倾线法得到其相轨线。为此,将方程(11.143)改写成如下形式:

$$y = \dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad (11.144)$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \alpha(1 - x^2)y - x \quad (11.145)$$

所以相应于某一个特定斜率值 $dy/dx = c$ 的等倾线方程为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\alpha(1 - x^2)y - x}{y} = c$$

或写成

$$y + \left[\frac{x}{-\alpha(1 - x^2) + c} \right] = 0 \quad (11.146)$$

如图 11.17 所示,对于一组不同的 c 值,通过绘制方程(11.146)对应的曲线,可以相当精确地画出相轨

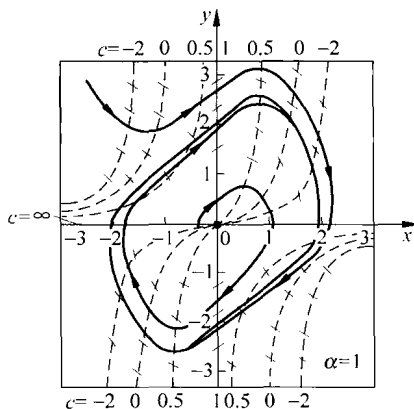


图 11.17 范德波尔的相轨线和极限环

线。显然,由于式(11.146)是非线性的,所以等倾线是曲线。有无数条等倾线通过原点,这反映了原点是一个奇点。

从图 11.17 可以看出解的一个有趣性质,即不管初始条件如何,全部相轨线都将渐进地趋于一条特殊的封闭曲线。该封闭曲线称为极限环,它代表着稳态周期运动(但不是简谐的)。这种特殊的现象只能在某些非线性振动问题中出现,而不会出现在任何线性振动问题中。如果初始条件在极限环的内部,则相应的解曲线以外螺旋的形式逼近极限环;反之,如果初始条件在极限环的外部,则相应的解曲线以内螺旋的形式逼近极限环。如上所述,在这种情况下,最终得到的都是该极限环。极限环的一个重要特点是不管 α 的取值为多少, x 的最大值总是接近于 2。这个结果可以用摄动法求解方程(11.143)得到验证。

11.10 混沌

混沌反映的是系统本身固有的不确定性。换句话说,混沌是指系统的这样一种动力学行为,即尽管该系统是用一个确定性的方程描述,但由于方程中的非线性会极度地扩大系统初始条件的偏差,所以其响应却具有不确定性。

1. 吸引子

为了说明吸引子的概念,可以考虑由于摩擦的存在振幅不断减小的单摆的运动。由于在每一个周期中都会损失部分能量,所以单摆最终会回到静平衡位置,如图 11.18(a)所示。这一点也可以借助于相轨线得到说明。单摆的静平衡位置称为它的吸引子。显然,单摆只有一个吸引子。如果在每一个摆动结束的位置推单摆,使单摆得到能量补给以补偿由于摩擦而引起的能量损耗,则单摆的运动在相平面上表现为一条封闭曲线,如图 11.18(b)所示。一般来说,一个动力学系统的吸引子是这样的一个点(或目标),随着时间的延续,附近的所有解都向其发展。

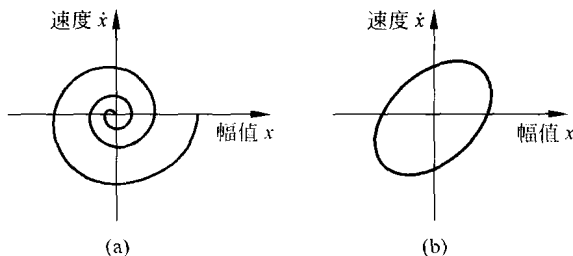


图 11.18 吸引子

2. 庞加莱截面

下面以单摆为例,说明庞加莱映射的概念。习惯上称单摆为一个二维系统:一维是位移 x ,一维是速度 \dot{x} 。一般来说,一个系统的维数定义为其相空间的维数。所以,一个三维系统的相轨线可能像图 11.19(a) 所示的那样,是一条沿 z 轴方向收敛的螺旋线。既然相轨线上的每一个点与其他点都有一个位置改变并且永远不会重合,所以系统没有周期运动。用 yz 平面去截相轨线,所得交点如图 11.19(b) 所示。此图称为**庞加莱截面**或**庞加莱映射**。显然,图中各点对应着相等的时间间隔 $nT(n=1,2,\cdots)$,其中 T 是激励函数的基频成分的周期。不难理解,如果系统具有周期运动,那么这些点将成为庞加莱截面中的同一个点。

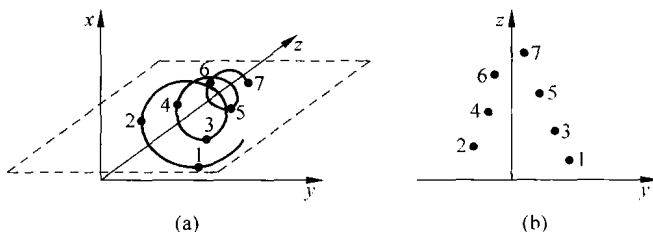


图 11.19 三维系统的相空间

11.10.1 具有稳定轨道的函数

考虑由下面的迭代方程产生的数列:

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n}, \quad n = 1, 2, \cdots \quad (11.147)$$

对于 x_1 的任意两个具有微小偏差的初值, x_{n+1} 的值都将收敛于 1。例如,当取 $x_1 = 10.0$ 和 $x_1 = 10.2$ 时,由式(11.147)给出的数列分别为

$$\begin{aligned} 10.0 &\rightarrow 3.1623 \rightarrow 1.7783 \rightarrow 1.3335 \rightarrow 1.1548 \rightarrow 1.0746 \rightarrow 1.0366 \rightarrow 1.0182 \\ &\rightarrow 1.0090 \rightarrow 1.0045 \rightarrow 1.0023 \rightarrow 1.0011 \rightarrow 1.0006 \rightarrow 1.0003 \rightarrow 1.0001 \rightarrow \\ &1.0001 \rightarrow 1.0000 \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} 10.2 &\rightarrow 3.1937 \rightarrow 1.7871 \rightarrow 1.3368 \rightarrow 1.1562 \rightarrow 1.0753 \rightarrow 1.0370 \rightarrow 1.0183 \\ &\rightarrow 1.0091 \rightarrow 1.0045 \rightarrow 1.0023 \rightarrow 1.0011 \rightarrow 1.0006 \rightarrow 1.0003 \rightarrow 1.0001 \rightarrow \\ &1.0001 \rightarrow 1.0000 \end{aligned}$$

不难看出, x_1 初值变化(0.2)的影响很快就消失了,而且按相同的模式收敛于 1。在 $0 \sim 1$ 之间的任何初值经过若干次迭代后也都将收敛于 1。所以说式(11.147)确定的函数关系在 $x=1$ 处有一个稳定的轨道。

11.10.2 具有不稳定轨道的函数

与式(11.147)对照,再考虑由下面的迭代方程产生的数列:

$$x_{n+1} = ax_n(1-x_n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (11.148)$$

式中, a 是一个常数。式(11.148)曾作为研究鱼类和鸟类在没有捕食者的情况下种群数量增长的模型。此时, a 代表种群数量的增长率; x_n 代表第 n 代的种群数量; $(1-x_n)$ 相当于一个稳定因子。可以看出, 式(11.148)有下列限制:

(1) x_1 的值必须在 $0 \sim 1$ 之间。如果 x_1 超过 1, 那么迭代过程将导致发散到 $-\infty$, 这意味着种群灭绝。

(2) 当 $x_n = \frac{1}{2}$ 时, x_{n+1} 有最大值 $\frac{a}{4}$, 这表明 $a < 4$ 。

(3) 如果 $a < 1$, 则 x_{n+1} 收敛于零。

(4) 当讨论系统的非平凡动力学行为时(避免种群灭绝), a 应该满足 $1 \leq a \leq 4$ 。

如果出生率和由于死亡或迁徙导致的损失率相抵, 则系统将达到一个平衡状态。此时对于一些 a 值, 例如 $a = 3.0$, 种群数量将达到一个确定的极限值。对于 a 的一些其他值, 例如 $a = 4.0$, 当 $x_1 = 0.5$ 时, 种群仅经过两代后就将消失。这可以通过下面的迭代结果得到说明。对 $a = 4.0$, 当 $x_1 = 0.5$ 时, 式(11.148)的迭代结果为

$$0.5 \rightarrow 1.0 \rightarrow 0.0 \rightarrow 0.0 \rightarrow 0.0 \rightarrow \dots$$

然而, 对 $a = 4.0$, 当 $x_1 = 0.4$ 时, 种群的数量却是完全随机的。此时式(11.148)的迭代结果为

$$\begin{aligned} &0.4 \rightarrow 0.96 \rightarrow 0.154 \rightarrow 0.520 \rightarrow 0.998 \rightarrow 0.006 \rightarrow 0.025 \rightarrow 0.099 \rightarrow \\ &0.358 \rightarrow 0.919 \rightarrow 0.298 \rightarrow 0.837 \rightarrow 0.547 \rightarrow 0.991 \rightarrow 0.035 \rightarrow 0.135 \rightarrow \\ &0.466 \rightarrow 0.996 \rightarrow 0.018 \rightarrow \dots \end{aligned}$$

这表明该系统是一个混沌系统。对于确定性方程(11.148), 即使是非常微小的改变也会导致不可预见的结果。它的物理意义是当每年种群数量的变化毫无规律时, 系统就进入了混沌。事实上, 正如将要在下面讨论的那样, 式(11.148)具有不稳定的轨道。

1. 分岔

式(11.148)还展示了一种被称为分岔的现象。为了说明此现象, 先取 $a = 2$ 和不同的 x_1 值。可以发现, 对于不同的 x_1 值, x_{n+1} 将收敛于 0.5。当取 $a = 2.5$ 时, 对于不同的 x_1 值, 迭代将收敛于 0.6。如果取 $a = 3.0$ 和 $x_1 = 0.1$, 迭代也将收敛。但在向最终值收敛的过程中, 是在两个值(0.68...和 0.65...)之间振荡。如果取 $a = 3.25$ 和 $x_1 = 0.5$, x_{n+1} 在收敛的过程中, 是在两个值 $x^{(1)} = 0.4952$ 和 $x^{(2)} = 0.8124$ 之间振荡。在这个点称系统是周期 2 的。在这种情况下, 解进入一种两支的叉形状态, 即具有两个平衡点。如果取 $a = 3.5$ 和 $x_1 = 0.5$, 系统是周期 4 的。即在这种情况下, 平衡状态在 4 个值 $x^{(3)} = 0.3828$, $x^{(4)} = 0.5008$, $x^{(5)} = 0.8269$, $x^{(6)} = 0.8749$ 之间振荡。这表明原来的两个稳态解发生了进一

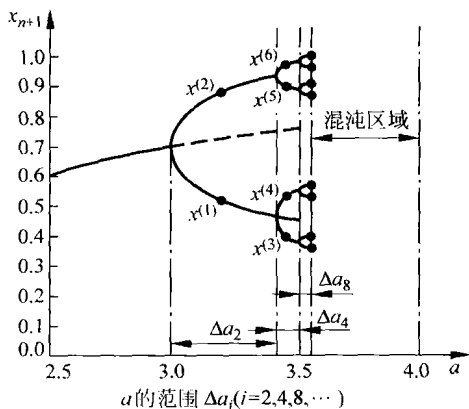


图 11.20 分岔图

步的分岔。事实上,系统将随着 a 的增加继续分岔,而分岔的区间越来越小,如图 11.20 所示。图 11.20 称为分岔图。可以看出,系统已经通过一系列的分岔进入了混沌状态。由式(11.148)得到的结果的数目在每个区间内都成倍增加。

2. 奇怪吸引子

曾经有一段时间,人们认为物理系统不断接近的吸引子就是平衡点(或静平衡位置)、极限环或不断重复的空间构形。然而近年来人们发现,与混沌系统有关的吸引子要比静平衡位置和极限环复杂得多。在相空间中,混沌轨道无限逼近的那些点称为奇怪吸引子。

11.10.3 没有激励项时达芬方程的混沌行为

作为一个含非线性弹簧力的典型问题,达芬系统在简谐激励作用下的运动微分方程为

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} - \alpha x + \beta x^3 = F_0 \cos \omega t \quad (11.149)$$

为简单起见,首先考虑没有阻尼和激励的情况,并取 $\alpha = \beta = 0.5$ 。由式(11.149)得

$$\ddot{x} - 0.5x + 0.5x^3 = 0 \quad (11.150)$$

根据弹簧力为零,可得 3 个静平衡位置: $x=0, x=+1, x=-1$ 。对上述平衡解施加无限小的扰动,容易验证,平衡点 $x=0$ 是不稳定的(鞍点),而 $x=-1, x=+1$ 是稳定的。以上 3 个平衡解的稳定性还可以通过系统的势能图得到更清楚的说明。为得到系统势能的表达式,用 \dot{x} 乘以式(11.150),并将所得结果积分,可得

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{8} x^4 - \frac{1}{4} x^2 = C \quad (11.151)$$

式中, C 是一个常数。式(11.151)左边的第 1 项代表系统的动能,第 2 项和第 3 项代表系统的势能。式(11.151)表明,系统的动能与势能的和是一个常数(保守系统)。系统势能随振动位移的变化如图 11.21 所示。

现在讨论该系统的无阻尼自由振动。此时的控制方程为

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} - 0.5x + 0.5x^3 = 0 \quad (11.152)$$

并假设初始条件如下:

$$x(t=0) = x_0, \quad \dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 \quad (11.153)$$

根据图 11.21 不难想象,静平衡位置 $x=0$ 在有限扰动下是不稳定的。它的物理意义是,一个平衡点受到有限的扰动

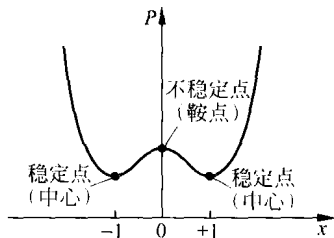


图 11.21 系统势能的变化

后,系统将运动到另外一个平衡位置。事实上,系统的稳态解对初始条件是相当敏感的,乃至系统产生混沌运动。容易验证,对应于初始条件 $x_0=1$ 和 $0<\dot{x}_0<0.521\ 799$,系统的稳态解是 $x(t\rightarrow\infty)=+1$ 。当 $\dot{x}_0=0.52$ 时,系统的相轨线如图 11.22(a)所示。注意:此时对所有的时间 t ,均有 $x>0$ 。对应于初始条件 $x_0=1$ 和 $0.521\ 799<\dot{x}_0<0.5572$,系统的稳态解是 $x(t\rightarrow\infty)=-1$ 。当 $\dot{x}_0=0.54$ 时,系统的相轨线如图 11.22(b)所示。可以看出,相轨线只有一次穿过直线 $x=0$ 。对应于初始条件 $0.5572<\dot{x}_0<0.5952$,系统的稳态解是 $x(t\rightarrow\infty)=+1$ 。当 $\dot{x}_0=0.56$ 时,系统的相轨线如图 11.22(c)所示。可以看出,相轨线两次穿过直线 $x=0$ 。

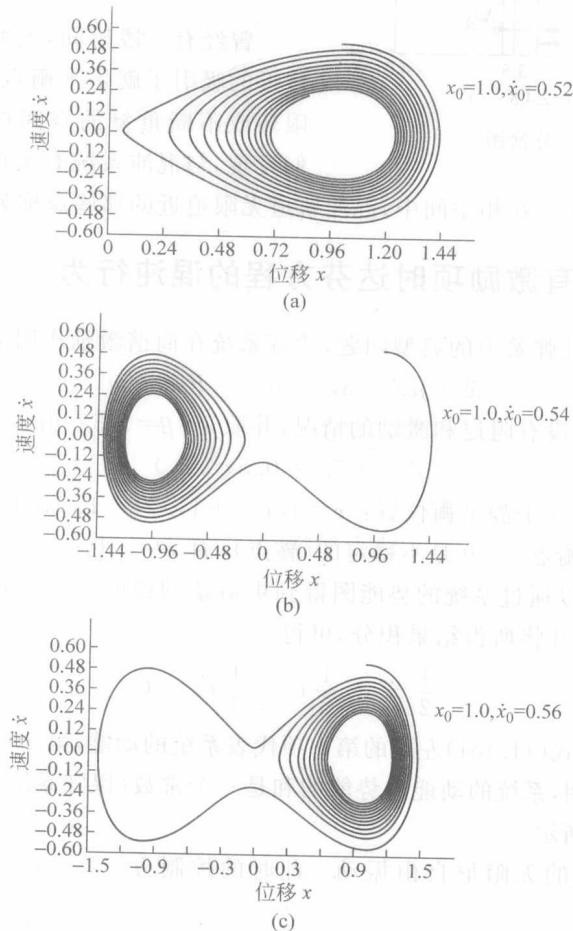


图 11.22 不同初始条件对应的轨线

(引自参考文献[11, 32], 经 Society of Industrial and Applied Mathematics 以及 Dowell E H 和 Pierre C 授权使用)

事实上,通过给 x_0 一系列不同的值,我们就能够得到如图 13.23 所示的壳形相图。从这个图可以看出,依赖于初始条件 x_0 和 \dot{x}_0 ,稳态解是 $+1$ 或 -1 。此外,还可以发现整个相

平面可以分为用数字 $0, 1, 2, \dots$ 进行标记的不同区域。首先考虑当 $x_0 \geq 0$ 时的区域“0”。若初始条件落在这个区域,则解曲线将螺旋地趋于 $x=+1$ (当 $t \rightarrow \infty$), 并且不经过直线 $x=0$ (与图 13.22(a) 相似)。接下来, 考虑标号为“1”的区域。若初始条件落在这个区域, 则解曲线将顺时针地趋于 $x=-1$ (当 $t \rightarrow \infty$), 并且经过直线 $x=0$ 一次 (与图 13.22(b) 相似)。再考虑标号为“2”的区域。若初始条件落在这个区域, 则解曲线将顺时针地趋于 $x=+1$ (当 $t \rightarrow \infty$), 并且经过直线 $x=0$ 两次 (与图 13.22(c) 相似)。标号为其他值的区域, 将继续重复这种模式, 该区域的标号代表轨线经过直线 $x=0$ 的次数。

图 11.23 表明, 如果初始条件 x_0 和 \dot{x}_0 具有足够的不确定性, 那么系统最终的状态究竟是 $x=1$ 还是 $x=-1$, 则是不可预见的, 亦即不确定的。如果进一步减小阻尼, 那么图 11.23 中每一个域 (标号为“0”的区域除外) 的宽度将变得更小, 且当 $\mu \rightarrow 0$ 时最终消失。所以当 $\mu \rightarrow 0$ 时, 对 x_0 , \dot{x}_0 或两者的任何有限的不确定性, 系统最终的状态是不可预测的。这意味着系统进入了混沌状态。

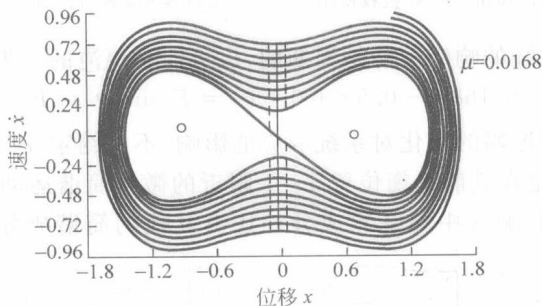


图 11.23 壳形相图

(引自参考文献[11.33], 经 American Society of Mechanical Engineers 授权使用)

11.10.4 有激励项时达芬方程的混沌行为

本节讨论有激励项且 $\mu=2, \alpha=\beta=1$ 时达芬方程的混沌行为。下面的分析将说明激励频率 ω 或振幅 F_0 的微小变化会导致系统进入混沌状态。

先讨论激励振幅 F_0 不变, 但激励频率 ω 变化的情况。随着 ω 的变化, 根据相轨线可知, 系统的响应可能是周期的, 也可能是混沌的。图 11.24 和图 11.25 分别对应着如下两个方程:

$$\ddot{x} + 0.2 \dot{x} - x + x^3 = 0.3 \cos 1.4t \text{ (周期的, 图 11.24)} \quad (11.154)$$

$$\ddot{x} + 0.2 \dot{x} - x + x^3 = 0.3 \cos 1.29t \text{ (混沌的, 图 11.25)} \quad (11.155)$$

式中, 假定 $F_0=0.3$ 。图 11.24 是基于谐波平衡法绘制的。图 11.25 是相轨线的庞加莱映, 它反映的是经过相等的时间间隔 $T_0, 2T_0, 3T_0, \dots$ 时出现的点, 其中 T_0 代表激励的周期, $T_0 = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{1.29}$ 。

当激励频率 ω 不变, 但激励振幅 F_0 变化时, 同样可以观察到混沌现象。随着 ω 的变

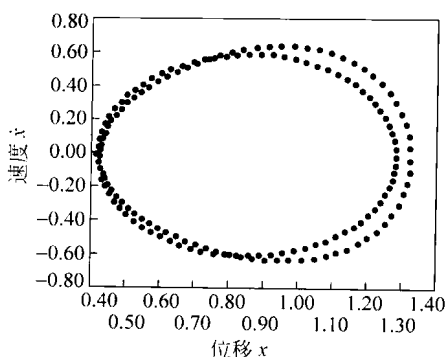


图 11.24 式(11.154)的相图
(引自参考文献[11.34], 经 Academic Press 授权使用)

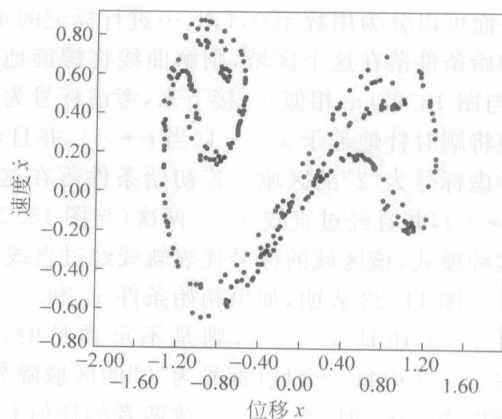


图 11.25 式(11.155)的庞加莱映射
(引自参考文献[11.34], 经 Academic Press 授权使用)

化, 根据相轨线可知, 系统的响应可能是周期的, 也可能是混沌的。为此, 考虑如下方程:

$$\ddot{x} + 0.168\dot{x} - 0.5x + 0.5x^3 = F_0 \sin \omega t \equiv F_0 \sin t \quad (11.156)$$

为了更确切地说明激励振幅的变化对系统响应的影响, 不妨约定 $x_0 = 1$ 和 $\dot{x}_0 = 0$ 。当 F_0 足够小时, 系统的响应将是在其静平衡位置 $x=1$ 附近的微幅简谐运动(此时的相轨线是一个椭圆)。随着 F_0 的增加, 响应中除基频成分外还有其他的简谐成分。如图 11.26(a)所示

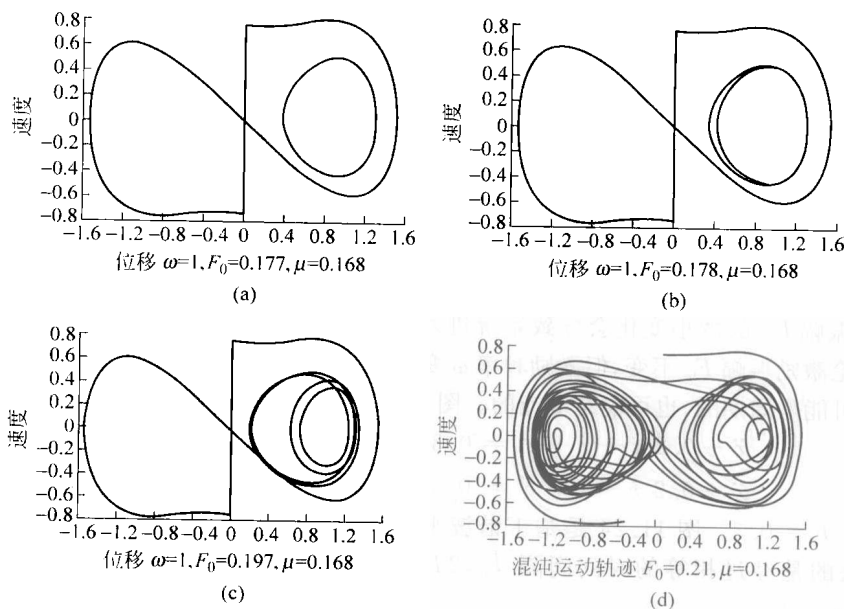


图 11.26 相轨线的不规则变化

(引自参考文献[11.33], 经 American Society of Mechanical Engineers 授权使用)

($F_0=0.177$), 此时的相轨线与椭圆相比已经发生了严重的扭曲。注意: 图 11.23 中标号为“0”的区域的边界在图 11.26(a)中也已示出。当 $0 \leq F \leq 0.177$ 时, 响应是周期 1 的, 即激励的变化经过 1 个周期时, 响应的变化也经过 1 个周期。 $F_0=0.178$ 时, 相轨线如图 11.26(b) 所示, 表明系统的响应是 2 倍周期运动。即响应的变化经过 1 个周期时, 激励的变化必经过 2 个周期。当 F_0 从 0.177 变为 0.178 时, 响应从 1 倍周期运动变为 2 倍周期运动, 这种现象称为分岔。当 $F_0=0.179$ 时, 系统的响应将是 4 倍周期运动(见图 11.26(c))。 F_0 继续增加, 还可以观察到 6 倍周期运动和 8 倍周期运动。当 $F_0 \geq 0.205$ 时, 可以认为系统已经进入混沌状态, 因为此时已不能观察到明显的周期, 如图 11.26(d) 所示。

11.11 利用 MATLAB 求解的例子

例 11.6 利用 MATLAB, 求下列形式的单摆的运动微分方程的解, 其中 $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} = 0.09$ 。

$$(a) \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (E.1)$$

$$(b) \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta - \frac{1}{6} \omega_0^2 \theta^3 = 0 \quad (E.2)$$

$$(c) \ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad (E.3)$$

初始条件分别为

$$(i) \theta(0) = 0.1, \quad \dot{\theta}(0) = 0 \quad (E.4)$$

$$(ii) \theta(0) = \frac{\pi}{4}, \quad \dot{\theta}(0) = 0 \quad (E.5)$$

$$(iii) \theta(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{\theta}(0) = 0 \quad (E.6)$$

解: 令 $x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}$, 则式(E.1)~方程(E.3)可以写成如下一阶微分方程组的形式:

$$(a) \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega_0^2 x_1 \quad (\text{线性方程}) \end{aligned} \quad (E.7)$$

$$(b) \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega_0^2 x_1 + \frac{1}{6} \omega_0^2 x_1^3 \quad (\text{非线性方程}) \end{aligned} \quad (E.8)$$

$$(c) \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega_0^2 \sin x_1 \quad (\text{非线性方程}) \end{aligned} \quad (E.9)$$

可以用 MATLAB 指令 ode23 求解式(E.7)~式(E.9)对不同初始条件(E.4)~(E.6)的响应。对于确定的初始条件, 式(E.7)~式(E.9)的解 $\theta(t)$ 画在了同一个图中。

```
%Ex11_6.m
```

```
%This program will use the function dfunc1_a.m, dfunc1_b.m and dfunc1_c.m
```

```

%They should be in the same folder
tspan=[0: 1: 250];
x0=[0.1;0.0];
x0_1=[0.7854; 0.0];
x0_2=[1.5708; 0.0];
[t, xa]=ode23('dfunc1_a', tspan, x0);
[t, xb]=ode23('dfunc1_b', tspan, x0);
[t, xc]=ode23('dfunc1_c', tspan, x0);
[t, xa1]=ode23('dfunc1_a', tspan, x0_1);
[t, xb1]=ode23('dfunc1_b', tspan, x0_1);
[t, xc1]=ode23('dfunc1_c', tspan, x0_1);
[t, xa2]=ode23('dfunc1_a', tspan, x0_2);
[t, xb2]=ode23('dfunc1_b', tspan, x0_2);
[t, xc2]=ode23('dfunc1_c', tspan, x0_2);
plot(t, xa(:, 1));
ylabel('Theta(t)');
xlabel('t');
ylabel('i.c.=[0.1,0.0]');
title...
('Function a: solid line, Function b: dashed line, Function c: dotted line');
hold on;
plot(t, xb(:, 1), '--');
hold on;
plot(t, xc(:, 1), ':');
pause
hold off;
plot(t, xa1(:, 1));
ylabel('Theta(t)');
xlabel('t');
ylabel('i.c.=[0.7854;0.0]');
title...
('Function a: solid line, Function b: dashed line, Function c: dotted line');
hold on;
plot(t, xb1(:, 1), '--');
hold on;
plot(t, xc1(:, 1), ':');
pause
hold off;
plot(t, xa2(:, 1));
hold on;
ylabel('Theta(t)');

```

```

xlabel('t');
ylabel('i.c.=[1.5708;0.0]')
title...
('Function a: solid line, Function b: dashed line, Function c: dotted line');
plot(t, xb2(:, 1), '--');
hold on;
plot(t, xc2(:, 1), ':');

%dfunc1_a.m
function f=dfunc1_a(t,x);
f=zeros(2,1);
f(1)=x(2);
f(2)=-0.0081*x(1);

%dfunc1_b.m
function f=dfunc1_b(t,x);
f=zeros(2,1);
f(1)=x(2);
f(2)=0.0081*((x(1))^3)/6.0-0.0081*x(1);

%dfunc1_c.m
function f=dfunc1_c(t,x);
f=zeros(2,1);
f(1)=x(2);
f(2)=-0.0081*sin(x(1));

```

所绘曲线如图 11.27 所示。

例 11.7 利用 MATLAB, 求下列单自由度速度平方阻尼系统的解。控制微分方程为

$$m \ddot{x} + c \dot{x}^2 \operatorname{sign} \dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t \quad (\text{E. 1})$$

其中, $m=10$, $c=0.01$, $k=4000$, $F_0=200$, ω 分别取 10 和 20, 初始条件为 $x(0)=0.5$, $\dot{x}(0)=1.0$ 。此外再利用等效黏性阻尼系数求下列系统的解:

$$m \ddot{x} + c_{\text{eq}} \dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t \quad (\text{E. 2})$$

其中, 等效黏性阻尼系数由例 3.7 中的 (E. 4) 确定, 即

$$c_{\text{eq}} = \frac{8c\omega X}{3\pi} \quad (\text{E. 3})$$

解: 令 $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, 可将式 (E. 1) 和式 (E. 2) 重新写成如下一阶微分方程组的形式:

$$(\text{a}) \quad \dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{F_0}{m} \sin \omega t - \frac{c}{m} x_2^2 \operatorname{sign} x_2 - \frac{k}{m} x_1 \quad (\text{非线性方程}) \quad (\text{E. 4})$$

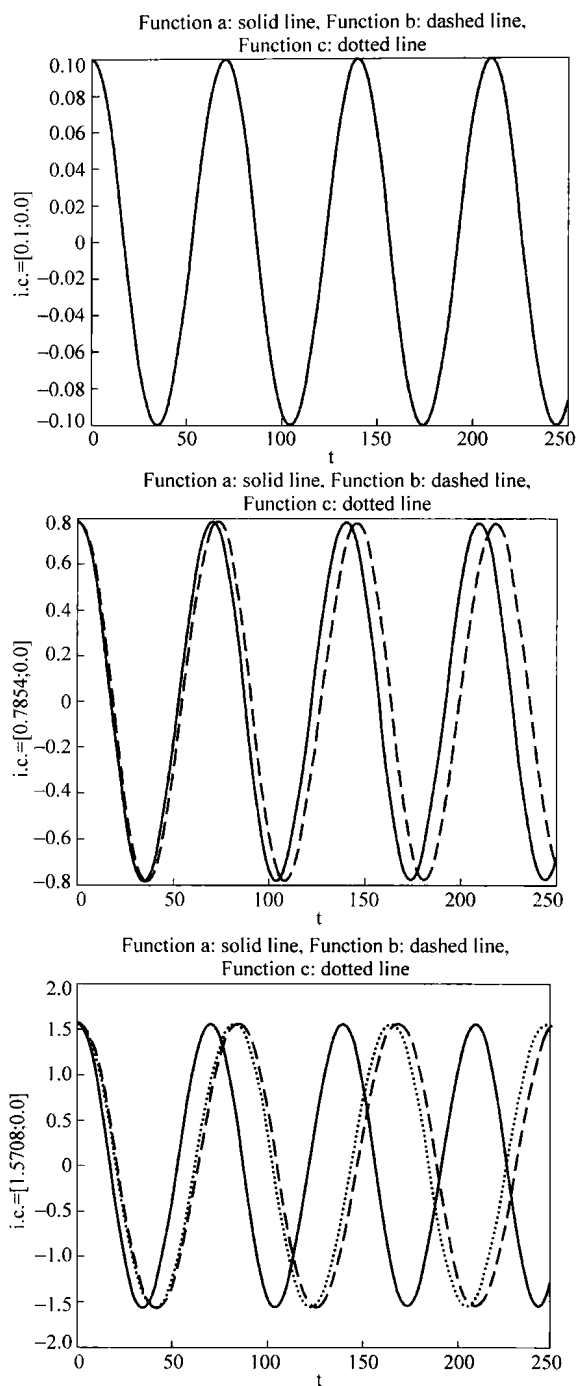


图 11.27 例 11.6 图

$$(b) \dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{F_0}{m} \sin \omega t - \frac{c_{eq}}{m} x_2 - \frac{k}{m} x_1 \quad (\text{线性方程}) \quad (E.5)$$

式(E.3)中的 X 为系统的静变形, 即 $X = F_0/k$ 。对于不同的 ω 值, 程序将式(E.4)和式(E.5)的解分别画在了同一个图中。程序如下:

```
%Ex11_7.m
%This program will use the function dfunc3_a.m, dfunc3_b.m
%dfunc3_al.m, dfunc3_b1.m, they should be in the same folder
tspan=[0: 0.005: 10];
x0=[0.5; 1.0];
[t, xa]=ode23('dfunc3_a', tspan, x0);
[t, xb]=ode23('dfunc3_b', tspan, x0);
[t, xa1]=ode23('dfunc3_al', tspan, x0_1);
[t, xb1]=ode23('dfunc3_b1', tspan, x0_1);
subplot(211)
plot(t, xa(:, 1));
title('Theta(t): function a (Solid line), function b (Dashed line)');
ylabel('w=10');
hold on;
plot(t, xb(:, 1), '--');
subplot(2 1 2);
plot(t, xa1(:, 1));
ylabel('w=20');
hold on;
plot(t, xb1(:, 1), '--');
xlabel('t');

%dfunc3_a.m
function f=dfunc3_a(t,x);
f0=200;
m=10;
a=0.01;
k=4000;
w=10;
f=zeros(2,1);
f(1)=x(2);
f(2)=f0*sin(w*t)/m-a*x(2)^2*sign(x(2))/m-k*x(1)/m;

%dfunc3_al.m
function f=dfunc3_al(t,x);
f0=200;
```

```

m=10;
a=0.01;
k=4000;
w=20;
f=zeros(2,1);
f(1)=x(2);
f(2)=f0*sin(w*t)/m-a*x(2)^2*sign(x(2))/m-k*x(1)/m;

```

```

%dfunc3_b.m
function f=dfunc3_b(t,x);
f0=200;
m=10;
a=0.01;
k=4000;
ceq=sqrt(8*a*f0/(3*pi))
w=10;
f=zeros(2,1);
f(1)=x(2);
f(2)=f0*sin(w*t)/m-ceq*x(2)/m-k*x(1)/m;

```

```

%dfunc3_b1.m
function f=dfunc3_b1(t,x);
f0=200;
m=10;
a=0.01;
k=4000;
ceq=sqrt(8*a*f0/(3*pi));
w=20;
f=zeros(2,1);
f(1)=x(2);
f(2)=f0*sin(w*t)/m-ceq*x(2)/m-k*x(1)/m;

```

所绘曲线如图 11.28 所示。

例 11.8 利用 MATLAB, 求下列非线性单自由度系统的解。控制微分方程为

$$m\ddot{x} + k_1x + k_2x^3 = f(t) \quad (\text{E.1})$$

其中, $f(t)$ 是一个矩形脉冲函数, 幅值为 F_0 , 作用时间为 $0 \leq t \leq t_0$ 。其他参数如下: $m=10$, $k_1=4000$, $F_0=1000$, $t_0=1$ 。初始条件为 $x(0)=0.05$, $\dot{x}(0)=5$ 。 k_2 分为如下两种情况: (a) $k_2=0$; (b) $k_2=500$ 。

解: 令 $x_1=x$, $x_2=\dot{x}$, 将式(E.1)和式(E.2)重新写成如下一阶微分方程组的形式:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{F(t)}{m} - \frac{k_1}{m}x_1 - \frac{k_2}{m}x_1^3 \end{aligned} \right\} \quad (\text{E.2})$$

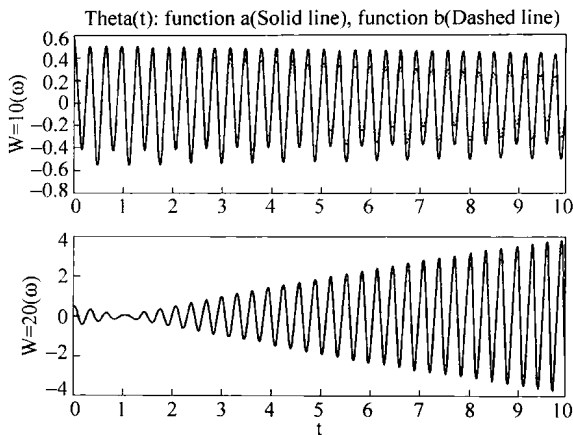


图 11.28 例 11.7 图

程序将 $k_2=0$ (线性系统)和 $k_2=500$ (非线性系统)时的响应画在了同一个图中。程序如下:

```
%Ex11_8.m
%This program will use the function dfunc11_8_1.m, and dfunc11_8_2.m
%they should be in the same folder
tspan=[0: 0.01: 5];
x0=[0.05; 5];
[t, x]=ode23('dfunc11_8_1', tspan, x0);
plot (t, x(:, 1));
xlabel('t');
ylabel('x(t)');
hold on;
[t, x]=ode23('dfunc11_8_2', tspan, x0);
plot (t, x(:, 1), '--');
gtext('Solid line: k_2=500');
gtext('Dashed line: k_2=0');

%dfunc11_8_1.m
function f=dfunc11_8_1 (t,x);
f=zeros(2,1);
m=10;
k1=4000;
k2=500;
F0=1000;
F=F0 * (stepfun(t,0)-stepfun(t,1));
f(1)=x(2);
f(2)=-F/m-k1 * x(1)/m-k2 * (x(1))^3/m;
```

```
%dfunc11_8_2.m
function f=dfunc11_8_2 (t,x);
f=zeros(2,1);
m=10;
k1=4000;
k2=0;
F0=1000;
F=F0 * (stepfun(t,0)-stepfun(t,1));
f(1)=x(2);
f(2)=-F/m-k1 * x(1)/m-k2 * (x(1))^3/m;
```

所绘曲线如图 11.29 所示。

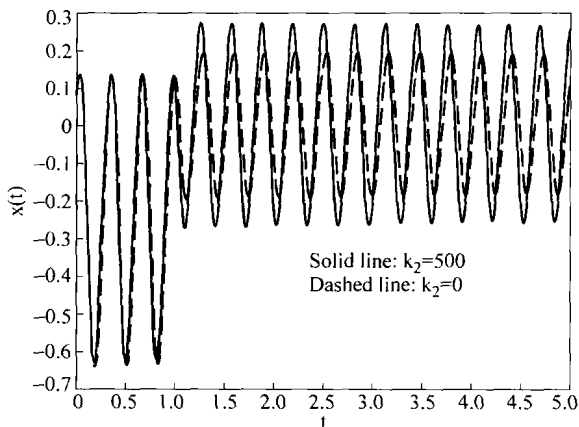


图 11.29 例 11.8 图

例 11.9 利用四阶龙格-库塔方法编写一个名为 Program18.m 的 MATLAB 程序,求下列形式的单自由度方程的解:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + k^*x^3 = 0 \quad (\text{E.1})$$

方程中的各系数如下: $m=0.01$, $c=0.1$, $k=2.0$, $k^*=0.5$ 。初始条件为 $x(0)=7.5$, $\dot{x}(0)=0$ 。

解: 把方程(E.1)重新写成如下形式:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) = x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) = -\frac{c}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 - \frac{k^*}{m}x_1^3 \end{aligned} \right\} \quad (\text{E.2})$$

编写程序时,将 m, c, k, k^* 的值分别赋给 YM, YC, YK 和 YKS, 时间步长取 $\Delta t=0.0025$, 积分长度取 400 个时间步长, 即 NSTEP=400。用子程序 fun 定义函数 $f_1(x_1, x_2)$ 和 $f_2(x_1, x_2)$ 。程序的输出结果为 $t_i, x(t_i), \dot{x}(t_i) (i=1, 2, \dots)$ 和 NSTEP 的值。作图时的纵坐标分别为 $x(t)=x_1(t)$ 和 $\dot{x}(t)=x_2(t)$ 。程序的输入和输出如下:

Solution of nonlinear vibration problem by fourth order Runge-Kutta method

Data:

$y_m = 1.000000e-002$

$y_c = 1.000000e-001$

$y_k = 2.00000000e+000$

$y_{ks} = 5.00000000e-001$

Results:

i	time(i)	x(i,1)	x(i,2)
1	2.500000e-003	7.430295e+000	-5.528573e+001
6	1.500000e-002	5.405670e+000	-2.363166e+002
11	2.750000e-002	2.226943e+000	-2.554475e+002
16	4.000000e-002	-8.046611e-001	-2.280328e+002
21	5.250000e-002	-3.430513e+000	-1.877713e+002
26	6.500000e-002	-5.296623e+000	-1.002752e+002
⋮			
371	9.275000e-001	1.219287e-001	7.673075e-002
376	9.400000e-001	1.209954e-001	-2.194914e-001
381	9.525000e-001	1.166138e-001	-4.744062e-001
386	9.650000e-001	1.093188e-001	-6.853283e-001
391	9.775000e-001	9.966846e-002	-8.512093e-001
396	9.900000e-001	8.822462e-002	-9.724752e-001

所绘曲线如图 11.30 所示。

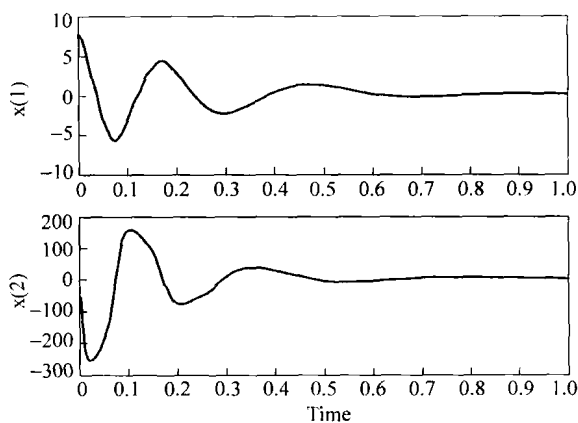


图 11.30 例 11.9 图

11.12 C++ 程序

下面给出的名为 Program18.cpp 的互动式 C++ 程序是用四阶龙格-库塔方法求解一个单自由度系统(具有非线性弹簧力)自由振动的数值解。程序的输入和输出与例 11.9 中名为 Program18.m 的程序的输入和输出类似。

例 11.10 编写一个 C++ 程序,求例 11.9 中所述问题的解。

解: 数据由人机对话的方式输入。程序的输入和输出如下:

SOLUTION OF NONLINEAR VIBRATION PROBLEM BY FOURTH ORDER RUNGE-KUTTA METHOD

DATA:
YM=0.010000
YC=0.100000
YK=2.000000
YKS=0.500000

RESULTS:

I	TIME (I)	X (I,1)	X (I,2)
1	0.00250000	7.43029541	-55.28573134
2	0.00500000	7.22711455	-106.35020086
3	0.00750000	6.90397627	-150.94361827
4	0.01000000	6.47900312	-187.66152131
5	0.01250000	5.97267903	-216.01444338
:			
395	0.98750000	0.09063023	-0.95172604
396	0.99000000	0.08822462	-0.97247522
397	0.99250000	0.08576929	-0.99150470
398	0.99500000	0.08326851	-1.00883370
399	0.99750000	0.08072652	-1.02448309
400	1.00000000	0.07814748	-1.03847532

11.13 Fortran 程序

下面给出的名为 Program18.F 的 Fortran 程序是用四阶龙格-库塔方法求解一个单自由度非线性系统的自由振动的数值解。程序的输入和输出与例 11.9 中名为 Program18.m 的程序的输入和输出类似。

例 11.11 编写一个 Fortran 程序,求例 11.9 中所述问题的解。

解：程序的输出如下：

SOLUTION OF NONLINEAR VIBRATION PROBLEM BY FOURTH ORDER RUNGE-KUTTA METHOD

DATA:

YM=0.100000E-01

YC=0.100000E+00

YK=0.200000E+01

YKS=0.500000E+00

RESULTS:

I	TIME (I)	X (I, 1)	X (I, 2)
1	0.002500	0.743030E+01	-0.552857E+02
2	0.005000	0.722711E+01	-0.106350E+03
3	0.007500	0.690398E+01	-0.150944E+03
4	0.010000	0.647900E+01	-0.187662E+03
5	0.012500	0.597268E+01	-0.216014E+03
:			
395	0.987511	0.906302E-01	-0.951725E+00
396	0.990011	0.882246E-01	-0.972474E+00
397	0.992511	0.857693E-01	-0.991504E+00
398	0.995011	0.832685E-01	-0.100883E+01
399	0.997511	0.807265E-01	-0.102448E+01
400	1.000011	0.781475E-01	-0.103847E+01

参 考 文 献

- 11.1 C. Hayashi, *Nonlinear Oscillations in Physical Systems*, McGraw-Hill, New York, 1964.
- 11.2 A. A. Andronow and C. E. Chaikin, *Theory of Oscillations* (English language edition), Princeton University Press, Princeton, N. J., 1949.
- 11.3 N. V. Butenin, *Elements of the Theory of Nonlinear Oscillations*, Blaisdell Publishing, New York, 1965.
- 11.4 A. Blaquiere, *Nonlinear System Analysis*, Academic Press, New York, 1966.
- 11.5 Y. H. Ku, *Analysis and Control of Nonlinear Systems*, Ronald Press, New York, 1958.
- 11.6 J. N. J. Cunningham, *Introduction to Nonlinear Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1958.
- 11.7 J. J. Stoker, *Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems*, Interscience Publishers, New York, 1950.
- 11.8 J. P. Den Hartog, *Mechanical Vibrations* (4th ed.), McGraw-Hill, New York, 1956.
- 11.9 N. Minorsky, *Nonlinear Oscillations*, D. Van Nostrand, Princeton, N. J., 1962.
- 11.10 R. E. Mickens, "Perturbation solution of a highly nonlinear oscillation equation," *Journal of Sound*

- and Vibration*, Vol. 68, 1980, pp. 153-155.
11. 11 B. V. Dasarathy and P. Srinivasan, "Study of a class of nonlinear systems reducible to equivalent linear systems," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 7, 1968, pp. 27-30.
 11. 12 G. L. Anderson, "A modified perturbation method for treating nonlinear oscillation problems," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 38, 1975, pp. 451-464.
 11. 13 B. L. Ly, "A note on the free vibration of a nonlinear oscillator," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 68, 1980, pp. 307-309.
 11. 14 V. A. Bapat and P. Srinivasan, "Free vibrations of nonlinear cubic spring mass systems in the presence of Coulomb damping," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 11, 1970, pp. 121-137.
 11. 15 H. R. Srirangarajan, P. Srinivasan, and B. V. Dasarathy, "Analysis of two degrees of freedom systems through weighted mean square linearization approach," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 36, 1974, pp. 119-131.
 11. 16 S. R. Woodall, "On the large amplitude oscillations of a thin elastic beam," *International Journal of Nonlinear Mechanics*, Vol. 1, 1966, pp. 217-238.
 11. 17 D. A. Evenson, "Nonlinear vibrations of beams with various boundary conditions," *AIAA Journal*, Vol. 6, 1968, pp. 370-372.
 11. 18 M. E. Beshai and M. A. Dokainish, "The transient response of a forced nonlinear system," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 41, 1975, pp. 53-62.
 11. 19 V. A. Bapat and P. Srinivasan, "Response of undamped nonlinear spring mass systems subjected to constant force excitation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 9, 1969, Part I : pp. 53-58 and Part II : pp. 438-446.
 11. 20 W. E. Boyce and R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* (4th ed.), Wiley, New York, 1986.
 11. 21 D. R. J. Owen, "Implicit finite element methods for the dynamic transient analysis of solids with particular reference to nonlinear situations," in *Advanced Structural Dynamics*, J. Donéa (ed.), Applied Science Publishers, London, 1980, pp. 123-152.
 11. 22 B. van der Pol, "Relaxation oscillations," *Philosophical Magazine*, Vol. 2, pp. 978-992, 1926.
 11. 23 L. A. Pipes and L. R. Harvill, *Applied Mathematics for Engineers and Physicists* (3rd ed.), McGraw-Hill, New York, 1970.
 11. 24 N. N. Bogoliubov and Y. A. Mitropolsky, *Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations*, Hindustan Publishing, Delhi, 1961.
 11. 25 A. H. Nayfeh and D. T. Mook, *Nonlinear Oscillations*, Wiley, New York, 1979.
 11. 26 G. Duffing, "Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung," Ph. D. thesis (Sammlung Vieweg, Braunschweig, 1918).
 11. 27 C. A. Ludeke, "An experimental investigation of forced vibrations in a mechanical system having a nonlinear restoring force," *Journal of Applied Physics*, Vol. 17, pp. 603-609, 1946.
 11. 28 D. W. Jordan and P. Smith, *Nonlinear Ordinary Differential Equations* (2nd ed.), Clarendon Press, Oxford, 1987.
 11. 29 R. E. Mickens, *An Introduction to Nonlinear Oscillations*, Cambridge University Press,

Cambridge, 1981.

- 11.30 S. H. Crandall, "Nonlinearities in structural dynamics," *The Shock and Vibration Digest*, Vol. 6, No. 8, August 1974, pp. 2-14.
- 11.31 R. M. May, "Simple mathematical models with very complicated dynamics," *Nature*, Vol. 261, June 1976, pp. 459-467.
- 11.32 E. H. Dowell and C. Pierre, "Chaotic oscillations in mechanical systems," in *Chaos in Nonlinear Dynamical Systems*, J. Chandra(ed.), SIAM, Philadelphia, 1984, pp. 176-191.
- 11.33 E. H. Dowell and C. Pezeshki, "On the understanding of chaos in Duffing's equation including a comparison with experiment," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 53, March 1986, pp. 5-9.
- 11.34 B. H. Tongue, "Existence of chaos on a one-degree-of-freedom system," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 110, No. 1, October, 1986, pp. 69-78.
- 11.35 M. Cartmell, *Introduction to Linear, Parametric, and Nonlinear Vibrations*, Chapman and Hall, London, 1990.

思 考 题

11.1 简答题

1. 如何判断一个振动问题是非线性的?
2. 振动问题中的非线性可能来自哪些方面?
3. 达芬方程中的非线性来源于什么?
4. 达芬方程的解的频率受弹簧性质怎样的影响?
5. 什么是亚谐振动?
6. 解释跳跃现象。
7. Ritz-Galerkin 法利用的是什么原理?
8. 解释下列名词: 相平面, 相轨线, 奇点, 相速度。
9. 什么是等倾线法?
10. 硬弹簧和软弹簧的区别是什么?
11. 解释亚谐振动和超谐振动的区别。
12. 什么是长期项?
13. 举出一个运动微分方程中含时变系数的例子。
14. 说明下列奇点的重要意义: 稳定结点, 不稳定结点, 鞍点, 焦点和中心。
15. 什么是极限环?
16. 举出两个能用范德波尔方程描述的物理现象。

11.2 判断题

1. 可以通过质量、弹簧和(或)阻尼把非线性引入到系统的控制微分方程中。 ()

2. 对一个系统的非线性分析可以揭示一些无法预料的现象。 ()
3. 马休方程是一个自治方程。 ()
4. 奇点对应着系统的平衡状态。 ()
5. 在线性系统和非线性系统中都可以观察到跳跃现象。 ()
6. Ritz-Galerkin 法是利用在一个周期上平均满足非线性方程得到近似解。 ()
7. 干摩擦可引起系统中的非线性。 ()
8. 非线性方程的庞加莱解是一种级数形式的解。 ()
9. 达芬系统在自由振动时,其解中存在长期项。 ()
10. 在 Lindstedt 摄动法中,假设角频率是振幅的函数。 ()
11. 等倾线是这样的一些点的集合,相轨线通过它们时具有恒定的斜率。 ()
12. 在相平面中所作的相轨线上不直接出现时间。 ()
13. 解随时间的变化情况可以通过相轨线来观察。 ()
14. 极限环代表一种稳定的周期振动。 ()

11.3 填空题

1. 当系统运动的振幅是有限小(非无限小)时,_____分析就变得非常必要。
2. _____原理不适用于非线性分析。
3. _____方程包含时变系数。
4. 如果单摆的支点承受竖直方向的振动,则其控制微分方程称为_____方程。
5. 在位移-速度平面内表示系统的运动称为_____平面表示法。
6. 在相平面中,用一个代表性的点追踪所得到的曲线称为_____。
7. 相点沿着相轨线移动的速度称为_____速度。
8. 同一个频率对应着两个振幅值的情况称为_____现象。
9. 受迫型杜芬方程的解,其角频率 ω 对任意给定的振幅 $|A|$ 具有_____值。
10. 在 Ritz-Galerkin 法中,包含_____方程的解。
11. 机械颤振是一种_____振动。
12. 如果在控制微分方程中不显含时间 t ,则相应的系统称为_____。
13. 可以利用_____法构造单自由度动力学系统的相轨线。
14. 范德波尔方程可以揭示_____现象。

11.4 选择题

1. 一个线性系统的运动微分方程中,每一项都是位移、速度和加速度的_____。
(a) 一阶项 (b) 二阶项 (c) 零阶项
2. 非线性应力-应变关系可以导致_____的非线性。
(a) 质量 (b) 弹簧 (c) 阻尼

3. 如果力随位移的变化率 df/dx 是增函数, 则这样的弹簧称为_____。
(a) 软弹簧 (b) 硬弹簧 (c) 线性弹簧
4. 如果力随位移的变化率 df/dx 是减函数, 则这样的弹簧称为_____。
(a) 软弹簧 (b) 硬弹簧 (c) 线性弹簧
5. 闭轨线围绕的奇点称为_____。
(a) 中心 (b) 中点 (c) 焦点
6. 具有周期运动的系统, 其相轨线是_____。
(a) 闭合曲线 (b) 非闭合曲线 (c) 点
7. 在亚谐振动中, 激励频率 ω 和系统固有频率 ω_n 之间的关系是_____。
(a) $\omega_n = \omega$ (b) $\omega_n = n\omega; n=2, 3, 4, \dots$ (c) $\omega_n = \frac{\omega}{n}; n=2, 3, 4, \dots$
8. 在超谐振动中, 激励频率 ω 和系统固有频率 ω_n 之间的关系是_____。
(a) $\omega_n = \omega$ (b) $\omega_n = n\omega; n=2, 3, 4, \dots$ (c) $\omega_n = \frac{\omega}{n}; n=2, 3, 4, \dots$
9. 如果在控制微分方程中显含时间 t , 则相应的系统称为_____。
(a) 自治系统 (b) 非自治系统 (c) 线性系统
10. 杜芬方程的形式为_____。
(a) $\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^3 = 0$ (b) $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (c) $\ddot{x} + \alpha x^3 = 0$
11. Lindstedt 摄动法给出_____。
(a) 周期解和非周期解 (b) 只是周期解 (c) 只是非周期解

11.5 连线题(设 λ_1 和 λ_2 是在讨论平衡状态的稳定性时平衡点对应的特征值)

- | | |
|--|-----------|
| 1. λ_1 和 λ_2 是不同的实数, 正负号相同 | (a) 不稳定结点 |
| 2. λ_1 和 λ_2 是不同的实数, 均小于零 | (b) 鞍点 |
| 3. λ_1 和 λ_2 是不同的实数, 均大于零 | (c) 结点 |
| 4. λ_1 和 λ_2 是正负号相反的实数 | (d) 焦点 |
| 5. λ_1 和 λ_2 是共轭复数 | (e) 稳定结点 |

11.6 连线题

- | | |
|---|------------|
| 1. $\ddot{x} + f \frac{\dot{x}}{ \dot{x} } + \omega_n^2 x = 0$ | (a) 质量非线性 |
| 2. $\ddot{x} + \omega_0^2 \left(x - \frac{x^3}{6} \right) = 0$ | (b) 阻尼非线性 |
| 3. $ax \ddot{x} + kx = 0$ | (c) 线性方程 |
| 4. $\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ax^3$ | (d) 弹簧力非线性 |

习 题

- 11.1 受到一个恒定力矩 $M_1 = ml^2 f$ 的单摆的运动微分方程是

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = f \quad (\text{E. 1})$$

如果 $\sin \theta$ 用它的二项展开 $\theta - \theta^3/6$ 来代替, 则方程可以写为

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = f + \frac{\omega_0^2}{6} \theta^3 \quad (\text{E. 2})$$

如果定义线性化方程

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = f \quad (\text{E. 3})$$

的解为 $\theta_1(t)$, 方程

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \frac{\omega_0^2}{6} \theta^3 \quad (\text{E. 4})$$

的解为 $\theta_2(t)$ 。讨论 $\theta(t) = \theta_1(t) + \theta_2(t)$ 作为式(E. 2)的解是否可行。

- 11.2 如图 11.31 所示, 两个弹簧分别放置在质量块 m 的两侧, 弹簧的刚度分别是 k_1 和 k_2 , 且 $k_2 > k_1$ 。当质量块放置在平衡位置时, 两个弹簧都不和它接触。但当质量块偏离平衡位置时, 只有一根弹簧被压缩。如果 $t=0$ 时, 质量块的初始速度为 \dot{x}_0 。求弹簧的最大变形和质量块的振动周期。

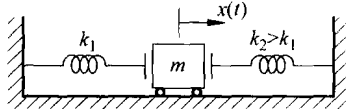


图 11.31 习题 11.2 图

- 11.3 求图 11.32 中质量块的运动微分方程, 画出弹簧力随 x 的变化曲线。
- 11.4 两个质量块 m_1 和 m_2 固定在一段张紧的绳子上, 如图 11.33 所示。如果绳子的初始张力为 P , 推导质量块沿横向作大幅运动时的运动微分方程。

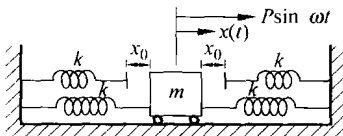


图 11.32 习题 11.3 图

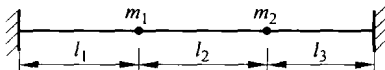


图 11.33 习题 11.4 图

- 11.5 在图 11.34 所示的弹簧摆中, 质量块 m 与一个弹性橡胶带相连。橡胶带不受力时长度为 l , 刚度为 k 。以 x 和 θ 为广义坐标, 推导系统运动的非线性方程。对其进行线性化后, 求系统的固有频率。
- 11.6 均质等截面杆长为 l , 质量为 m , 一端 ($x=0$) 铰支, 在 $x = \frac{2l}{3}$ 处有一根弹簧支承, 在 $x=l$ 处作用着一个力, 如图 11.35 所示。推导系统的非线性运动微分方程。

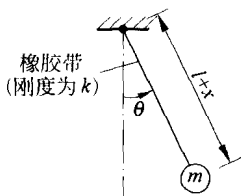


图 11.34 习题 11.5 图

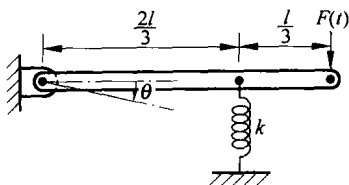


图 11.35 习题 11.6 图

11.7 推导图 11.36 所示弹簧-质量系统的非线性运动微分方程。

11.8 推导图 11.37 中所示系统的非线性运动微分方程,并求质量块和单摆均作微幅振动时的线性化方程。

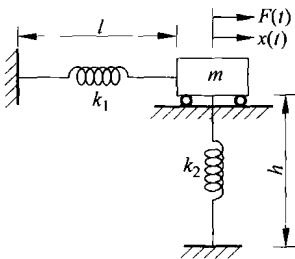


图 11.36 习题 11.7 图

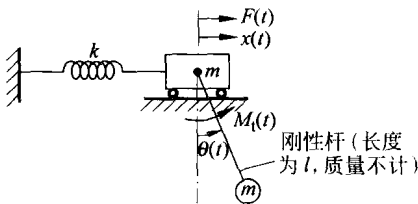


图 11.37 习题 11.8 图

11.9 利用式(11.1)和式(11.12),求图 11.1(a)所示单摆的固有周期,假定 $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ 。

11.10 单摆摆长 $l=30$ in,从与垂直方向成 80° 角的初始位置释放,求单摆回到 $\theta=0^\circ$ 位置所需的时间。

11.11 求下面单摆的非线性方程的精确解:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} \right) = 0$$

初始条件为 $\dot{\theta}=0, \theta=\theta_0$, 这里 θ_0 表示最大角位移。

11.12 利用下面对 $x(t)$ 的两项近似,求例 11.1 的解。

$$\underline{x}(t) = A_0 \sin \omega t + A_3 \sin 3\omega t$$

11.13 在林兹泰德摄动方法中,利用 3 项展开(见式(11.30))求方程(11.20)的解。

11.14 单自由度非线性受迫振动系统的运动微分方程如下:

$$\ddot{x} + c\dot{x} + k_1 x + k_2 x^3 = a_1 \cos 3\omega t - a_2 \sin 3\omega t$$

求该系统存在 3 阶亚谐振动的条件。

11.15 一个非线性系统的运动微分方程如下:

$$\ddot{x} + c\dot{x} + k_1 x + k_2 x^2 = a \cos 2\omega t$$

讨论其 2 阶亚谐波解。

11.16 对 11.5.1 节中讨论的例子,证明:

(a) 使亚谐振动的振幅 A 为实数的 ω^2 的最小值为 $\omega_{\min} = \omega_0 + \frac{21}{2048} \frac{F^2}{\omega_0^5}$;

(b) 对于稳定的亚谐波振动,振幅的最小值为 $A_{\min} = \frac{F}{16\omega^2}$ 。

11.17 根据马休方程,推导式(11.113(b))和式(11.116(b))。

11.18 一个单自由度系统的运动微分方程如下:

$$2\ddot{x} + 0.8\dot{x} + 1.6x = 0$$

若初始条件为 $x(0) = -1, \dot{x}(0) = 2$ 。(a)作图表示 $x(t)$ 随 t 变化的规律, $0 \leq t \leq 10$;
(b)作相图。

11.19 求下列方程所对应的平衡位置,并绘制平衡位置附近的相图:

$$\ddot{x} + 0.1(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

11.20 用等倾线法画下列方程所代表的系统的相图:

$$\ddot{x} + 0.4\dot{x} + 0.8x = 0$$

初始条件取 $x(0) = 2, \dot{x}(0) = 1$ 。

11.21 画下列方程所代表的系统的相图:

$$\ddot{x} + 0.1\dot{x} + x = 5$$

初始条件取 $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ 。

11.22 具有干摩擦阻尼的单自由度系统的运动微分方程如下:

$$\ddot{x} + f \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} + \omega_n^2 x = 0$$

利用初始条件 $x(0) = 10f/\omega_n^2, \dot{x}(0) = 0$ 作其相图。

11.23 具有黏性阻尼的单自由度系统的运动微分方程如下:

$$\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + \sin \theta = 0$$

如果初始条件为 $\theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = 0$,证明相平面中的坐标原点:(a)当 $c > 0$ 时是稳定焦点;(b)当 $c < 0$ 时是不稳定焦点。

11.24 受外激励的单摆的运动微分方程如下:

$$\ddot{\theta} + 0.5\dot{\theta} + \sin \theta = 0.8$$

讨论奇点 $\theta = \sin^{-1} 0.8$ 的性质。

11.25 单自由度系统的相轨线方程如下:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-cy - (x - 0.1x^3)}{y}$$

讨论 $c > 0$ 时,奇点 $(x, y) = (0, 0)$ 的性质。

11.26 求如下范德波尔方程的奇点,并讨论其解在奇点附近的性质:

$$\ddot{x} - \alpha(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$$

- 11.27 求无阻尼硬弹簧系统的奇点,并讨论其解在奇点附近的性质:

$$\ddot{x} + \omega_n^2(1 + k^2x^2)x = 0$$

- 11.28 求无阻尼软弹簧系统的奇点,并讨论其解在奇点附近的性质:

$$\ddot{x} + \omega_n^2(1 - k^2x^2)x = 0$$

- 11.29 求下列系统的奇点,并讨论其解在奇点附近的性质:

$$\ddot{\theta} + \omega_n^2 \sin \theta = 0$$

- 11.30 求下列系统的特征值和特征向量:

$$(a) \dot{x} = x - y, \dot{y} = x + 3y$$

$$(b) \dot{x} = x + y, \dot{y} = 4x + y$$

- 11.31 作下列系统的相轨线图:

$$\dot{x} = x - 2y, \quad \dot{y} = 4x - 5y$$

- 11.32 作下列系统的相轨线图:

$$\dot{x} = x - y, \quad \dot{y} = x + 3y$$

- 11.33 作下列系统的相轨线图:

$$\dot{x} = 2x + y, \quad \dot{y} = -3x - 2y$$

- 11.34 利用 Lindstedt 摄动法求范德波尔方程(11.143)的解。

- 11.35 证明下列系统存在混沌运动:

$$x_{n+1} = kx_n(1 - x_n)$$

提示:分别取 $k=3.25, 3.5$ 和 3.75 , 观察 $x_1=0.5$ 时的迭代结果。

- 11.36 证明下列系统存在混沌运动:

$$x_{n+1} = 2.0x_n(x_n - 1)$$

提示:分别取 $x_1=1.001, 1.002$ 和 1.003 , 观察迭代结果。

- 11.37 利用 MATLAB, 求解例 11.6 中单摆的运动微分方程(E.1)~(E.3)。

$$(a) \omega_0 = 0.1, \theta(0) = 0.01, \dot{\theta}(0) = 0$$

$$(b) \omega_0 = 0.1, \theta(0) = 0.01, \dot{\theta}(0) = 10$$

- 11.38 利用 MATLAB, 求解例 11.7 中的非线性阻尼系统的运动微分方程(E.1), 数据如下:

$$m = 10, \quad c = 0.1, \quad k = 4000, \quad F_0 = 200,$$

$$\omega = 20, \quad x(0) = 0.5, \quad \dot{x}(0) = 1.0$$

- 11.39 利用 MATLAB, 求解例 11.8 中的方程(E.1), 数据如下:

$$m = 10, \quad k_1 = 4000, \quad k_2 = 1000, \quad F_0 = 1000,$$

$$t_0 = 5, \quad x(0) = 0.05, \quad \dot{x}(0) = 5$$

- 11.40 利用程序 Program18.m 中的龙格-库塔方法求解下列方程:

$$\ddot{x} + 0.5 \dot{x} + x + 1.2x^3 = 1.8 \cos 0.4t$$

取 $\Delta t = 0.05$, $t_{\max} = 5.0$, 初始条件为 $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, 并画出 $x(t)$ 随 t 变化的规律。

- 11.41 利用程序 Program18.m 中的龙格-库塔方法, 取 $g/l = 0.5$, 根据方程(11.5)求单摆的角位移随时间的变化规律。初始条件取 $\theta_0 = 45^\circ$, $\dot{\theta}_0 = 0$ 。

- 11.42 在火箭的静发射实验中, 火箭通过一个非线性的弹簧-阻尼系统锚固在墙上。燃料燃烧后形成一个推力, 如图 11.38 所示。在 $0 \leq t \leq t_0$ 时间内, 作用在火箭上的推力为 $F = m_0 v$, 式中 m_0 是常数, v 是气流的速度。火箭的原始质量为 M , 在 t 时刻的质量为 $m = M - m_0 t$, $0 \leq t \leq t_0$ 。设弹簧力和阻尼力的表达式分别为 $8 \times 10^5 x + 6 \times 10^3 x^3$ N 和 $10 \dot{x} + 20 \dot{x}^2$ N, 取 $v = 2000$ m/s, $m_0 = 10$

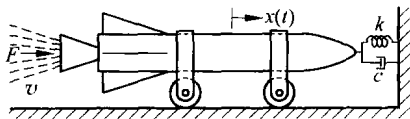


图 11.38 习题 11.42 图

kg/s, $M = 2000$ kg, $t_0 = 100$ s。(a) 利用数值积分中的龙格-库塔方法推导火箭的运动微分方程; (b) 利用程序 Program18.m 求位移随时间的变化规律。

- 11.43 利用程序 Program18.cpp 求解习题 11.40。
 11.44 利用程序 Program18.cpp 求解习题 11.41。
 11.45 利用程序 Program18.cpp 求解习题 11.42。
 11.46 利用程序 PROGRAM18.F 求解习题 11.40。
 11.47 利用程序 PROGRAM18.F 求解习题 11.41。
 11.48 利用程序 PROGRAM18.F 求解习题 11.42。
 11.49 利用合适的数值积分方法, 编写一个计算机程序, 求方程(11.14)代表的系统的振动周期, 再利用此程序求解习题 11.41。

设计题目

- 11.50 在某些周期振动系统中, 外界能量的补给发生在前半个周期, 而在后半个周期没有能量的补给只有能量的消耗, 这样的周期振动称为张弛振动。例如, 许多张弛振动的例子都可以用范德波尔方程来描述:

$$\ddot{x} - \alpha(1 - x^2) \dot{x} + x = 0 \quad (\text{E. } 1)$$

(a) 分别画出 $\alpha = 0.1$, $\alpha = 1$, $\alpha = 10$ 时范德波尔方程的相图, 初始条件分别取 $x(0) = 0.5$, $\dot{x}(0) = 0$ 和 $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 5$ 。

(b) 用四阶龙格-库塔方法求解方程(E. 1), 分别取 $\alpha = 0.1$, $\alpha = 1$, $\alpha = 10$, 初始条件同上。

- 11.51 如图 11.39 所示, 一个机床安装在两个非线性底座上, 用坐标 $x(t)$ 和 $\theta(t)$ 表示的系统的运动微分方程为

$$m \ddot{x} + k_{11}(x - l_1\theta) + k_{12}(x - l_1\theta)^3 + k_{21}(x + l_2\theta) + k_{22}(x + l_2\theta)^3 = 0 \quad (\text{E. 1})$$

$$J_0 \ddot{\theta} - k_{11}(x - l_1\theta)l_1 - k_{12}(x - l_1\theta)^3 l_1 + k_{21}(x + l_2\theta)l_2 + k_{22}(x + l_2\theta)^3 l_2 = 0 \quad (\text{E. 2})$$

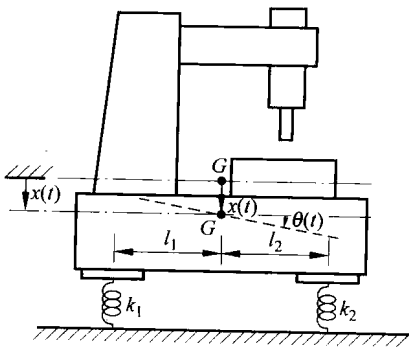


图 11.39 设计题目 11.51 图

式中, m 是质量; J_0 是关于 G 点的转动惯量。利用龙格-库塔方法求 $x(t)$ 和 $\theta(t)$, 数据如下: $m=1000 \text{ kg}$, $J_0=2500 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $l_1=1 \text{ m}$, $l_2=1.5 \text{ m}$, $k_1=40x_1+10x_1^3 \text{ kN/m}$, $k_2=50x_2+5x_2^3 \text{ kN/m}$ 。



高斯(Karl Friedrich Gauss, 1777—1855), 德国数学家, 天文学家, 物理学家。在众多的伟大数学家中, 高斯与阿基米德、牛顿齐名。他虽然出生于一个贫困家庭, 但其在少年时代表现出的超常智力和天赋便使布伦兹维克(Brunswick)公爵下定决心为其支付全部教育过程的一切费用。1795年, 高斯进入格丁根(Göttingen)大学学习数学。1798年, 高斯到黑尔姆施特(Helmstadt)大学求学并在那里于1799年获得了博士学位。

1801年, 高斯出版了其最著名的著作《算术研究》(*Arithmetical Researches*)。现在人们使用的测量电磁场强度的仪器就是以他的名字命名的, 称为高斯计。在概率论和随机振动理论中广泛使用的最小二乘法和正态分布率也是由他发明的。

(照片引自: Struik D J. A Concise History of Mathematics, 2nd ed. New York: Dover Publications, 1948)

第12章 随机振动

12.1 引言

如果振动系统的响应如位移、加速度和应力可以准确地用一个时间的函数来表示, 则称这种振动是**确定性振动**。这意味着确定性的系统(或结构)和确定性的载荷(或激励)。确定性振动仅存在于影响结构特性的参数和载荷均可控的情况。然而在工程实际中, 有许多过程和现象的参数是不能准确预测的, 这样的过程称为**随机过程**。例如, 飞机在空中飞行时, 表面上某一个特殊点的压力变化就是一个随机过程。因为在同样的飞行速度、飞行高度和载荷因素下, 多次记录压力的变化时, 它们很可能像图 12.1 所示的那样。即使在看上去相同的条件下进行测量, 这些记录也是不一样的。与此类似, 承受由于地震引起的地面加速度的建筑物、承受风载荷的水箱、行驶在粗糙路面上的汽车等表现的也都是随机过程。本章就是要讨论如何处理随机振动。

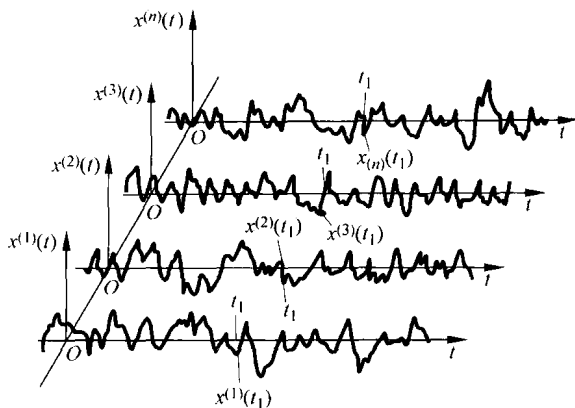


图 12.1 随机过程总体

12.2 随机变量与随机过程

实际生活中的绝大部分现象都是不确定的。例如,钢的拉伸强度、机械零件的尺寸都是不确定的。如果取许多试样进行实验,它们的拉伸强度不会是一样的,而是在某一个平均值附近波动。像钢的拉伸强度这样的量,它们的量值并不能准确预测,称为**随机变量**。如果通过实验来确定这个随机变量 x 的值,每次实验给出的结果并不是某一个量的函数。例如,取 20 个试样进行实验的话,结果可能是 $x^{(1)} = 284 \text{ MPa}$, $x^{(2)} = 302 \text{ MPa}$, $x^{(3)} = 269 \text{ MPa}$, \dots , $x^{(20)} = 298 \text{ MPa}$ 。每一个实验结果称为**样本点**。如果进行 n 次实验,这 n 个可能的结果构成随机变量的一个**样本空间**(sample space)。

还有一些概率现象的实验结果会是时间或空间坐标的函数,如图 12.1 所示的压力波动,这样的量的变化过程称为**随机过程**。随机过程的每一次实验结果称为一个**样本函数**。如果进行 n 次实验,这 n 个可能的结果构成随机过程的**总体**(ensemble)^[12.5]。注意:如果时间参数取一个固定的值 t_1 ,则 $x(t_1)$ 是一个随机变量,它的样本点是 $x^{(1)}(t_1), x^{(2)}(t_1), \dots, x^{(n)}(t_1)$ 。

12.3 概率分布

现在考虑一个随机变量 x ,如前面提到的钢的拉伸强度。如果 n 次实验的结果分别记为 x_1, x_2, \dots, x_n , 则结果小于某一个特殊值的概率可以表示为

$$\text{Prob}(x \leq \underline{x}) = \frac{n}{n} \quad (12.1)$$

式中, n 代表结果小于或等于 \underline{x} 的实验次数。当实验次数趋于无穷大时,式(12.1)就定义了 x 的概率分布函数:

$$P(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} \quad (12.2)$$

对于随机的时间函数,同样可以定义概率分布函数。为此,考虑图 12.2 所示的时间函数。在一个固定的时间跨度 t 内,把 $x(t) \leq x$ 的时间间隔分别记为 $\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3$ 和 Δt_4 ,那么, $x(t) \leq x$ 的概率为

$$\text{Prob}[x(t) \leq x] = \frac{1}{t} \sum_i \Delta t_i \quad (12.3)$$

当时间跨度 t 趋于无穷大时,式(12.3)就定义了 $x(t)$ 的概率分布函数:

$$P(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_i \Delta t_i \quad (12.4)$$

如果 $x(t)$ 代表一个物理量,那么它的幅值一定是一个有限值,所以必然有 $\text{Prob}[x(t) < -\infty] = P(-\infty) = 0$ (不可能事件),并且 $\text{Prob}[x(t) < \infty] = P(\infty) = 1$ (必然事件)。典型的 $P(x)$ 随着 x 的变化如图 12.3(a) 所示。 $P(x)$ 称为 x 的概率分布函数。 $P(x)$ 关于 x 的导数称为概率密度函数,记为 $p(x)$,即

$$p(x) = \frac{dP(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x + \Delta x) - P(x)}{\Delta x} \quad (12.5)$$

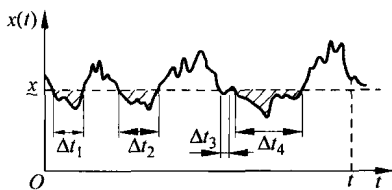


图 12.2 随机时间函数

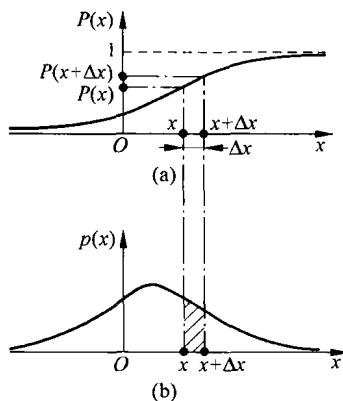


图 12.3 概率分布函数和概率密度函数

式中, $P(x + \Delta x) - P(x)$ 代表 $x(t)$ 取值在 x 和 $x + \Delta x$ 之间的概率。既然 $p(x)$ 是 $P(x)$ 的导数,所以

$$P(x) = \int_{-\infty}^x p(x') dx' \quad (12.6)$$

因为 $P(\infty) = 1$, 由式(12.6)得

$$P(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x') dx' = 1 \quad (12.7)$$

此式表明,曲线 $p(x)$ 下方的面积等于 1。

12.4 均值与标准差

如果 $f(x)$ 是随机变量 x 的函数, $f(x)$ 的数学期望(记为 μ_f 或 $E[f(x)]$ 或 $\overline{f(x)}$)的定义如下:

$$\mu_f = E[f(x)] = \overline{f(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x)dx \quad (12.8)$$

如果 $f(x)=x$, 式(12.8)给出 x 的数学期望(也叫均值)如下:

$$\mu_x = E[x] = \bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \quad (12.9)$$

与此类似, 如果 $f(x)=x^2$, 定义 x 的均方值如下:

$$\mu_{x^2} = E[x^2] = \overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx \quad (12.10)$$

x 的方差, 记为 σ_x^2 , 定义为 x 与其均值的差的均方值:

$$\sigma_x^2 = E[(x - \bar{x})^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 p(x)dx = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \quad (12.11)$$

方差的正的平方根 $\sigma(x)$, 称为 x 的标准差。

例 12.1 由于制造误差, 转子的偏心具有下列分布规律:

$$p(x) = \begin{cases} kx^2, & 0 \leq x \leq 5 \text{ mm} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (\text{E. } 1)$$

式中, k 为一常数。求其均值、标准差、均方值以及其不大于 2 mm 的概率。

解: 式中的 k 可以按如下方法确定:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = \int_0^5 kx^2 dx = 1$$

即

$$k \left(\frac{x^3}{3} \right)_0^5 = 1$$

所以

$$k = \frac{3}{125} \quad (\text{E. } 2)$$

根据式(12.9), x 的均值为

$$\bar{x} = \int_0^5 p(x)x dx = k \left(\frac{x^4}{4} \right)_0^5 = 3.75 \text{ mm} \quad (\text{E. } 3)$$

根据式(12.11), 有

$$\sigma_x^2 = \int_0^5 (x - \bar{x})^2 p(x) dx = \int_0^5 (x^2 + \bar{x}^2 - 2\bar{x}x) p(x) dx$$

$$= \int_0^5 kx^4 dx - \bar{x}^2 = k \left(\frac{x^5}{5} \right)_0^5 - \bar{x}^2 = k \frac{3125}{3} - 3.75^2 = 0.9375$$

所以 x 的标准差为

$$\sigma_x = 0.9682 \text{ mm} \quad (\text{E. 4})$$

x 的均方值为

$$\overline{x^2} = k \frac{3125}{5} = 15 \text{ mm}^2 \quad (\text{E. 5})$$

x 的值不大于 2 mm 的概率为

$$\text{Prob}[x \leq 2] = \int_0^2 p(x) dx = k \int_0^2 x^2 dx = k \left(\frac{x^3}{3} \right)_0^2 = \frac{8}{125} = 0.064 \quad (\text{E. 6})$$

12.5 几个随机变量的联合概率分布

当同时考虑两个或多个随机变量时,它们的联合行为由**联合概率分布函数**决定。例如,在测试金属试样的拉伸强度时,每一次实验都可以得到屈服极限和强度极限。但如果想了解这两个随机变量之间的关系,就必须知道它们的联合概率密度函数。单个随机变量的概率分布叫**单变量分布**,包括两个随机变量的概率分布叫**双变量分布**。一般来说,包含多于一个变量的分布问题都称为**多变量分布**。

二随机变量 x_1 和 x_2 的概率密度函数定义如下:

$$p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \text{Prob}[x_1 < x'_1 < x_1 + dx_1, x_2 < x'_2 < x_2 + dx_2] \quad (12.12)$$

即第 1 个随机变量在 x_1 和 $x_1 + dx_1$ 之间且第 2 个随机变量在 x_2 和 $x_2 + dx_2$ 之间的概率。联合概率密度函数显然具有如下性质:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1 \quad (12.13)$$

x_1 和 x_2 的联合分布函数为

$$P(x_1, x_2) = \text{Prob}[x'_1 < x_1, x'_2 < x_2] = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} p(x'_1, x'_2) dx'_1 dx'_2 \quad (12.14)$$

x 和 y 各自的概率密度函数(边缘概率密度函数)可以根据联合概率密度函数按下式确定:

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy \quad (12.15)$$

$$p(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx \quad (12.16)$$

x 和 y 的方差按下式确定:

$$\sigma_x^2 = E[(x - \mu_x)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 p(x) dx \quad (12.17)$$

$$\sigma_y^2 = E[(y - \mu_y)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (y - \mu_y)^2 p(y) dy \quad (12.18)$$

x 和 y 的协方差 σ_{xy} 定义为 x 和 y 与其各自均值差的乘积的期望值或平均, 它的表达式为

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xy} &= E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y) p(x, y) dx dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (xy - x\mu_y - y\mu_x + \mu_x\mu_y) p(x, y) dx dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy p(x, y) dx dy - \mu_y \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x p(x, y) dx dy \\
 &\quad - \mu_x \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y p(x, y) dx dy + \mu_x \mu_y \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx dy \\
 &= E[xy] - \mu_x \mu_y
 \end{aligned} \tag{12.19}$$

x 和 y 之间的相关系数 ρ_{xy} 定义如下:

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \tag{12.20}$$

不难看出, 相关系数满足关系 $-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$ 。

12.6 随机过程的相关函数

如果 t_1, t_2, \dots 是 t 的几个固定值, 习惯上可以用简写符号 x_1, x_2, \dots 分别表示 $x(t)$ 在 t_1, t_2, \dots 时刻的值。由于有几个随机变量 x_1, x_2, \dots , 所以可以作随机变量 x_1, x_2, \dots (也就是 $x(t)$ 在不同时刻的值) 的乘积, 并取这些乘积的平均, 从而得到一个序列函数:

$$\begin{aligned}
 K(t_1, t_2) &= E[x(t_1)x(t_2)] = E[x_1 x_2] \\
 K(t_1, t_2, t_3) &= E[x(t_1)x(t_2)x(t_3)] = E[x_1 x_2 x_3]
 \end{aligned} \tag{12.21}$$

这些函数描述了 $x(t)$ 在不同时刻的值之间的静态联系, 称为相关函数。

$x_1 x_2$ 的数学期望即相关函数 $K(t_1, t_2)$ 也称为自相关函数, 并记为 $R(t_1, t_2)$, 所以

$$R(t_1, t_2) = E[x_1 x_2] \tag{12.22}$$

如果 x_1 和 x_2 的联合概率密度函数 $p(x_1, x_2)$ 是已知的, 则自相关函数可以表示为

$$R(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \tag{12.23}$$

借助于实验, 可以通过取第 i 个样本函数的 $x^{(i)}(t_1)$ 和 $x^{(i)}(t_2)$ 的乘积并取总体平均找到 $R(t_1, t_2)$:

$$R(t_1, t_2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x^{(i)}(t_1) x^{(i)}(t_2) \tag{12.24}$$

式中, n 代表样本函数的个数 (见图 12.4)。如果 t_1 和 t_2 相差间隔 τ , 即 $t_1 = t, t_2 = t + \tau$, 则有 $R(t + \tau) = E[x(t)x(t + \tau)]$ 。

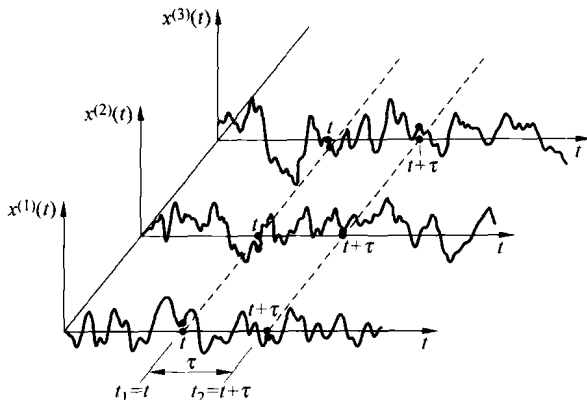


图 12.4 随机过程总体

12.7 平稳随机过程

一个平稳随机过程的概率分布相对于任意一个时间推移都保持不变,即当前时刻的概率密度函数在 5 h 或 500 h 以后仍然适用。所以概率密度函数 $p(x_1)$ 变成了一个统一的表达式 $p(x)$,而与时间无关。与此类似,联合概率密度函数 $p(x_1, x_2)$ 相对于任意一个时间推移也保持不变,只与时间推移 $\tau = t_2 - t_1$ 有关,但与 t_1 或 t_2 无关。所以概率密度函数 $p(x_1, x_2)$ 可以写成 $p(t, t + \tau)$ 。平稳随机过程 $x(t)$ 的数学期望对任意时刻都可以写成

$$E[x(t_1)] = E[x(t_1 + t)] \quad (12.25)$$

并且自相关函数也与绝对时间无关,而是与时间推移 $\tau = t_2 - t_1$ 有关,即

$$R(t_1, t_2) = E[x_1 x_2] = E[x(t)x(t + \tau)] = R(\tau) \quad (12.26)$$

如果同时考虑几个随机过程,则可用脚标加以区别。例如,可以分别用 $R_x(\tau)$ 和 $R_y(\tau)$ 表示随机过程 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的自相关函数。自相关函数具有下列特性: [12.2, 12.4]

(1) 如果 $\tau = 0$, 根据 $R(\tau)$ 可以得到 $x(t)$ 的均方值,即

$$R(0) = E[x^2] \quad (12.27)$$

(2) 如果随机过程 $x(t)$ 的均值为零,并且非常不规则,如图 12.5(a) 所示,那么它的自相关函数 $R(\tau)$ 的值将很小 ($\tau = 0$ 除外),如图 12.5(b) 所示。

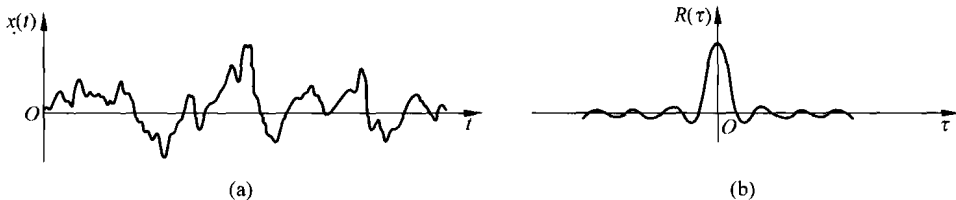


图 12.5 自相关函数

(3) 如果 $x(t) \simeq x(t+\tau)$, 那么自相关函数 $R(\tau)$ 的值将为常量, 如图 12.6 所示。

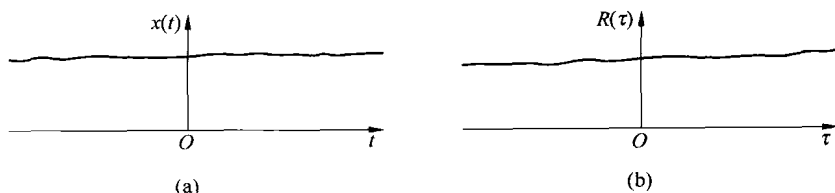


图 12.6 自相关函数为常值

(4) 如果 $x(t)$ 是平稳的, 那么它的均值和标准差将与时间 t 无关, 即

$$E[x(t)] = E[x(t+\tau)] = \mu \quad (12.28)$$

$$\sigma_{x(t)} = \sigma_{x(t+\tau)} = \sigma \quad (12.29)$$

而 $x(t)$ 和 $x(t+\tau)$ 的相关系数为

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{E[\{x(t) - \mu\}\{x(t+\tau) - \mu\}]}{\sigma^2} \\ &= \frac{E[x(t)x(t+\tau)] - \mu E[x(t+\tau)] - \mu E[x(t)] + \mu^2}{\sigma^2} \\ &= \frac{R(\tau) - \mu^2}{\sigma^2} \end{aligned} \quad (12.30)$$

也就是

$$R(\tau) = \rho\sigma^2 + \mu^2 \quad (12.31)$$

由于 $|\rho| \leq 1$, 由式(12.31)可知

$$-\sigma^2 + \mu^2 \leq R(\tau) \leq \sigma^2 + \mu^2 \quad (12.32)$$

式(12.32)表明, 自相关函数不会比均方值 $E[x^2] = \sigma^2 + \mu^2$ 大。

(5) 既然 $R(\tau)$ 只依赖于时间间隔 τ 而与绝对时间 t 无关, 所以对一个平稳随机过程必然有

$$R(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] = E[x(t)x(t-\tau)] = R(-\tau) \quad (12.33)$$

即 $R(\tau)$ 是 τ 的偶函数。

(6) 当 τ 很大 ($\tau \rightarrow \infty$) 时, $x(t)$ 和 $x(t+\tau)$ 将不存在相关关系, 所以相关系数 ρ 趋于零。由式(12.31)可知

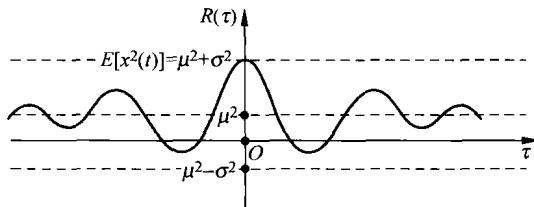


图 12.7 自相关函数

$$R(\tau \rightarrow \infty) \rightarrow \mu^2 \quad (12.34)$$

各态历经过程是这样的一个平稳随机过程,我们可以通过单个样本函数得到它的统计特性,并且可以应用于总体。如果 $x^{(i)}(t)$ 代表一个典型的样本函数,持续时间为 T ,那么可以沿时间积分取其平均,这样的平均称为时间平均。若将其记为 $\langle x(t) \rangle$,则

$$E[x] = \langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^{(i)}(t) dt \quad (12.35)$$

式中, $x^{(i)}(t)$ 约定定义在 $t = -T/2$ 到 $t = T/2$ 区间上,且 T 趋于无穷。类似地有

$$E[x^2] = \langle x^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x^{(i)}(t)]^2 dt \quad (12.36)$$

和

$$R(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^{(i)}(t)x^{(i)}(t+\tau) dt \quad (12.37)$$

12.8 高斯随机过程

在模拟实际物理问题中的随机过程时,应用最广的分布问题是高斯分布或正态分布问题。高斯过程有几个重要特性决定了可以采用一种比较简单的方式来计算描述随机振动的一些特征量。高斯过程的概率密度函数为

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma_x}\right)^2} \quad (12.38)$$

式中, \bar{x} 和 σ_x 代表 x 的均值和标准差。对于非平稳过程,均值和标准差是随时间变化的,但对平稳过程,均值和标准差是常量,不随时间变化。高斯过程的一个重要特点是其概率分布形式在线性运算法则下保持不变。这表明,如果一个线性系统受到的激励是一个高斯过程,那么一般来说响应也是一个高斯随机过程,只不过响应和激励的均值和标准差等统计特性的量值不同而已。

高斯过程的概率密度函数是一条关于均值对称的钟形曲线,其向两侧的延伸情况由标准差的值决定,如图 12.8 所示。通过定义如下标准正态分布变量:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma_x} \quad (12.39)$$

式(12.38)成为

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \quad (12.40)$$

若假设均值 $\bar{x} = 0$, 则 $x(t)$ 落在 $\pm c\sigma$ (c 是一任意正数) 区间内的概率为

$$\text{Prob}[-c\sigma \leq x(t) \leq c\sigma] = \int_{-c\sigma}^{c\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}} dx \quad (12.41)$$

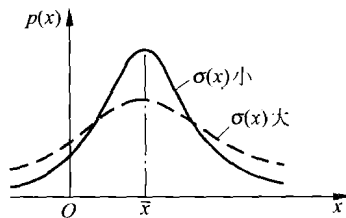
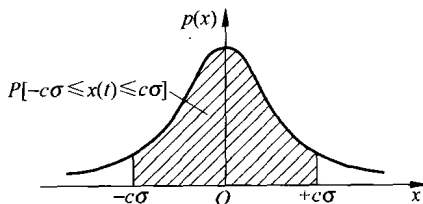


图 12.8 高斯概率密度函数

$x(t)$ 落在 $\pm c\sigma$ 区间外的概率是 1 减去式(12.41)的值,或者表示为

$$\text{Prob}[|x(t)| \geq c\sigma] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{c\sigma}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}} dx \quad (12.42)$$



式(12.41)和式(12.42)中的积分已经通过数值方法完成并列于一个表^[12.5]中。下表给出了这些值中的一部分(也可参见图 12.9)。

c 值	1	2	3	4
$\text{Prob}[-c\sigma \leq x(t) \leq c\sigma]$	0.6827	0.9545	0.9973	0.999 937
$\text{Prob}[x(t) > c\sigma]$	0.3173	0.0455	0.0027	0.000 063

12.9 傅里叶分析

12.9.1 傅里叶级数

第 1 章已经指出,任何一个周期为 τ 的周期函数 $x(t)$,都可展开成复指数形式的傅里叶级数:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \quad (12.43)$$

式中, ω_0 是基频,由下式决定:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{\tau} \quad (12.44)$$

而复系数可用 $e^{-in\omega_0 t}$ 乘以式(12.43)的两边并在一个周期内积分得到:

$$\begin{aligned} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} x(t) e^{-in\omega_0 t} dt &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} c_n e^{i(n-m)\omega_0 t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\tau/2}^{\tau/2} [\cos(n-m)\omega_0 t + i\sin(n-m)\omega_0 t] dt \end{aligned} \quad (12.45)$$

式(12.45)化简后得

$$c_n = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} x(t) e^{-in\omega_0 t} dt \quad (12.46)$$

式(12.43)表明,周期为 τ 的函数 $x(t)$ 可以展成无穷多项谐函数的和。各阶谐函数的幅值由式(12.46)决定,而频率为基频的整倍数。相邻频率的差为

$$\omega_{n+1} - \omega_n = (n+1)\omega_0 - n\omega_0 = \Delta\omega = \frac{2\pi}{\tau} = \omega_0 \quad (12.47)$$

所以周期越大,谱线越密。式(12.46)表明,一般来说傅里叶系数是复数。然而,如果 $x(t)$ 是实的偶函数,那么 c_n 将是实数。对一般的实函数 $x(t)$,式(12.46)中 c_n 的被积函数是 c_{-n} 的被积函数的共轭,故

$$c_n = c_{-n}^* \quad (12.48)$$

$x(t)$ 的均方值,即 $x(t)$ 的平方沿时间的平均可以按下式确定:

$$\begin{aligned} \overline{x^2(t)} &= \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} x^2(t) dt = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \right)^2 dt \\ &= \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \left(\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{in\omega_0 t} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \right)^2 dt \\ &= \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{in\omega_0 t} + c_n^* e^{-in\omega_0 t}) + c_0 \right\}^2 dt \\ &= \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} 2c_n c_n^* + c_0^2 \right\} dt \\ &= c_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|c_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \end{aligned} \quad (12.49)$$

所以 $x(t)$ 的均方值由傅里叶系数的绝对值的平方和确定。式(12.49)称为周期函数的帕塞瓦尔(Parsval)定理。

例 12.2 求图 12.10(a) 所示函数的复数形式的傅里叶级数展开。

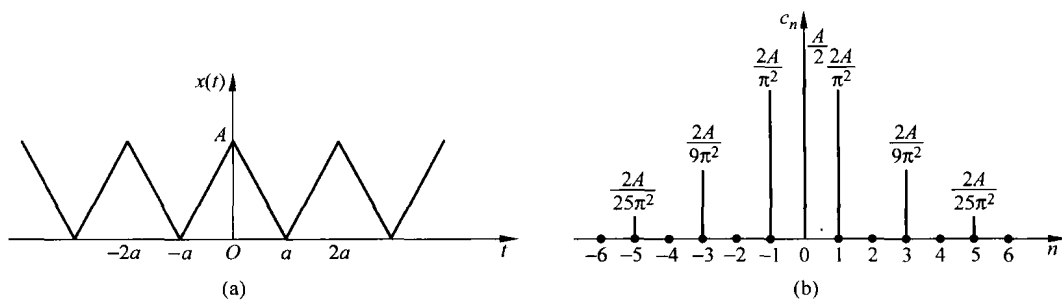


图 12.10 复数形式的傅里叶级数的表示

解: 该函数的解析表达式为

$$x(t) = \begin{cases} A\left(1 + \frac{t}{a}\right), & -\frac{\tau}{2} \leq t \leq 0 \\ A\left(1 - \frac{t}{a}\right), & 0 \leq t \leq \frac{\tau}{2} \end{cases} \quad (\text{E. 1})$$

式中,周期 τ 和相应的基频 ω_0 为

$$\tau = 2a, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{\pi}{a} \quad (\text{E. 2})$$

傅里叶系数由下式确定:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} x(t) e^{-in\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{\tau} \left[\int_{-\tau/2}^0 A \left(1 + \frac{t}{a}\right) e^{-in\omega_0 t} dt + \int_0^{\tau/2} A \left(1 - \frac{t}{a}\right) e^{-in\omega_0 t} dt \right] \end{aligned} \quad (\text{E. 3})$$

利用下列关系:

$$\int t e^{kt} dt = \frac{e^{kt}}{k^2} (kt - 1) \quad (\text{E. 4})$$

由式(E. 3)得

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{\tau} \left[\frac{A}{-in\omega_0} e^{-in\omega_0 t} \Big|_{-\tau/2}^0 + \frac{A}{a} \left\{ \frac{e^{-in\omega_0 t}}{(-in\omega_0)^2} [-in\omega_0 t - 1] \right\} \Big|_{-\tau/2}^0 \right. \\ &\quad \left. + \frac{A}{-in\omega_0} e^{-in\omega_0 t} \Big|_0^{\tau/2} - \frac{A}{a} \left\{ \frac{e^{-in\omega_0 t}}{(-in\omega_0)^2} [-in\omega_0 t - 1] \right\} \Big|_0^{\tau/2} \right] \end{aligned} \quad (\text{E. 5})$$

化简式(E. 5)得

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{\tau} \left[\frac{A}{in\omega_0} e^{in\pi} + \frac{2A}{a} \frac{1}{n^2 \omega_0^2} - \frac{A}{in\omega_0} e^{-in\pi} - \frac{A}{a} \frac{1}{n^2 \omega_0^2} e^{in\pi} \right. \\ &\quad \left. - \frac{A}{a} \frac{1}{n^2 \omega_0^2} e^{-in\pi} + \frac{A}{a} \frac{1}{n^2 \omega_0^2} (in\pi) e^{in\pi} - \frac{A}{a} \frac{1}{n^2 \omega_0^2} (in\pi) e^{-in\pi} \right] \end{aligned} \quad (\text{E. 6})$$

注意下列结果:

$$e^{in\pi} (\text{或 } e^{-in\pi}) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ -1, & n = 1, 3, 5, \dots \\ 1, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (\text{E. 7})$$

化简式(E. 6)得

$$c_n = \begin{cases} \frac{A}{2}, & n = 0 \\ \frac{4A}{a\tau n^2 \omega_0^2} = \frac{2A}{n^2 \pi^2}, & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (\text{E. 8})$$

频谱如图 12.10(b) 所示。

12.9.2 傅里叶积分

一个非周期函数, 例如图 12.11 中实线表示的曲线, 可以按周期为无穷的周期函数处理。周期函数的傅里叶展开由式(12.43)、式(12.44)和式(12.46)给出, 即

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \quad (12.50)$$

其中

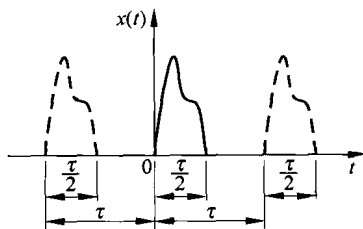


图 12.11 非周期函数

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{\tau} \quad (12.51)$$

$$c_n = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} x(t) e^{-in\omega_0 t} dt \quad (12.52)$$

当周期 τ 趋于无穷时, 频谱就变成连续的了, 并且基频变成无穷小。既然基频都变得非常小, 可以将其记为 $\Delta\omega$, $n\omega_0$ 记为 ω , 式(12.52)可以重写为

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau c_n = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} x(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (12.53)$$

定义 $X(\omega)$ 为

$$X(\omega) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} (\tau c_n) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (12.54)$$

由式(12.50), $x(t)$ 可以表示为

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\tau c_n) e^{i\omega t} \left(\frac{2\pi}{\tau} \right) \frac{1}{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (12.55)$$

此式阐明了非周期函数 $x(t)$ 在连续频域的频率分解, 这与周期函数在离散频域的频率分解是类似的。下面这两个公式称为非周期函数的傅里叶变换对, 它们与相应于周期函数的式(12.50)和式(12.52)是类似的: ^[12.9, 12.10]

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (12.56)$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (12.57)$$

根据式(12.49), 非周期函数 $x(t)$ 的均方值可按式确定:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} x^2(t) dt &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n c_n^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tau c_n \frac{\tau \omega_0}{\tau \omega_0} c_n^* \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n c_n^* \frac{\tau \omega_0}{\tau \left(\frac{2\pi}{\tau} \right)} = \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\tau c_n) (c_n^* \tau) \frac{\omega_0}{2\pi} \end{aligned} \quad (12.58)$$

既然当周期 $\tau \rightarrow \infty$ 时, $\tau c_n \rightarrow X(\omega)$, $\tau c_n^* \rightarrow X^*(\omega)$, 并且 $\omega_0 \rightarrow d\omega$, 式(12.58)给出 $x(t)$ 的均方值如下:

$$\overline{x^2(t)} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X(\omega)|^2}{2\pi\tau} d\omega \quad (12.59)$$

式(12.59)称为非周期函数的帕塞瓦尔定理。

例 12.3 求图 12.12(a) 所示三角形脉冲的傅里叶变换。

解: 该函数的解析表达式为

$$x(t) = \begin{cases} A \left(1 - \frac{|t|}{a} \right), & |t| \leq a \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

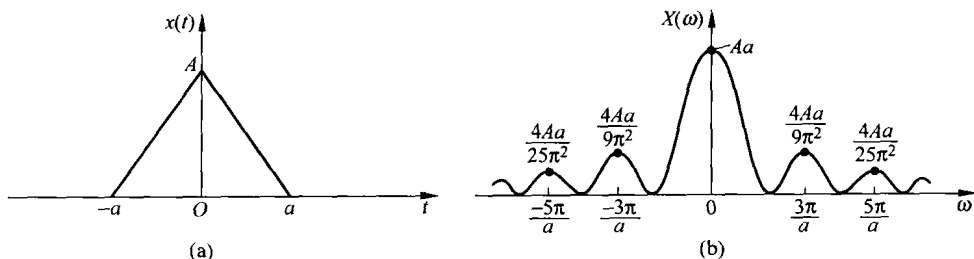


图 12.12 三角形脉冲的傅里叶变换

根据式(12.57), $x(t)$ 的傅里叶变换为

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} A \left(1 - \frac{|t|}{a}\right) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 A \left(1 + \frac{t}{a}\right) e^{-i\omega t} dt + \int_0^{\infty} A \left(1 - \frac{t}{a}\right) e^{-i\omega t} dt \end{aligned} \quad (\text{E. 2})$$

既然当 $|t| > a$ 时 $x(t) = 0$, 所以式(E.2) 可以进一步表示为

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-a}^0 A \left(1 + \frac{t}{a}\right) e^{-i\omega t} dt + \int_0^a A \left(1 - \frac{t}{a}\right) e^{-i\omega t} dt \\ &= \left(\frac{A}{-i\omega}\right) e^{-i\omega t} \Big|_{-a}^0 + \frac{A}{a} \left\{ \frac{e^{-i\omega t}}{(-i\omega)^2} [-i\omega t - 1] \right\} \Big|_{-a}^0 \\ &\quad + \left(\frac{A}{-i\omega}\right) e^{-i\omega t} \Big|_0^a - \frac{A}{a} \left\{ \frac{e^{-i\omega t}}{(-i\omega)^2} [-i\omega t - 1] \right\} \Big|_0^a \end{aligned} \quad (\text{E. 3})$$

化简式(E.3)得

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \frac{2A}{a\omega^2} + e^{i\omega a} \left(-\frac{A}{a\omega^2}\right) + e^{-i\omega a} \left(-\frac{A}{a\omega^2}\right) \\ &= \frac{2A}{a\omega^2} - \frac{A}{a\omega^2} (\cos \omega a + i \sin \omega a) - \frac{A}{a\omega^2} (\cos \omega a - i \sin \omega a) \\ &= \frac{2A}{a\omega^2} (1 - \cos \omega a) = \frac{4A}{a\omega^2} \sin^2 \frac{\omega a}{2} \end{aligned} \quad (\text{E. 4})$$

式(E.4)的图形如图 12.12(b)所示。注意此图与图 12.10(b)中的离散傅里叶谱的相似之处。

12.10 功率谱密度

一个平稳随机过程的功率谱密度 $S(\omega)$ 定义为 $R(\tau)/2\pi$ 的傅里叶变换, 即

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau \quad (12.60)$$

而

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega \tau} d\omega \quad (12.61)$$

式(12.60)和式(12.61)称为维纳-辛钦(Wiener-Khintchine)公式^[12.1]。在对随机振动进行分析时,功率谱密度比自相关函数应用更广泛。功率谱密度函数的性质如下:

(1) 根据式(12.27)和式(12.61),可得

$$R(0) = E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega \quad (12.62)$$

$$\sigma_x^2 = R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega \quad (12.63)$$

如果 $x(t)$ 代表振动位移,那么 $R(0)$ 表示平均能量。从式(12.62)不难看出, $S(\omega)$ 代表与频率 ω 有关的能量密度,所以 $S(\omega)$ 反映的是系统的能量谱分布。此外,在电路中,如果 $x(t)$ 代表随机电流,那么均方值反映的是系统的能量(当电阻是 1 时)。这正是功率谱密度一词的由来。

(2) 既然 $R(\tau)$ 是 τ 的实偶函数,所以 $S(\omega)$ 是 ω 的实偶函数,即 $S(\omega) = S(-\omega)$ 。一个典型的功率谱密度函数如图 12.13 所示。

(3) 根据式(12.62),可知功率谱密度的单位是 x^2 的单位除以角频率的单位。显然,式(12.62)不仅考虑了正频率,还考虑了负频率。在进行实验时,为了方便,更多的是采用一种等价的单边谱 $W_x(f)$ ^①,参见文献[12.1]和文献[12.2]。

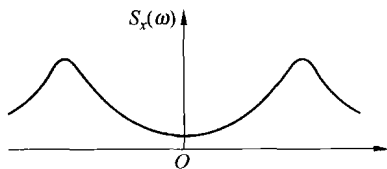


图 12.13 典型的功率谱密度函数

单边谱 $W_x(f)$ 是根据线性频率(单位时间内的循环次数)定义的,并且只考虑正频率。参考图 12.14,可以得到单边谱 $W_x(f)$ 和双边谱 $S_x(\omega)$ 之间的关系。在图 12.14(a)中,角频率增量 $d\omega$ 对应着 12.14(b)中的频率增量 $df = d\omega/2\pi$ 。既然单边谱 $W_x(f)$ 是仅定义在正频率域上的等效谱,所以

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega \equiv \int_0^{\infty} W_x(f) df \quad (12.64)$$

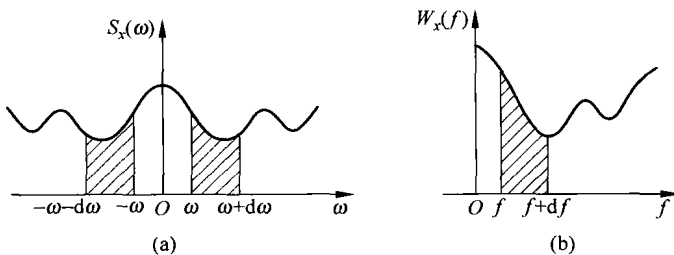


图 12.14 双边谱和单边谱

① 当不止一个随机过程时,用角标来区别不同随机过程的功率谱密度函数。例如,用 $S_x(\omega)$ 表示随机过程 $x(t)$ 的谱。

为了使频带 $d\omega$ 和 df 对均方值的贡献一样,图 12.14(a) 和图 12.14(b)中的阴影面积应相等。所以

$$2S_x(\omega)d\omega = W_x(f)df \quad (12.65)$$

由此得

$$W_x(f) = 2S_x(\omega) \frac{d\omega}{df} = 2S_x(\omega) \frac{d\omega}{d\omega/2\pi} = 4\pi S_x(\omega) \quad (12.66)$$

12.11 宽带和窄带随机过程

一个宽带过程的谱密度函数 $S(\omega)$ 在一个频率范围(或叫频带)内都有较大的值,即在整个频带内的谱密度值与频带中心处的谱密度值是一个量级。一个宽带随机过程的例子如图 12.15 所示。由于喷气噪声或超音速边界层扰动引起的火箭表面的压力波动是典型的宽带随机过程。一个窄带过程的谱密度函数 $S(\omega)$ 只在一个很小的频带内有较大的值,此带宽要比整个过程的中心频率小。图 12.16 给出了一个窄带随机过程及相应的谱密度函数和自相关函数。

如果一个随机过程的功率谱密度函数在某个频带内是一个常量,则称为白噪声。我们可以作这样的—个类推,白光所对应的可见光谱基本上是均匀的。如果带宽为无限大,则称为理想白噪声。理想白噪声在物理上是不能实现的,因为这样的—个随机过程的均方值为无限大(对应着谱密度函数曲线下方的面积为无限大)。如果一个白噪声的频带有两个截止频率 ω_1 和 ω_2 ,则称为限带白噪声^[12.8]。限带白噪声的均方值等于谱密度函数曲线下方的面积,故为 $2S_0(\omega_2 - \omega_1)$,式中 S_0 代表谱密度函数的常值。

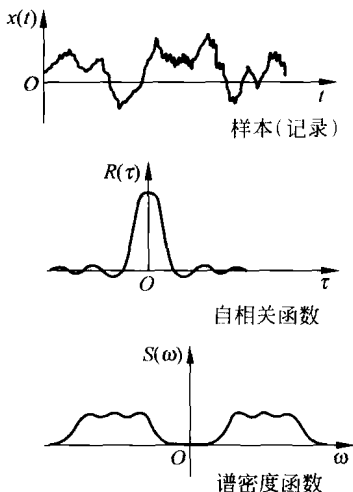


图 12.15 宽带平稳随机过程

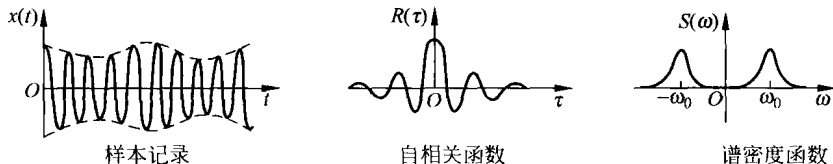


图 12.16 窄带平稳随机过程

例 12.4 一个平稳随机过程 $x(t)$ 的功率谱密度函数如图 12.17(a) 所示,求其自相关函数和均方值。

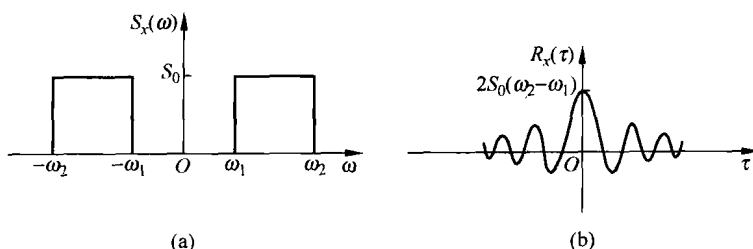


图 12.17 平稳随机过程的自相关函数

解: 既然 $S_x(\omega)$ 是关于 ω 的实的偶函数, 式(12.61)可以重新写成如下形式:

$$\begin{aligned}
 R_x(\tau) &= 2 \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega = 2S_0 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos \omega \tau d\omega \\
 &= 2S_0 \left(\frac{1}{\tau} \sin \omega \tau \right) \Big|_{\omega_1}^{\omega_2} = \frac{2S_0}{\tau} (\sin \omega_2 \tau - \sin \omega_1 \tau) \\
 &= \frac{4S_0}{\tau} \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \tau \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \tau
 \end{aligned}$$

此函数如图 12.17(b) 所示。

此随机过程的均方值为

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega = 2S_0 \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega = 2S_0(\omega_2 - \omega_1)$$

12.12 单自由度系统的响应

图 12.18 所示系统的运动微分方程为

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_n \dot{y} + \omega_n^2 y = x(t) \quad (12.67)$$

其中

$$x(t) = \frac{F(t)}{m}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \zeta = \frac{c}{c_c}, \quad c_c = 2km$$

式(12.67)的解可以通过脉冲响应函数法或频响函数法得到。

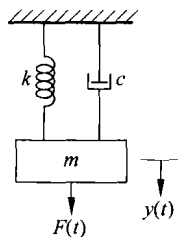


图 12.18 单自由度系统

12.12.1 脉冲响应函数法

如图 12.19(a) 所示, 先考虑由一系列变幅的脉冲组成的激励函数 $x(t)$ 。将作用于 τ 时刻的脉冲记为 $x(\tau) d\tau$, 系统对单位脉冲激励 $\delta(t - \tau)$ 的响应记为 $y(t) = h(t - \tau)$, 称为单位脉

冲响应函数。^① 系统在 t 时刻的全部响应可以通过叠加对作用在不同时刻 $t = \tau$ 、幅值为 $x(\tau)d\tau$ 的脉冲的响应得到。对应于激励 $x(\tau)d\tau$ 的响应为 $[x(\tau)d\tau]h(t-\tau)$ ，所以利用叠加法对应于全部激励的响应为

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (12.68)$$

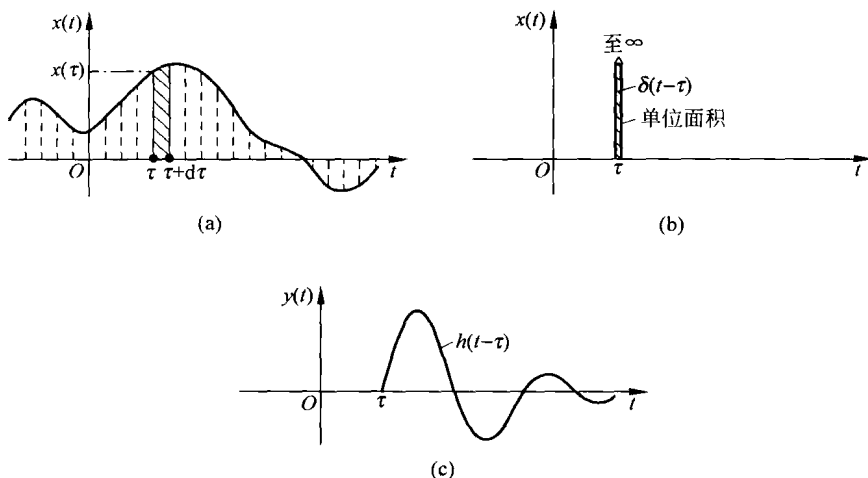


图 12.19 脉冲响应函数方法

(a) 系列脉冲形式的力函数；(b) 作用在 $t = \tau$ 时刻的单位脉冲激励；(c) 脉冲响应函数

12.12.2 频响函数法

利用傅里叶变换 $X(\omega)$ ，瞬态函数 $x(t)$ 可以表示为

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (12.69)$$

所以， $x(t)$ 可以看成是不同频率成分 ω 的叠加。如果考虑一个模为 1 的激励函数

$$\tilde{x}(t) = e^{i\omega t} \quad (12.70)$$

则它的响应可以表示为

$$\tilde{y}(t) = H(\omega) e^{i\omega t} \quad (12.71)$$

式中， $H(\omega)$ 称为复频响函数。既然实际的激励可以看成是不同频率成分的叠加，系统的全部响应利用叠加法可得

① 作用在 $t = \tau$ 时刻的单位脉冲表示为 $x(t) = \delta(t - \tau)$ 。式中， $\delta(t - \tau)$ 是狄拉克 δ 函数（见图 12.19(b)），其定义为

$$\delta(t - \tau) \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \tau$$

$$\delta(t - \tau) = 0, \quad t \neq \tau$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) dt = 1 (\text{曲线下方的面积为 } 1)$$

$$\begin{aligned}
 y(t) &= H(\omega)x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \frac{1}{2\pi} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) X(\omega) e^{i\omega t} d\omega
 \end{aligned} \quad (12.72)$$

如果 $Y(\omega)$ 代表频响函数 $y(t)$ 的傅里叶变换, 则 $y(t)$ 可以用 $Y(\omega)$ 表示为

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (12.73)$$

比较式(12.72)和式(12.73)可知

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \quad (12.74)$$

12.12.3 响应函数的特点

单位脉冲响应函数的特点可以总结如下:

(1) 既然当 $t < \tau$ 时, $h(t-\tau) = 0$ (即在脉冲作用前响应为零), 式(12.68)中积分的上限可以用无穷大代替, 故

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (12.75)$$

(2) 用 $\theta = t - \tau$ 代替 τ , 式(12.75)可以重写为

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\theta) h(\theta) d\theta \quad (12.76)$$

(3) 只要系统的单位脉冲响应函数 $h(t)$ 是已知的, 利用式(12.68)或式(12.75)或式(12.76)就可以求系统对任意激励 $x(t)$ 的响应。当系统的频响函数 $H(\omega)$ 已知时, 也可以利用式(12.72)求系统的响应。尽管看上去这两种方法不同, 但它们却是紧密相关的。为了找到它们之间的内在联系, 考虑系统的激励为一个单位脉冲的情况。根据定义, 此时的响应为 $h(t)$, 利用式(12.72)得

$$y(t) = h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) H(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (12.77)$$

式中, $X(\omega)$ 是 $x(t) = \delta(t)$ 的傅里叶变换, 即

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = 1 \quad (12.78)$$

利用 δ 函数的性质以及当 $t=0$ 时 $e^{-i\omega t} = 1$, 根据式(12.77)和式(12.78)得

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (12.79)$$

此式是 $h(t)$ 的傅里叶积分表达式, 其中的 $H(\omega)$ 是 $h(t)$ 的傅里叶变换, 即

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt \quad (12.80)$$

12.13 平稳随机激励下的响应

前面已经讨论了对于任意已知的激励 $x(t)$, 响应与激励之间的关系。本节将讨论当激励是一个平稳随机过程时, 响应与激励之间的关系。相关文献已经指出, 当激励是一个平稳随机过程时, 响应也是一个平稳随机过程。^[12.15, 12.16] 以下用两种方法来讨论响应与激励之间的关系。

12.13.1 脉冲响应函数法

1. 均值

根据式(12.76), 系统对任意激励的响应为

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\theta)h(\theta)d\theta \quad (12.81)$$

对总体平均, 把式(12.81)重写为^①

$$E[y(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\theta)h(\theta)d\theta\right] = \int_{-\infty}^{\infty} E[x(t-\theta)]h(\theta)d\theta \quad (12.82)$$

由于约定激励为平稳随机过程, $E[x(\tau)]$ 是一个与 τ 无关的常量, 故式(12.82)成为

$$E[y(t)] = E[x(t)] \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)d\theta \quad (12.83)$$

式(12.83)中的积分可以通过在式(12.80)中令 $\omega=0$ 得到, 所以

$$H(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt \quad (12.84)$$

因此, 只要知道了脉冲响应函数或频响函数, 就可以确定响应的均值和激励的均值之间的关系。

2. 自相关性

利用类似的方法, 可以得到响应和激励的自相关函数之间的关系。根据定义

$$\begin{aligned} y(t)y(t+\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\theta_1)h(\theta_1)d\theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau-\theta_2)h(\theta_2)d\theta_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\theta_1)x(t+\tau-\theta_2)h(\theta_1)h(\theta_2)d\theta_1d\theta_2 \end{aligned} \quad (12.85)$$

为避免混淆, 式中用 θ_1 和 θ_2 代替 θ 。故响应 $y(t)$ 的自相关函数为

$$R_y(\tau) = E[y(t)y(t+\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E[x(t-\theta_1)x(t+\tau-\theta_2)]h(\theta_1)h(\theta_2)d\theta_1d\theta_2$$

① 在推导式(12.82)时, 认为积分是求和的极限情况, 所以可以认为和的平均值与平均值的和是一样的, 即

$$E[x_1 + x_2 + \cdots] = E[x_1] + E[x_2] + \cdots$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau + \theta_1 - \theta_2) h(\theta_1) h(\theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \quad (12.86)$$

12.13.2 频响函数法

1. 功率谱密度

系统的响应还可以用功率谱密度函数来描述。根据定义式(12.60),其表达式为

$$S_y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (12.87)$$

将式(12.86)代入式(12.87)得

$$S_y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau + \theta_1 - \theta_2) h(\theta_1) h(\theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \quad (12.88)$$

利用下列关系:

$$e^{i\omega\theta_1} e^{-i\omega\theta_2} e^{-i\omega(\theta_1 - \theta_2)} = 1 \quad (12.89)$$

由式(12.88)得

$$S_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta_1) e^{i\omega\theta_1} d\theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta_2) e^{-i\omega\theta_2} d\theta_2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau + \theta_1 - \theta_2) e^{-i\omega(\theta_1 - \theta_2)} d\tau \quad (12.90)$$

式(12.90)等号右边的第3个积分中, θ_1 和 θ_2 是常量。引入下列新的积分变量:

$$\eta = \tau + \theta_1 - \theta_2 \quad (12.91)$$

可得

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau + \theta_1 - \theta_2) e^{-i\omega(\tau + \theta_1 - \theta_2)} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\eta) e^{-i\omega\eta} d\eta \equiv S_x(\omega) \quad (12.92)$$

式(12.90)等号右边的第1个和第2个积分分别是复频响函数 $H(\omega)$ 和 $H(-\omega)$, $H(-\omega)$ 是 $H(\omega)$ 的共轭, 所以由(12.90)得

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega) \quad (12.93)$$

上式给出了响应的功率谱密度和激励的功率谱密度之间的关系。

2. 均方响应

平稳随机过程 $y(t)$ 的均方响应可以利用自相关函数 $R_y(\tau)$ 或功率谱密度函数 $S_y(\omega)$ 得到:

$$E[y^2] = R_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\theta_1 - \theta_2) h(\theta_1) h(\theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \quad (12.94)$$

$$E(y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega \quad (12.95)$$

式(12.93)和式(12.95)是单自由度和多自由度随机振动分析的基础。^[12.11, 12.12]

例 12.5 图 12.20(a) 所示系统受到一个随机载荷的作用, 其谱密度是一个白噪声

$S_x(\omega) = S_0$ 。求: (1) 系统的复数形式的频响函数; (2) 响应的功率谱密度; (3) 响应的均方值。

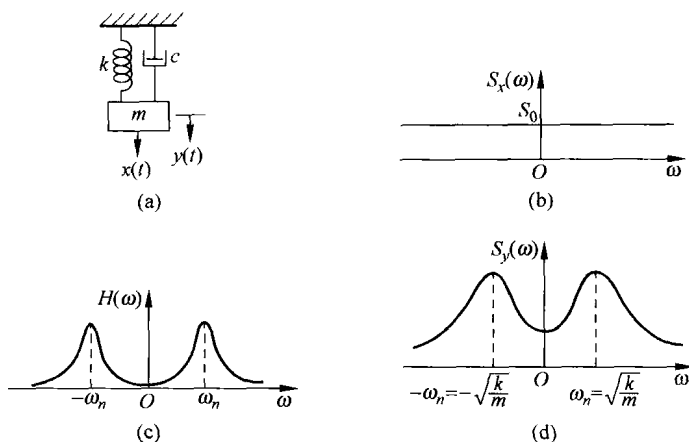


图 12.20 单自由度系统

解: (1) 为求复数形式的频响函数 $H(\omega)$, 将输入和相应的响应都写成复指数函数的形式, 即 $x(t) = e^{i\omega t}$, $y(t) = H(\omega)e^{i\omega t}$, 并代入如下的运动微分方程:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = x(t)$$

可得

$$(-m\omega^2 + ic\omega + k)H(\omega)e^{i\omega t} = e^{i\omega t}$$

故

$$H(\omega) = \frac{1}{-m\omega^2 + ic\omega + k} \quad (\text{E. 1})$$

(2) 输出的功率谱密度函数为

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega) = S_0 \left| \frac{1}{-m\omega^2 + ic\omega + k} \right|^2 \quad (\text{E. 2})$$

(3) 输出的均方值为^①

$$E[y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) d\omega = S_0 \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{-m\omega^2 + k + ic\omega} \right|^2 d\omega = \frac{\pi S_0}{kc} \quad (\text{E. 3})$$

不难看出, 此均方值与质量块 m 的质量无关。函数 $H(\omega)$ 和 $S_y(\omega)$ 的图形如图 12.20(c), (d) 所示。

例 12.6 一个单层建筑结构可以简化为图 12.21(a) 所示的模型。其中, 4 根管形柱子

① 此积分或其他类似积分的值可以参考文献[12.1]。例如, 对 $H(\omega) = \frac{i\omega B_1 + B_0}{-\omega^2 A_2 + i\omega A_1 + A_0}$, 积分的结果为

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega = \pi \left\{ \frac{(B_0^2/A_0)A_2 + B_1^2}{A_1 A_2} \right\}.$$

的弹性模量为 E , 高度为 h , 刚性屋顶的重量为 W 。柱子可以简化为固定在地面的悬臂梁, 系统阻尼用等效黏性阻尼常数 c 代替。由于地震引起的地面加速度可以近似地用常数谱 S_0 表示。如果每一根柱子的平均直径为 d , 壁厚为 $t = d/10$, 求柱子的平均直径。要求屋顶相对于地面的位移的标准差不超过某一值 δ 。

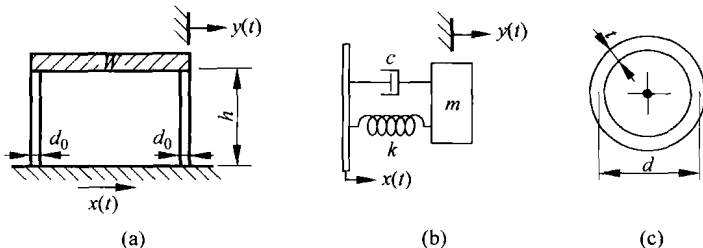


图 12.21 单层建筑

解: 首先将此结构模型化为一个单自由度系统, 再利用激励的功率谱函数和输出的功率谱函数之间的关系求解。单自由度系统模型如图 12.21(b) 所示, 其中的质量为

$$m = W/g \quad (\text{E. 1})$$

刚度为

$$k = 4 \left(\frac{3EI}{h^3} \right) \quad (\text{E. 2})$$

因为一根悬臂梁(柱子)的刚度为 $3EI/h^3$ 。式中, E 是材料的弹性模量, h 是柱子的高度, I 是柱子横截面的惯性矩:

$$I = \frac{\pi}{64} (d_o^4 - d_i^4) \quad (\text{E. 3})$$

利用 $d_o = d + t$ 和 $d_i = d - t$, 式(E. 3)可以化简为

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{64} (d_o^2 + d_i^2) (d_o + d_i) (d_o - d_i) \\ &= \frac{\pi}{64} [(d+t)^2 + (d-t)^2] [(d+t) + (d-t)] [(d+t) - (d-t)] \\ &= \frac{\pi}{8} dt (d^2 + t^2) \end{aligned} \quad (\text{E. 4})$$

对于 $t = d/10$ 的情况, 式(E. 4)成为

$$I = \frac{101\pi}{8000} d^4 = 0.039\,66d^4 \quad (\text{E. 5})$$

由式(E. 2)得

$$k = \frac{12E \times 0.039\,66d^4}{h^3} = \frac{0.475\,92Ed^4}{h^3} \quad (\text{E. 6})$$

当地面运动时, 系统的运动微分方程为

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{x} \quad (\text{E. 7})$$

式中, $z = y - x$ 是质量块(屋顶)相对于地面的位移。式(E. 7)还可以重写为

$$\ddot{z} + \frac{c}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = -\ddot{x} \quad (\text{E. 8})$$

为求复数形式的频响函数, 令

$$\ddot{x} = e^{i\omega t}, \quad z(t) = H(\omega)e^{i\omega t} \quad (\text{E. 9})$$

将其代入式(E. 8)后可得

$$\left[-\omega^2 + i\omega\frac{c}{m} + \frac{k}{m}\right]H(\omega)e^{i\omega t} = -e^{i\omega t}$$

故

$$H(\omega) = \frac{-1}{-\omega^2 + i\omega\frac{c}{m} + \frac{k}{m}} \quad (\text{E. 10})$$

功率谱密度函数为

$$S_z(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega) = S_0 \left| \frac{1}{-\omega^2 + i\omega\frac{c}{m} + \frac{k}{m}} \right|^2 \quad (\text{E. 11})$$

利用例 12.5 中的式(E. 4), 响应 $z(t)$ 的均方值为

$$E(z^2) = \int_{-\infty}^{\infty} S_z(\omega) d\omega = S_0 \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{-1}{-\omega^2 + i\omega\frac{c}{m} + \frac{k}{m}} \right|^2 d\omega = S_0 \frac{\pi m^2}{kc} \quad (\text{E. 12})$$

将式(E. 1)和式(E. 6)代入式(E. 12)后可得

$$E[z^2] = \pi S_0 \frac{W^2 h^3}{g^2 c \times 0.475 \, 92 E d^4} \quad (\text{E. 13})$$

假设 $z(t)$ 的均值为零, 则 $z(t)$ 的标准差为

$$\sigma_z = \sqrt{E[z^2]} = \sqrt{\frac{\pi S_0 W^2 h^3}{0.475 \, 92 g^2 c E d^4}} \quad (\text{E. 14})$$

既然 $\sigma_z \leq \delta$, 所以有

$$\frac{\pi S_0 W^2 h^3}{0.475 \, 92 g^2 c E d^4} \leq \delta^2$$

或

$$d^4 \geq \frac{\pi S_0 W^2 h^3}{0.475 \, 92 g^2 c E \delta^2} \quad (\text{E. 15})$$

故所需的柱子的平均直径为

$$d \geq \left\{ \frac{\pi S_0 W^2 h^3}{0.475 \, 92 g^2 c E \delta^2} \right\}^{1/4} \quad (\text{E. 16})$$

12.14 多自由度系统的响应

利用振型正交性,可得具有比例阻尼的多自由度系统的运动微分方程为

$$\ddot{q}_i(t) + 2\zeta_i\omega_i\dot{q}_i(t) + \omega_i^2q_i(t) = Q_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (12.96)$$

式中, n 是系统的自由度数; ω_i 是第 i 阶固有频率; $q_i(t)$ 是第 i 阶正则坐标; $Q_i(t)$ 是第 i 阶正则力。物理坐标和正则坐标之间的关系为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}\mathbf{q}(t)$$

或

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n X_i^{(j)} q_j(t) \quad (12.97)$$

式中, \mathbf{X} 是正则振型矩阵; $X_i^{(j)}$ 是第 j 阶正则矢量的第 i 个元素。物理载荷与正则载荷之间的关系为

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{X}^T \mathbf{F}(t)$$

或

$$Q_i(t) = \sum_{j=1}^n X_j^{(i)} F_j(t) \quad (12.98)$$

式中, $F_j(t)$ 是作用在坐标 $x_j(t)$ 上的力, 可以表示成如下形式:

$$F_j(t) = f_j \tau(t) \quad (12.99)$$

因而式(12.98)成为

$$Q_i(t) = \left(\sum_{j=1}^n X_j^{(i)} f_j \right) \tau(t) = N_i \tau(t) \quad (12.100)$$

式中

$$N_i = \sum_{j=1}^n X_j^{(i)} f_j \quad (12.101)$$

假设激励力按简谐规律变化, 即

$$\tau(t) = e^{i\omega t} \quad (12.102)$$

式(12.96)的解可以表示为

$$q_i(t) = \frac{N_i}{\omega_i^2} H_i(\omega) \tau(t) \quad (12.103)$$

式中, $H_i(\omega)$ 代表频响函数, 由下式计算:

$$H_i(\omega) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_i}\right)^2 + i2\zeta_i \frac{\omega}{\omega_i}} \quad (12.104)$$

根据式(12.97)和式(12.103), 位移 $x_i(t)$ 的均方值为

$$\overline{x_i^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_i^2(t) dt$$

$$= \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n X_i^{(r)} X_i^{(s)} \frac{N_r N_s}{\omega_r^2 \omega_s^2} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T H_r(\omega) H_s(\omega) \tau^2(t) dt \quad (12.105)$$

由式(3.56), $H_r(\omega)$ 可以表示为

$$H_r(\omega) = |H_r(\omega)| e^{-i\phi_r} \quad (12.106)$$

式中, $H_r(\omega)$ 的模称为放大因子, 其表达式为

$$|H_r(\omega)| = \left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_r} \right)^2 \right]^2 + \left(2\zeta_r \frac{\omega}{\omega_r} \right)^2 \right\}^{-1/2} \quad (12.107)$$

相角为

$$\phi_r = \arctan \frac{2\zeta_r \frac{\omega}{\omega_r}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_r} \right)^2} \quad (12.108)$$

忽略相角, 式(12.105)右边的积分可以表示为

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T H_r(\omega) H_s(\omega) \tau^2(t) dt \\ & \approx \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |H_r(\omega)| |H_s(\omega)| \tau^2(t) dt \end{aligned} \quad (12.109)$$

对于一个平稳随机过程, 均方值 $\tau^2(t)$ 可以根据其功率谱密度函数 $S_\tau(\omega)$ 表示为

$$\overline{\tau^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \tau^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} S_\tau(\omega) d\omega \quad (12.110)$$

结合式(12.109)和式(12.110), 有

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T H_r(\omega) H_s(\omega) \tau^2(t) dt \approx \int_{-\infty}^{\infty} |H_r(\omega)| |H_s(\omega)| S_\tau(\omega) d\omega \quad (12.111)$$

将式(12.111)代入式(12.105), 得 $x_i(t)$ 的均方值为

$$\overline{x_i^2(t)} \approx \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n X_i^{(r)} X_i^{(s)} \frac{N_r N_s}{\omega_r^2 \omega_s^2} \int_{-\infty}^{\infty} |H_r(\omega)| |H_s(\omega)| S_\tau(\omega) d\omega \quad (12.112)$$

放大因子 $|H_r(\omega)|$ 和 $|H_s(\omega)|$ 如图 12.22 所示。可以看出, 乘积 $|H_r(\omega)| |H_s(\omega)|$ ($r \neq s$) 与 $|H_r(\omega)|^2$ 和 $|H_s(\omega)|^2$ 相比经常是可以忽略不计的。所以, 式(12.112)可以重写为

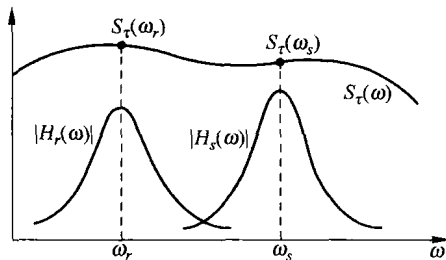


图 12.22 放大因子

$$\overline{x_i^2(t)} \approx \sum_{r=1}^n (X_i^{(r)})^2 \frac{N_r^2}{\omega_r^4} \int_{-\infty}^{\infty} |H_r(\omega)|^2 S_r(\omega) d\omega \quad (12.113)$$

对弱阻尼系统, 式(12.113)中的积分可以利用 $S_r(\omega) = S_r(\omega_r)$ 作近似计算, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H_r(\omega)|^2 S_r(\omega) d\omega \approx S_r(\omega_r) \int_{-\infty}^{\infty} |H_r(\omega)|^2 d\omega = \frac{\pi \omega_r S_r(\omega_r)}{2\zeta_r} \quad (12.114)$$

由式(12.113)和式(12.114)得

$$\overline{x_i^2(t)} = \sum_{r=1}^n (X_i^{(r)})^2 \frac{N_r^2}{\omega_r^4} \frac{\pi \omega_r S_r(\omega_r)}{2\zeta_r} \quad (12.115)$$

例 12.7 图 12.23 所示的三层建筑结构承受地震波的作用。假设地面的加速度是一个平稳随机过程, 功率谱密度为 $S(\omega) = 0.05(\text{m}^2/\text{s}^4)/(\text{rad/s})$, 各阶模态阻尼比为 0.02, 求各层屋顶响应的均方值。

解: 系统的刚度矩阵和质量矩阵分别为

$$\mathbf{k} = k \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{E. 1})$$

$$\mathbf{m} = m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{E. 2})$$

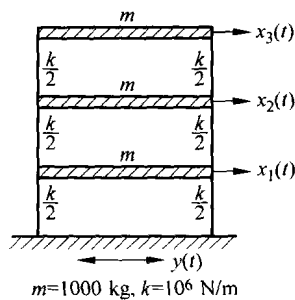


图 12.23 三层建筑

根据例 6.10 和例 6.11 的结果, $k = 10^6 \text{ N/m}$, $m = 1000 \text{ kg}$ 时, 各阶特征值和特征向量分别为

$$\omega_1 = 0.44504 \sqrt{\frac{k}{m}} = 14.0734 \text{ rad/s} \quad (\text{E. 3})$$

$$\omega_2 = 1.2471 \sqrt{\frac{k}{m}} = 39.4368 \text{ rad/s} \quad (\text{E. 4})$$

$$\omega_3 = 1.8025 \sqrt{\frac{k}{m}} = 57.0001 \text{ rad/s} \quad (\text{E. 5})$$

$$\mathbf{Z}^{(1)} = \frac{0.3280}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 1.8019 \\ 2.2470 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.01037 \\ 0.01869 \\ 0.02330 \end{Bmatrix} \quad (\text{E. 6})$$

$$\mathbf{Z}^{(2)} = \frac{0.7370}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 0.4450 \\ -0.8020 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.02331 \\ 0.01037 \\ -0.01869 \end{Bmatrix} \quad (\text{E. 7})$$

$$\mathbf{Z}^{(3)} = \frac{0.5911}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ -1.2468 \\ 0.5544 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.01869 \\ -0.02330 \\ 0.01036 \end{Bmatrix} \quad (\text{E. 8})$$

注意: 由于要求相对位移而不是绝对位移 $x_i(t)$, 所以使用了 $\mathbf{Z}^{(i)}$ 来表示第 i 阶振型而

不是 $\mathbf{X}^{(i)}$ 。

将地面的运动记为 $y(t)$, 每一层的相对位移可以表示为 $z_i(t) = x_i(t) - y(t)$, $i=1, 2, 3$ 。系统的运动微分方程为

$$m \ddot{\mathbf{z}} + c \dot{\mathbf{z}} + k \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (\text{E. 9})$$

或写成

$$m \ddot{\mathbf{z}} + c \dot{\mathbf{z}} + k \mathbf{z} = -m \ddot{\mathbf{y}} \quad (\text{E. 10})$$

式中, $\ddot{\mathbf{y}} = \{\ddot{y} \quad \ddot{y} \quad \ddot{y}\}^T$ 。将矢量 \mathbf{z} 用各阶振型表示:

$$\mathbf{z} = \mathbf{Z} \mathbf{q} \quad (\text{E. 11})$$

式中, \mathbf{Z} 代表振型矩阵。将式(E. 11)代入式(E. 10), 并用 \mathbf{Z}^T 左乘所得方程, 可得解耦的运动微分方程。假设各阶模态阻尼比为 $\zeta_i = 0.02$, 解耦后的运动微分方程为

$$\ddot{q}_i + 2\zeta_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = Q_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{E. 12})$$

式中

$$Q_i = \sum_{j=1}^n Z_j^{(i)} F_j(t) \quad (\text{E. 13})$$

而

$$F_j(t) = -m_j \ddot{y}(t) = -m \ddot{y}(t) \quad (\text{E. 14})$$

式中, $m_j = m$ 代表第 j 层屋顶的质量。令

$$F_j(t) = f_j \tau(t) \quad (\text{E. 15})$$

注意

$$f_j = -m_j = -m \quad (\text{E. 16})$$

和

$$\tau(t) = \ddot{y}(t) \quad (\text{E. 17})$$

根据式(12.115), 均方值为

$$\overline{z_i^2(t)} = \sum_{r=1}^3 (Z_i^{(r)})^2 \frac{N_r^2}{\omega_r^3} \frac{\pi}{2\zeta_r} S_r(\omega_r) \quad (\text{E. 18})$$

注意: $\mathbf{Z}^{(1)}, \mathbf{Z}^{(2)}, \mathbf{Z}^{(3)}$ 分别由式(E. 6)、式(E. 7)、式(E. 8)给出, 所以

$$N_1 = \sum_{j=1}^3 Z_j^{(1)} f_j = -m \sum_{j=1}^3 Z_j^{(1)} = -1000 \times 0.05236 = -52.36 \quad (\text{E. 19})$$

$$N_2 = \sum_{j=1}^3 Z_j^{(2)} f_j = -m \sum_{j=1}^3 Z_j^{(2)} = -1000 \times 0.05237 = -52.37 \quad (\text{E. 20})$$

$$N_3 = \sum_{j=1}^3 Z_j^{(3)} f_j = -m \sum_{j=1}^3 Z_j^{(3)} = -1000 \times 0.05235 = -52.35 \quad (\text{E. 21})$$

根据式(E. 18), 各层屋顶相对位移的均方值为

$$\overline{z_1^2(t)} = 0.00053132 \text{ m}^2 \quad (\text{E. 22})$$

$$\overline{z_2^2(t)} = 0.00139957 \text{ m}^2 \quad (\text{E. 23})$$

$$\overline{z_3^2(t)} = 0.002\,164\,55\,\text{m}^2 \quad (\text{E. 24})$$

例 12.8 求例 12.7 中,各层屋顶相对位移的值超过它们的 1,2,3 和 4 倍标准差的概率。

解: 假设地面加速度 $\ddot{y}(t)$ 是呈正态分布的随机过程,均值为零,则各层屋顶的相对位移也呈均值为零的正态分布。所以各层屋顶相对位移的标准差为

$$\sigma_{z_i} = \sqrt{\overline{z_i^2(t)}}, \quad i = 1, 2, 3$$

根据标准正态分布表(见 12.8 节),相对位移 $z_i(t)$ 的绝对值超过标准差的某一整倍数的概率为

$$P[|z_i(t)| > p\sigma_{z_i}] = \begin{cases} 0.317\,32, & p = 1 \\ 0.045\,50, & p = 2 \\ 0.002\,70, & p = 3 \\ 0.000\,06, & p = 4 \end{cases}$$

12.15 利用 MATLAB 求解的例子

例 12.9 利用 MATLAB 软件,画图表示谱密度为 S_0 的下列白噪声的自相关函数:

- (1) 限带白噪声的 $\omega_1=0, \omega_2=4\,\text{rad/s}, 6\,\text{rad/s}, 8\,\text{rad/s}$;
- (2) 限带白噪声的 $\omega_1=2\,\text{rad/s}, \omega_2=4\,\text{rad/s}, 6\,\text{rad/s}, 8\,\text{rad/s}$;
- (3) 理想白噪声。

解: 对(1)和(2),根据例 12.4,自相关函数的表达式为

$$\frac{R(\tau)}{S_0} = \frac{2}{\tau} (\sin \omega_2 \tau - \sin \omega_1 \tau) \quad (\text{E. 1})$$

对(3),取上式当 $\tau \rightarrow 0$ 时的极限,即得自相关函数:

$$R(0) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ 2S_0 \left(\frac{\omega_2 \sin \omega_2 \tau}{\omega_2 \tau} \right) - 2S_0 \left(\frac{\omega_1 \sin \omega_1 \tau}{\omega_1 \tau} \right) \right\} = 2S_0(\omega_2 - \omega_1) \quad (\text{E. 2})$$

由于是理想白噪声,令 $\omega_1=0, \omega_2 \rightarrow \infty$,由式(E.2)得 $R=2S_0\delta(\tau)$,其中 $\delta(\tau)$ 是狄拉克 δ 函数。利用 MATLAB 画图表示(E.1)的程序如下:

```
%Ex12_9.m
w1=0;
w2=4;
for i=1:101
    t(i)=-5+ 10 * (i-1)/100;
    R1(i)=2 * (sin(w2 * t(i))-sin(w1 * t(i)))/t(i);
end
w1=0;
w2=6;
for i=1:101
```

```

    t(i)=-5+10*(i-1)/100;
    R2(i)=2*(sin(w2*t(i))-sin(w1*t(i)))/t(i);
end
w1=0;
w2=8;
for i=1:101
    t(i)=-5+10*(i-1)/100;
    R3(i)=2*(sin(w2*t(i))-sin(w1*t(i)))/t(i);
end
for i=1:101
    t1(i)=0.0001+4.9999*(i-1)/100;
    R3_1(i)=2*(sin(w2*t(i))-sin(w1*t(i)))/t(i);
end
xlabel('t');
ylabel('R/S_0');
plot(t,R1);
hold on;
gtext('Solid line: w1=0, w2=4');
gtext('Dashed line: w1=0, w2=6');
plot(t,R2,'--');
gtext('Dotted line: w1=0, w2=8');
plot(t,R3,':');
w1=2;
w2=4;
for i=1:101
    t(i)=-5+10*(i-1)/100;
    R4(i)=2*(sin(w2*t(i))-sin(w1*t(i)))/t(i);
end
w1=2;
w2=6;
for i=1:101
    t(i)=-5+10*(i-1)/100;
    R5(i)=2*(sin(w2*t(i))-sin(w1*t(i)))/t(i);
end
w1=2;
w2=8;
for i=1:101
    t(i)=-5+10*(i-1)/100;
    R6(i)=2*(sin(w2*t(i))-sin(w1*t(i)))/t(i);
end
pause

```



```

hold off;
xlabel('t');
ylabel('R/S_0');
plot(t,R4);
hold on;
gtext('Solid line: w1=2, w2=4');
gtext('Dashed line: w1=2, w2=6');
plot(t,R5,'--');
gtext('Dotted line: w1=2, w2=8');
plot(t,R6,':');

```

所绘图形如图 12.24 所示。

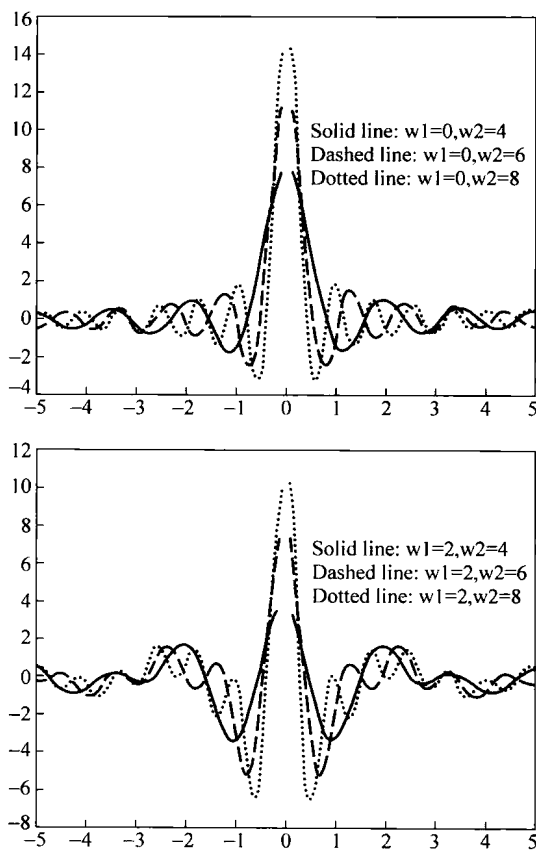


图 12.24 例 12.9 图

例 12.10 利用 MATLAB 软件计算 $c=1, 2, 3$ 时下式表示的概率:

$$\text{Prob}[|x(t)| \geq c\sigma] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{c\sigma}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}} dx \quad (\text{E. 1})$$

假设 $x(t)$ 的均值为零, 标准差为 1。

解: 对 $\sigma=1$, 式(E. 1)可以重写为

$$\text{Prob}[|x(t)| \geq c] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-c}^c e^{-0.5x^2} dx \quad (\text{E. 2})$$

计算式(E. 2)的 MATLAB 程序如下:

```
Ex12_10.m
>>q=quad('normp',-7,1);
>>prob1=2*q
prob1=
    1.6827
>>q=quad('normp',-7,2);
>>prob2=2*q
prob2=
    1.9545
>>q=quad('normp',-7,3);
>>prob3=2*q
prob3=
    1.9973
%normp.m
function pdf=normp(x)
pdf=exp(-0.5*x.^2)/sqrt(2.0*pi);
```

参 考 文 献

- 12.1 S. H. Crandall and W. D. Mark, *Random Vibration in Mechanical Systems*, Academic Press, New York, 1963.
- 12.2 D. E. Newland, *An Introduction to Random Vibrations and Spectral Analysis*, Longman, London, 1975.
- 12.3 J. D. Robson, *An Introduction to Random Vibration*, Edinburgh University Press, Edinburgh, 1963.
- 12.4 C. Y. Yang, *Random Vibration of Structures*, Wiley, New York, 1986.
- 12.5 A. Papoulis, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, McGraw-Hill, New York, 1965.
- 12.6 J. S. Bendat and A. G. Piersol, *Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis*, Wiley, New York, 1980.
- 12.7 P. Z. Peebles, Jr., *Probability, Random Variables, and Random Signal Principles*, McGraw-Hill, New York, 1980.

- 12.8 J. B. Roberts, "The response of a simple oscillator to band-limited white noise," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 3, 1966, pp. 115-126.
- 12.9 M. H. Richardson, "Fundamentals of the discrete Fourier transform," *Sound and Vibration*, Vol. 12, March 1978, pp. 40-46.
- 12.10 E. O. Brigham, *The Fast Fourier Transform*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1974.
- 12.11 J. K. Hammond, "On the response of single and multidegree of freedom systems to non-stationary random excitations," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 7, 1968, pp. 393-416.
- 12.12 S. H. Crandall, G. R. Khabbaz, and J. E. Manning, "Random vibration of an oscillator with nonlinear damping," *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 36, 1964, pp. 1330-1334.
- 12.13 S. Kaufman, W. Lapinski, and R. C. McCaa, "Response of a single-degree-of-freedom isolator to a random disturbance," *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 33, 1961, pp. 1108-1112.
- 12.14 C. J. Chisholm, "Random vibration techniques applied to motor vehicle structures," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 4, 1966, pp. 129-135.
- 11.15 Y. K. Lin, *Probabilistic Theory of Structural Dynamics*, McGraw-Hill, New York, 1967.
- 12.16 I. Elishakoff, *Probabilistic Methods in the Theory of Structures*, Wiley, New York, 1983.
- 12.17 H. W. Liepmann, "On the application of statistical concepts to the buffeting problem," *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. 19, No. 12, 1952, pp. 793-800, 822.
- 12.18 W. C. Hurty and M. F. Rubinstein, *Dynamics of Structures*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1964.

思 考 题

12.1 简答题

1. 样本空间和总体的区别是什么?
2. 概率密度函数和概率分布函数是如何定义的?
3. 随机变量的均值和方差是如何定义的?
4. 什么是双变量分布函数?
5. 随机变量 X 和 Y 的协方差是如何定义的?
6. 相关系数 ρ_{xy} 是如何定义的?
7. 相关系数的上、下限是什么?
8. 什么是边缘概率密度函数?
9. 什么是自相关函数?
10. 平稳随机过程和非平稳随机过程的区别是什么?
11. 各态历经随机过程是如何定义的?
12. 一个平稳随机过程的自相关函数的上、下限是什么?
13. 什么是时间平均?

14. 什么是高斯随机过程? 为什么在振动分析中经常要用到它?
15. 什么是帕塞瓦尔(Parseval)公式?
16. 功率谱密度函数、白噪声、限带白噪声、宽带过程和窄带过程是如何定义的?
17. 一个平稳随机过程的均方值、自相关函数和功率谱密度函数之间有什么关系?
18. 什么是脉冲响应函数?
19. 用杜哈美积分表示一个单自由度系统的响应。
20. 什么是复数频率响应函数?
21. 对单自由度系统, 输入和输出的功率谱密度函数之间有什么关系?
22. 什么是维纳-辛钦(Wiener-Khintchine)公式?

12.2 判断题

1. 一个确定性系统具有确定性的系统参数和确定性的载荷。 ()
2. 真实生活中的大多数现象都是确定性的。 ()
3. 随机变量的大小不能够准确地预测。 ()
4. 如果随机变量 x 的概率密度函数为 $p(x)$, 那么其数学期望的表达式为 $\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$ 。 ()
5. 相关系数 ρ_{XY} 满足关系 $|\rho_{XY}| \leq 1$ 。 ()
6. 自相关函数 $R(t_1, t_2)$ 与 $E[x(t_1)x(t_2)]$ 相同。 ()
7. $x(t)$ 的均方值可以表示为 $E(x^2) = R(0)$ 。 ()
8. 如果 $x(t)$ 是平稳的, 则其均值与 t 无关。 ()
9. 自相关函数 $R(\tau)$ 是关于 τ 的偶函数。 ()
10. Wiener-Khintchine 公式建立了功率谱密度函数和自相关函数之间的关系。 ()
11. 理想白噪声是一个物理上可以实现的概念。 ()

12.3 填空题

1. 若一个系统的振动响应是准确知道的, 则这种振动称为_____振动。
2. 如果一个振动系统的任何参数都不能准确地知道, 则其振动称为_____振动。
3. 空中飞行的飞机, 其表面上某一点的压力波动是一个_____过程。
4. 在一个随机过程中, 每一次实验的结果是某些_____ (例如时间) 的函数。
5. 标准差等于_____的正的平方根。
6. 几个随机变量的联合分布行为可以用_____概率分布函数来描述。
7. 单变量分布用来描述_____随机变量的概率分布。
8. 描述两个相关的随机变量的分布用_____。
9. 描述几个相关的随机变量的分布用_____。

10. 一个平稳随机过程 $x(t)$ 的标准差与_____无关。
11. 如果一个平稳随机过程的全部概率信息可以通过一个样本函数确定, 则该过程称为_____。
12. 高斯密度函数是关于均值对称的_____形曲线。
13. 标准正态分布变量的均值和标准差分别为_____、_____。
14. 非周期函数可以看成是一个具有_____周期的周期函数。
15. _____谱密度函数是 ω 的偶函数。
16. 如果 $S(\omega)$ 在一个比较宽的频带内都有较大的值, 则该过程称为_____过程。
17. 如果 $S(\omega)$ 只是在一个比较窄的频带内有较大的值, 则该过程称为_____过程。
18. 一个平稳随机过程的功率谱密度 $S(\omega)$ 定义为 $R(\tau)/2\pi$ 的_____变换。
19. 如果一个白噪声的频带有有限个截止频率, 则称为_____白噪声。

12.4 选择题

1. 一个随机变量的每一次实验结果称为_____。
 (a) 样本点 (b) 随机点 (c) 观测值
2. 一个随机过程的每一次实验结果称为_____。
 (a) 样本点 (b) 样本空间 (c) 样本函数
3. 概率分布函数 $P(\tilde{x})$ 的具体含义是_____。
 (a) $P(x \leq \tilde{x})$ (b) $P(x > \tilde{x})$ (c) $P(\tilde{x} \leq x \leq \tilde{x} + \Delta x)$
4. 概率密度函数 $p(\tilde{x})$ 的具体含义是_____。
 (a) $P(x \leq \tilde{x})$ (b) $P(x > \tilde{x})$ (c) $P(\tilde{x} \leq x \leq \tilde{x} + \Delta x)$
5. 概率分布归一化的含义是_____。
 (a) $P(\infty) = 1$ (b) $\int_{-\infty}^{\infty} p(x) = 1$ (c) $\int_{-\infty}^{\infty} p(x) = 0$
6. 表示 x 的方差用_____。
 (a) $\overline{x^2}$ (b) $\overline{x^2} - \bar{x}^2$ (c) \bar{x}^2
7. 根据双变量概率密度函数 $p(x, y)$, x 的边缘概率密度函数 $p(x)$ 为_____。
 (a) $p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy$
 (b) $p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx$
 (c) $p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx dy$
8. 表示 x 和 y 的相关系数用_____。
 (a) σ_{xy} (b) $\sigma_{xy}/(\sigma_x \sigma_y)$ (c) $\sigma_x \sigma_y$

9. 与正态分布变量 x 对应的标准正态分布变量 z 定义为_____。
- (a) $z = \frac{\bar{x}}{\sigma_x}$ (b) $z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma_x}$ (c) $z = \frac{x}{\sigma_x}$
10. 如果一个线性系统的激励是一个高斯过程, 则其响应为_____。
- (a) 一个不同的随机过程 (b) 一个高斯过程 (c) 一个各态历经过程
11. 对于一个正态概率密度函数, $\text{Prob}[-3\sigma \leq x(t) \leq 3\sigma]$ 的大小为_____。
- (a) 0.6827 (b) 0.999 937 (c) 0.9973
12. 一个平稳随机过程的均方响应可以_____。
- (a) 仅由自相关函数确定
(b) 仅由功率谱密度函数确定
(c) 由自相关函数或功率谱密度函数确定

12.5 连线题

- | | |
|------------------------------------|---------------|
| 1. 一个随机变量的所有可能结果 | (a) 一个实验的相关函数 |
| 2. 一个随机过程的所有可能结果 | (b) 非平稳过程 |
| 3. $x(t)$ 在 t_1, t_2 时刻的值之间的统计联系 | (c) 样本空间 |
| 4. 在任意时间推移下随机过程的一个不变量 | (d) 白噪声 |
| 5. $x(t)$ 的均值和标准差随 t 发生变化 | (e) 平稳过程 |
| 6. 在一个频带内功率谱密度是常量 | (f) 总体 |

习 题

- 12.1 一个往复运动机器的基础的强度按以下概率密度函数在 $20 \sim 30 \text{ klbf/ft}^2$ 之间变化:

$$p(x) = \begin{cases} k \left(1 - \frac{x}{30}\right), & 20 \leq x \leq 30 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

问基础承受的载荷大于 28 klbf/ft^2 的概率是多少?

- 12.2 两个随机变量 X 和 Y 的联合概率密度函数如下:

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{9}, & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(a) 求 X, Y 的边缘概率密度函数; (b) 求 X, Y 的均值和标准差; (c) 求相关系数 $\rho_{X,Y}$ 。

- 12.3 随机变量 x 的概率密度函数如下:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.5, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

求 $E[x]$, $E[x^2]$ 和 σ_x 。

- 12.4 如果 x 和 y 是两个独立的随机变量, 那么 $E[xy] = E[x]E[y]$, 即两个独立的随机变量的积的数学期望等于它们各自数学期望的积。若令 $z = x + y$, 证明 $E[z^2] = E[x^2] + E[y^2] + 2E[x]E[y]$ 。

- 12.5 随机过程 $x(t)$ 的自相关函数为

$$R_x(\tau) = 20 + \frac{5}{1 + 3\tau^2}$$

求 $x(t)$ 的均方值。

- 12.6 一个随机过程的自相关函数如下:

$$R_x(\tau) = A \cos \omega \tau, \quad -\frac{\pi}{2\omega} \leq \tau \leq \frac{\pi}{2\omega}$$

式中, A 和 ω 均为常量。求该随机过程的功率谱密度函数。

- 12.7 求图 12.25 所示周期函数的自相关函数。

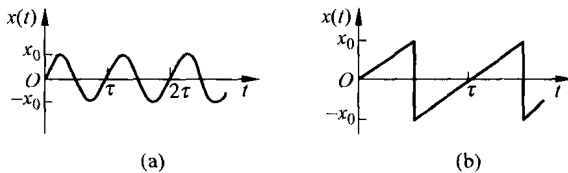


图 12.25 习题 12.7 图

- 12.8 求图 12.25(b) 所示周期函数的复数形式的傅里叶级数展开。
- 12.9 计算均值为零的周期方波的自相关函数, 并将此结果与具有相同周期的正弦波比较。假设这两个波的振幅相同。
- 12.10 振动传感器的寿命 $T(h)$ 按如下指数规律分布:

$$p_T(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

式中, λ 是常数。求: (a) T 的概率分布函数; (b) T 的平均值; (c) T 的标准差。

- 12.11 求函数 $x(t) = x_0 \sin(\pi t / 2)$ 的时间平均值和均方值。
- 12.12 一个空气压缩机的质量为 100 kg, 安装在一个无阻尼的隔振器上, 运转的角速度为 1800 r/min。隔振器的弹簧刚度系数是一个平均值为 $\bar{k} = 2.25 \times 10^6$ N/m、标准差为 $\sigma_k = 0.225 \times 10^6$ N/m 的正态分布随机变量。求系统固有频率超过激励频率的概率。
- 12.13 求图 12.26 所示时间函数的傅里叶变换, 并画出频谱曲线。
- 12.14 求图 12.27 所示时间函数的傅里叶变换, 并画出频谱曲线。

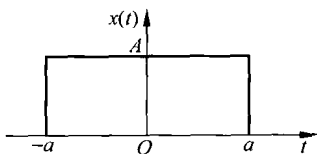


图 12.26 习题 12.13 图

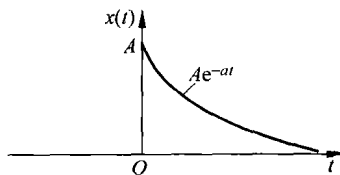


图 12.27 习题 12.14 图

12.15 求图 12.28 所示时间函数的傅里叶变换,并画出频谱曲线。

12.16 求图 12.29 所示时间函数的傅里叶变换,并画出频谱曲线。

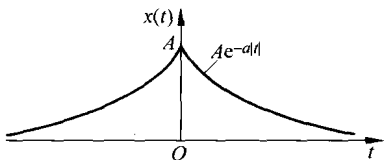


图 12.28 习题 12.15 图

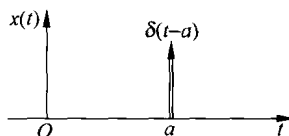


图 12.29 习题 12.16 图

12.17 周期函数 $f(t)$ 如图 12.30 所示,利用其在 10 个等间隔离散时间处的值,求其频谱和均方值。

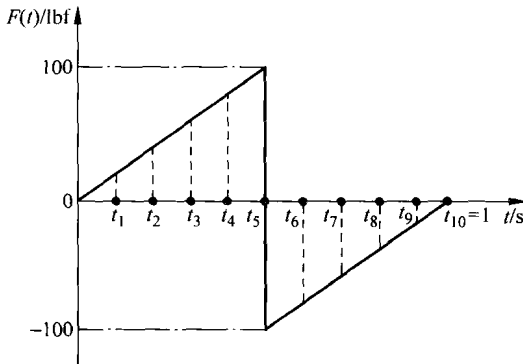


图 12.30 习题 12.17 图

12.18 一个平稳随机过程的自相关函数如下:

$$R_x(\tau) = ae^{-b|\tau|}$$

式中, a 和 b 均为常量。求该随机过程的功率谱密度函数。

12.19 一个随机过程的功率谱密度函数在频率 ω_1 和 ω_2 之间为一常量,即 $S(\omega) = S_0$ 。求其自相关函数。

12.20 路面的不平度可以用一个高斯随机过程描述,其自相关函数为

$$R_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-a|\tau|} \cos \beta v \tau$$

式中, σ_x^2 是该随机过程的方差; v 是车速。不同路面的 σ_x , α 和 β 的值如下表所示:

路面种类	σ_x	α	β
沥青路面	1.1	0.2	0.4
铺砌的路面	1.6	0.3	0.6
碎石路面	1.8	0.5	0.9

计算不同种类路面的功率谱密度函数。

12.21 计算理想白噪声谱密度对应的自相关函数。

12.22 根据式(12.60)和式(12.61), 推导下列关系:

$$R(\tau) = \int_0^{\infty} S(f) \cos 2\pi f \tau df$$

$$S(f) = 4 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau$$

12.23 编写一个计算机程序, 计算单自由度系统响应的均方值。已知随机激励的功率谱密度函数为 $S_x(\omega)$ 。

12.24 某机器可以简化为一个单自由度振动系统, 各参数如下: $mg = 2000 \text{ lbf}$, $k = 4 \times 10^4 \text{ lbf/in}$, $c = 1200 \text{ lbf} \cdot \text{in/s}$ 。激励如图 12.30 所示, 求响应的均方值。

12.25 一质量块与一阻尼器相连, 如图 12.31 所示。若激励为 $F(t)$, 求质量块速度的频响函数。

12.26 一个随机信号的功率谱密度函数如下:

$$S(f) = \begin{cases} 0.0001 \text{ m}^2/(\text{周期 s}), & 10 \text{ Hz} \leq f \leq 1000 \text{ Hz} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求该随机信号的标准差和均方根值, 假设其均值为 0.05 m 。

12.27 根据式(12.45)推导式(12.46)。

12.28 行驶在不平路面上的摩托车的简化模型如图 12.32 所示。假设车轮是刚性的, 并始终与地面接触, 行驶速度为常量, 车身质量为 m , 悬挂系统的弹簧系数为 k , 阻尼系数为 c 。若路面的功率谱密度函数为 S_0 , 求质量 m 竖向位移的均方值。

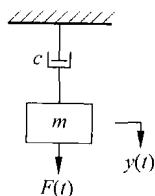


图 12.31 习题 12.25 图

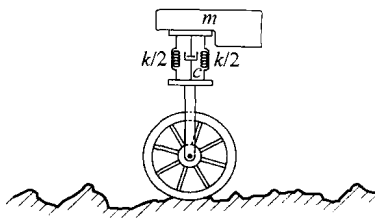


图 12.32 习题 12.28 图

2.29 机翼表面由于气流扰动相对于其静飞行路线的运动可以由下面的方程描述:

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n \dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = \frac{1}{m}F(t)$$

式中, ω_n 是固有频率; m 是质量; ζ 是系统的阻尼系数; $F(t)$ 代表随机升力, 其谱密度是

$$S_F(\omega) = \frac{S_T(\omega)}{1 + \frac{\pi\omega c}{v}}$$

式中, c 是机翼的长度; v 是飞机向前的速度; $S_T(\omega)$ 是气流向上速度的谱密度函数, 由下式计算:

$$S_T(\omega) = A^2 \frac{1 + \left(\frac{L\omega}{v}\right)^2}{\left\{1 + \left(\frac{L\omega}{v}\right)^2\right\}^2}$$

式中, A 是常量; L 是扰动尺度(常量)。求机翼表面响应的均方值。

- 12.30 飞机在阵风飞行时, 机翼可以简化为图 12.33 所示的弹簧-质量-阻尼系统。若机翼的无阻尼和有阻尼固有频率分别为 ω_1 和 ω_2 , 在随机风力(谱密度函数为常量 $S(\omega) = S_0$)的作用下位移的均方值为 δ , 求系统参数 m_{eq} , k_{eq} , c_{eq} 的表达式。

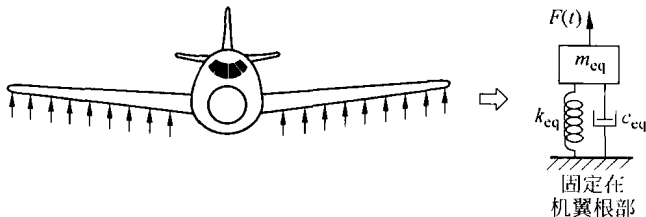


图 12.33 习题 12.30 图

- 12.31 如果图 12.23 所示建筑物框架的结构阻尼系数为 0.01, 而不是模态阻尼比 0.02, 求各层屋顶相对位移的均方值。
- 12.32 建筑物的框架如图 12.23 所示, 地震时地面加速度的功率谱密度为

$$S(\omega) = \frac{1}{4 + \omega^2}$$

求各层屋顶相对位移的均方值。假设各阶模态的模态阻尼比均为 0.02。

- 12.33 利用 MATLAB 画图表示如下高斯概率密度函数:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5x^2}, \quad -7 \leq x \leq 7$$

- 12.34 画图表示如下三角形脉冲的傅里叶变换(见图 12.12):

$$X(\omega) = \frac{4A}{a\omega^2} \sin^2 \frac{\omega a}{2}, \quad -7 \leq \frac{\omega a}{\pi} \leq 7$$

12.35 当激励如图 12.30 所示时,某机器振动响应的均方值如下:

$$E[y^2] = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{|c_n|^2}{(k - m\omega_n^2)^2 + c^2\omega_n^2}$$

式中

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N F_j \left\{ \cos \frac{2\pi nj}{N} - i \sin \frac{2\pi nj}{N} \right\}$$

已知: $m=5.1760$, $k=4 \times 10^4$, $c=1200$, $\omega_n=2\pi n$ 。当 $j=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$ 时, $F_j=0,20,40,60,80,100,-80,-60,-40,-20,0$ 。利用 MATLAB 求 $E[y^2]$ 的值,取 $N=10$ 。

设计题目

12.36 水箱的容积为 10 000 gal,由空心钢制圆柱支承,如图 12.34 所示。对支柱进行设计以满足如下要求:(a)不管是空的还是储满水时,水箱的无阻尼固有振动频率必须大于 1 Hz;(b)不管是空的还是储满水时,若地震引起的地面加速度的功率谱密度为 $S(\omega)=0.0002 \text{ (m}^2/\text{s}^4)/(\text{rad/s})$,水箱位移的均方值不能超过 16 in^2 。假设阻尼是临界阻尼的 1/10。

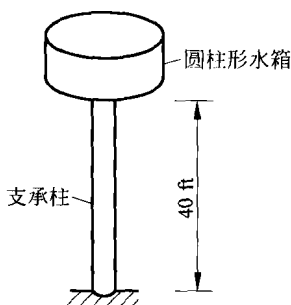


图 12.34 设计题目 12.36 图



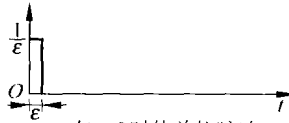
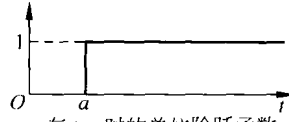
拉普拉斯(Pierre Simon Laplace, 1749—1827), 法国数学家, 由于其对概率理论、数学物理和天体力学的重要贡献而被后人铭记。拉普拉斯的名字在机械工程领域和电机工程领域都广为人知。在振动和应用力学中, 许多问题的分析都要用到拉普拉斯变换。在电子和电磁领域的研究中, 拉普拉斯方程广为应用。

(照片引自: Struik D J. A Concise History of Mathematics, 2nd ed. New York: Dover Publications, 1948)

附录 A 拉普拉斯变换对

拉 氏 域 $\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$	时 域 $f(t)$
1. $c_1 \bar{f}(s) + c_2 \bar{g}(s)$	$c_1 f(t) + c_2 g(t)$
2. $\bar{f}\left(\frac{s}{a}\right)$	$f(a \cdot t)a$
3. $\bar{f}(s)\bar{g}(s)$	$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$
4. $s^n \bar{f}(s) - \sum_{j=1}^n s^{n-j} \frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}} \bar{f}(s)$	$\frac{d^n f}{dt^n}(t)$
5. $\frac{1}{s^n} \bar{f}(s)$	$\underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}_{n} f(\tau) d\tau \cdots d\tau$
6. $\bar{f}(s+a)$	$e^{-at} f(t)$
7. $\frac{a}{s(s+a)}$	$1 - e^{-at}$
8. $\frac{s+a}{s^2}$	$1 + at$
9. $\frac{a^2}{s^2(s+a)}$	$at - (1 - e^{-at})$

续表

拉 氏 域 $\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$	时 域 $f(t)$
10. $\frac{s+b}{s(s+a)}$	$\frac{b}{a} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{a}{b} \right) e^{-at} \right\}$
11. $\frac{a}{s^2 + a^2}$	$\sin at$
12. $\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos at$
13. $\frac{a^2}{s(s^2 + a^2)}$	$1 - \cos at$
14. * ① $\frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	$\frac{1}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t$
15. * $\frac{s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	$-\frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi_1)$
16. * $\frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	$\frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi_1)$
17. * $\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$	$1 - \frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi_1)$
18. * $\frac{s + \zeta\omega_n}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$	$e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi_1)$
19. 1	 在 $t=0$ 时的单位脉冲
20. $\frac{e^{-as}}{s}$	 在 $t=a$ 时的单位阶跃函数

参 考 文 献

- A. 1 E. A. Mechtly, "The International System of Units" (2nd rev.), NASA SP-7012, 1973.
 A. 2 C. Wandmacher, *Metric Units in Engineering—Going SI*, Industrial Press, New York, 1978.

① $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$, $\zeta < 1$;
 $\phi_1 = \cos^{-1} \zeta$, $\zeta < 1$ 。



赫兹(Heinrich Rudolf Hertz, 1857—1894), 德国物理学家, 先后在卡尔斯鲁厄(Karlsruhe)工业大学和波恩(Bonn)大学担任物理学教授。凭其关于无线电波的实验而声名显赫。他在弹性理论方面的研究虽然只是其全部成就中的一小部分, 但对于工程师们来说却是至关重要的。其关于弹性体接触问题分析的工作被称为赫兹应力, 这一点在球轴承和滚柱轴承的设计中是非常重要的。在国际单位制中, 周期现象中频率(每秒钟完成的循环次数)的单位就是用赫兹来命名的。

(照片经 Applied Mechanics Reviews 授权使用。)

附录 B 单 位

英制单位现在正在被国际(SI)单位所取代。国际单位制是公制单位制的现代版本。它在法语中的名字是 System International, 所以简称为 SI。在国际单位制中, 有 7 个基本单位。所有其他物理量的单位都可以由这 7 个基本单位导出。在讨论振动问题时, 要用到的 3 个基本单位是: 长度的单位——米(m), 质量的单位——千克(kg)和时间的单位——秒(s)。

表 B.1 中列出了国际单位制中倍数和亚倍数常用前缀。在国际单位制中, 组合单位的缩写必须十分小心。例如, 一个 $4 \text{ N} \times 2 \text{ m}$ 的扭矩必须写成 8 N m 或 $8 \text{ N} \cdot \text{m}$, 即必须在 N 和 m 之间空一格或加上一个圆点, 而不能写成 Nm。再如, $8 \text{ m} \times 5 \text{ s} = 40 \text{ ms}$ 可以写成 $40 \text{ m} \cdot \text{s}$, 也可以写成 40 meter-seconds。如果写成 40 ms, 则其含义是 40 milliseconds。

表 B.1 国际单位制中倍数和亚倍数的前缀

倍数	前缀	符号	亚倍数	前缀	符号
10	deka	da	10^{-1}	deci	d
10^2	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^3	kilo	k	10^{-3}	milli	m
10^6	mega	M	10^{-6}	micro	μ
10^9	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p

单位的换算

为了把任意一个给定的物理量的单位从一种单位制换算到另一种单位制,必须利用表 B.2 中所列的等价量。下面的两个例子用来说明整个换算过程。

表 B.2 单位换算

物理量	国际制单位的等价量	英制单位的等价量
质量	$1 \text{ lbf} \cdot \text{s}^2 / \text{ft} (\text{slug}) = 14.5939 \text{ kg}$ $= 32.174 \text{ lb}$ $1 \text{ lbm} = 0.453\,592\,37 \text{ kg}$	$1 \text{ kg} = 2.204\,623 \text{ lbm}$ $= 0.068\,521\,78 \text{ slug} (\text{lbf} \cdot \text{s}^2 / \text{ft})$
长度	$1 \text{ in} = 0.0254 \text{ m}$ $1 \text{ ft} = 0.3048 \text{ m}$ $1 \text{ mile} = 5280 \text{ ft} = 1.609\,344 \text{ km}$	$1 \text{ m} = 39.370\,08 \text{ in}$ $= 3.280\,84 \text{ ft}$ $1 \text{ km} = 3280.84 \text{ ft} = 0.621\,371 \text{ mile}$
面积	$1 \text{ in}^2 = 0.000\,645\,16 \text{ m}^2$ $1 \text{ ft}^2 = 0.092\,903\,0 \text{ m}^2$	$1 \text{ m}^2 = 1550.0031 \text{ in}^2$ $= 10.763\,91 \text{ ft}^2$
体积	$1 \text{ in}^3 = 16.3871 \times 10^{-6} \text{ m}^3$ $1 \text{ ft}^3 = 28.3168 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ $1 \text{ US gallon} = 3.7853 \text{ litres}$ $= 3.7853 \times 10^{-3} \text{ m}^3$	$1 \text{ m}^3 = 61.0237 \times 10^3 \text{ in}^3$ $= 35.3147 \text{ ft}^3$ $= 10^3 \text{ litres}$ $= 0.264\,18 \text{ US gallon}$
力或重量	$1 \text{ lbf} = 4.448\,222 \text{ N}$	$1 \text{ N} = 0.224\,808\,9 \text{ lbf}$
扭矩或力矩	$1 \text{ lbf} \cdot \text{in} = 0.112\,984\,8 \text{ N} \cdot \text{m}$ $1 \text{ lbf} \cdot \text{ft} = 1.355\,818 \text{ N} \cdot \text{m}$	$1 \text{ N} \cdot \text{m} = 8.850\,744 \text{ lbf} \cdot \text{in}$ $= 0.737\,562 \text{ lbf} \cdot \text{ft}$
应力、压力或弹性模量	$1 \text{ lbf} / \text{in}^2 (\text{psi}) = 6894.757 \text{ Pa}$ $1 \text{ lbf} / \text{ft}^2 = 47.880\,26 \text{ Pa}$ $1 \text{ lbm} / \text{in}^3 = 27.6799 \times 10^3 \text{ kg} / \text{m}^3$ $1 \text{ lbm} / \text{ft}^3 = 16.0185 \text{ kg} / \text{m}^3$	$1 \text{ Pa} = 1.450\,377 \times 10^{-4} \text{ lbf} / \text{in}^2 (\text{psi})$ $= 208.8543 \times 10^{-4} \text{ lbf} / \text{ft}^2$ $1 \text{ kg} / \text{m}^3 = 36.127 \times 10^{-6} \text{ lbm} / \text{in}^3$ $= 62.428 \times 10^{-3} \text{ lbm} / \text{ft}^3$
功或能量	$1 \text{ in} \cdot \text{lbf} = 0.112\,984\,8 \text{ J}$ $1 \text{ ft} \cdot \text{lbf} = 1.355\,818 \text{ J}$ $1 \text{ Btu} = 1055.056 \text{ J}$ $1 \text{ kWh} = 3.6 \times 10^6 \text{ J}$	$1 \text{ J} = 8.850\,744 \text{ in} \cdot \text{lbf}$ $1 \text{ J} = 0.737\,562 \text{ ft} \cdot \text{lbf}$ $= 0.947\,817 \times 10^{-3} \text{ Btu}$ $= 0.277\,778 \text{ kWh}$
功率	$1 \text{ in} \cdot \text{lbf} / \text{s} = 0.112\,984\,8 \text{ W}$ $1 \text{ ft} \cdot \text{lbf} / \text{s} = 1.355\,818 \text{ W}$ $= 0.001\,818\,2 \text{ hp}$ $1 \text{ hp} = 745.7 \text{ W}$	$1 \text{ W} = 8.850\,744 \text{ in} \cdot \text{lbf} / \text{s}$ $1 \text{ W} = 0.737\,562 \text{ ft} \cdot \text{lbf} / \text{s}$ $= 1.341\,02 \times 10^{-3} \text{ hp}$
惯性矩或面积的二次矩	$1 \text{ in}^4 = 41.6231 \times 10^{-8} \text{ m}^4$ $1 \text{ ft}^4 = 86.3097 \times 10^{-4} \text{ m}^4$	$1 \text{ m}^4 = 240.251 \times 10^4 \text{ in}^4$ $= 115.862 \text{ ft}^4$
转动惯量	$1 \text{ in} \cdot \text{lbf} \cdot \text{s}^2 = 0.112\,984\,8 \text{ m}^2 \cdot \text{kg}$	$1 \text{ m}^2 \cdot \text{kg} = 8.850\,744 \text{ in} \cdot \text{lbf} \cdot \text{s}^2$

续表

物理量	国际制单位的等价值	英制单位的等价值
弹簧常数 平动的情况 转动的情况	$1 \text{ lbf/in} = 175.1268 \text{ N/m}$ $1 \text{ lbf/ft} = 14.5939 \text{ N/m}$ $1 \text{ in-lbf/rad} = 0.112\,984\,8 \text{ m} \cdot \text{N/rad}$	$1 \text{ N/m} = 5.710\,17 \times 10^{-3} \text{ lbf/in}$ $= 68.5221 \times 10^{-3} \text{ lbf/ft}$ $1 \text{ m} \cdot \text{N/rad} = 8.850\,744 \text{ in-lbf/rad}$ $= 0.737\,562 \text{ lbf-ft/rad}$
阻尼常数 平动的情况 转动的情况	$1 \text{ lbf-s/in} = 175.1268 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ $1 \text{ in-lbf-s/rad} = 0.112\,984\,8 \text{ m} \cdot \text{N} \cdot \text{s/rad}$	$1 \text{ N} \cdot \text{s/m} = 5.710\,17 \times 10^{-3} \text{ lbf-s/in}$ $1 \text{ m} \cdot \text{N} \cdot \text{s/rad} = 8.850\,744 \text{ lbf-in-s/rad}$
角度	$1 \text{ rad} = 57.295\,754^\circ$; $1^\circ = 0.017\,453\,3 \text{ rad}$; $1 \text{ r/min} = 0.166\,667 \text{ r/s} = 0.104\,720 \text{ rad/s}$; $1 \text{ rad/s} = 9.549\,09 \text{ r/min}$	

例 B.1 转动惯量单位的换算。

(国际制单位中的转动惯量)=(英制单位中的转动惯量)×放大系数

$$\begin{aligned}
 (\text{kg} \cdot \text{m}^2) &= (\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2) = \left(\frac{\text{N}}{\text{lbf}} \cdot \text{lbf} \right) \left(\frac{\text{m}}{\text{in}} \cdot \text{in} \right) (\text{s}^2) \\
 &= (0.224\,808\,9)(39.370\,08)(\text{lbf-in-s}^2) \\
 &= 8.850\,744(\text{lbf-in-s}^2)
 \end{aligned}$$

例 B.2 应力单位的换算。

(国际制单位中的应力)=(英制单位中的应力)×放大系数

$$\begin{aligned}
 (\text{Pa}) &= (\text{N/m}^2) = \left(\frac{\text{N}}{\text{lbf}} \cdot \text{lbf} \right) \frac{1}{\left(\frac{\text{m}}{\text{in}} \cdot \text{in} \right)^2} = \frac{\text{N}}{\text{lbf}} \frac{1}{\left(\frac{\text{m}}{\text{in}} \right)^2} (\text{lbf/in}^2) \\
 &= \frac{(0.224\,808\,9)}{(39.370\,08)^2} (\text{lbf/in}^2) \\
 &= 1.4503 \times 10^{-4} (\text{lbf/in}^2)
 \end{aligned}$$

参 考 文 献

B.1 E. A. Mechtly, "The International System of Units"(2nd rev.), NASA SP-7012, 1973.

B.2 C. Wandmacher, *Metric Units in Engineering—Going SI*, Industrial Press, New York, 1978.



哈密尔顿(William Rowan Hamilton, 1805—1865), 爱尔兰数学家, 由于其在三一学院(Trinity College)读大学期间在古典文学和数学方面的辉煌成就, 一些人将其誉为“第二个牛顿”。当其于 23 岁那年即将从三一学院毕业时就成为了全票通过的天文学教授。次年, 他出版了名著《射线系统理论》(*A Theory of Systems of Rays*)。在这本书中, 他提出了哈密尔顿原理。此原理在振动理论中用来推导连续系统的运动微分方程。在其他领域, 哈密尔顿发明了四元数理论, 并凭此当选美国国家科学学会的第一位外籍会员。

(经 Applied Mechanics Review 授权使用。)

附录 C 部分习题答案

第 1 章

- 1.7 $k_{eq} = \frac{k_2 k_3 k_4 k_5 + 2k_1 k_3 k_4 k_5 + k_1 k_2 k_4 k_5 + 2k_1 k_2 k_3 k_5}{k_2 k_3 k_4 + k_2 k_3 k_5 + 2k_1 k_3 k_4 + 2k_1 k_3 k_5 + k_1 k_2 k_4 + k_1 k_2 k_5 + 2k_1 k_2 k_3}$
- 1.10 (a) $k = 37.08 \times 10^7 \text{ N/m}$, (b) $k = 12.36 \times 10^7 \text{ N/m}$, (c) $k = 4.12 \times 10^7 \text{ N/m}$
- 1.12 $k_{eq} = 3k \cos^2 \alpha$
- 1.14 $l_{eq} = \frac{4t(d+t)}{Dd}$
- 1.16 $k = \frac{p\gamma A^2}{v}$
- 1.19 $F(x) = (32\,000x - 80) \text{ N}$
- 1.22 $k_{eq} = \frac{1}{l} (E_s A_s + E_u A_u)$
- 1.24 (a) $k_{teq} = 5.548\,11 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$, (b) $k_{teq} = 5.595\,97 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$
- 1.26 (a) $k_{eq} = 89.931 \text{ lb/in}$; (b) $k_{eq} = 3.0124 \text{ lb/in}$
- 1.28 $k_{axial} = 16\,681.896 \text{ lb/in}$; $k_{torsion} = 139.1652 \text{ lb} \cdot \text{in/rad}$
- 1.30 $m_{eq} = m_1 \left(\frac{a}{b} \right)^2 + m_2 + J_0 \left(\frac{1}{b^2} \right)$

$$1.33 \quad m_{\text{eq}} = m_b + \frac{J_b}{l_3^2} + J_c \left[\frac{l_2}{l_3 r_c} \right]^2$$

$$1.35 \quad (\text{a}) \quad c_{\text{eq}} = c_1 + c_2 + c_3, \quad (\text{b}) \quad \frac{1}{c_{\text{eq}}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3},$$

$$(\text{c}) \quad c_{\text{eq}} = c_1 + c_2 \left(\frac{l_2}{l_1} \right)^2 + c_3 \left(\frac{l_3}{l_1} \right)^2, \quad (\text{d}) \quad c_{\text{teq}} = c_{11} + c_{12} \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 + c_{13} \left(\frac{n_1}{n_3} \right)^2$$

$$1.38 \quad c_1 = \frac{\pi \mu D^2 (l-h)}{2d} + \frac{\pi \mu D^3}{32h}$$

$$1.41 \quad c = 4205.64 \text{ N} \cdot \text{s/m}$$

$$1.44 \quad A = 4.4721, \theta = -26.5651^\circ$$

$$1.46 \quad z = 11.1803e^{j0.1798i}$$

$$1.49 \quad X = 9.8082 \text{ mm}, Y = 9.4918 \text{ mm}, \phi = 39.2072^\circ$$

$$1.53 \quad x_2(t) = 6.1966 \sin(\omega t + 83.7938^\circ)$$

$$1.55 \quad \text{无周期}$$

$$1.58 \quad X = 2.5 \text{ mm}, \omega = 5.9092 \text{ rad/s}, \omega + \delta\omega = 6.6572 \text{ rad/s}$$

$$1.60 \quad A = 0.5522 \text{ mm}, \dot{x}_{\text{max}} = 52.04 \text{ mm/s}$$

$$1.62 \quad x_{\text{rms}} = X/\sqrt{2}$$

$$1.66 \quad x(t) = \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2} \sin \omega t - \frac{2A}{\pi} \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{\cos n\omega t}{n^2 - 1}$$

$$1.68 \quad x(t) = \frac{8A}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sin n\omega t}{n^2}$$

$$1.72 \quad p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} [a_m \cos m\omega t + b_m \sin m\omega t] \text{ lb/in}^2, \text{ 其中 } a_0 = 50, a_1 = 31.8309, a_2 = 0, \\ a_3 = -10.6103, b_1 = 31.8309, b_2 = 31.8309, b_3 = 10.6103$$

$$1.75 \quad a_0 = 19.92, a_1 = -20.16, a_2 = 3.31, a_3 = 3.77; b_1 = 23.52, b_2 = 12.26, b_3 = -0.41$$

$$1.88 \quad a_0 = -0.38, a_1 = -0.62, a_2 = 0.46, a_3 = 0.41; b_1 = -0.35, b_2 = 0.92, b_3 = -0.17$$

第2章

$$2.2 \quad (\text{a}) \quad 0.1715 \text{ s}, \quad (\text{b}) \quad 0.2970 \text{ s}$$

$$2.4 \quad 0.0993 \text{ s}$$

$$2.6 \quad (\text{a}) \quad A = 0.03183 \text{ m}, \quad (\text{b}) \quad \dot{x}_0 = 0.07779 \text{ m/s}, \quad (\text{c}) \quad \ddot{x}_{\text{max}} = 0.31415 \text{ m/s}^2, \\ (\text{d}) \quad \phi_0 = 51.0724^\circ$$

$$2.8 \quad \omega_n = 22.1472 \text{ rad/s}$$

$$2.10 \quad \omega_n = 4.8148 \text{ rad/s}$$

$$2.13 \quad \omega_n = [k/(4m)]^{1/2}$$

$$2.15 \quad (\text{a}) \omega_n = \sqrt{\frac{4k}{M}}, (\text{b}) \omega_n = \sqrt{\frac{4k}{m+M}}$$

$$2.17 \quad \omega_n = \sqrt{\frac{g}{W} \left(\frac{3E_1 I_1}{l_1^3} + \frac{48E_2 I_2}{l_2^3} \right)}$$

$$2.19 \quad k = 52.6381 \text{ N/m}, m = 1/3 \text{ kg}$$

$$2.21 \quad (\text{a}) \omega_n = \sqrt{\frac{kg \cos^2 \theta}{W}}, (\text{b}) \omega_n = \sqrt{\frac{kg}{W}}$$

$$2.23 \quad (\text{a}) \omega_n = \sqrt{\frac{k}{2m}}, (\text{b}) \omega_n = \sqrt{\frac{8m}{b^2} \left(l^2 - \frac{b^2}{4} \right)}$$

$$2.26 \quad (\text{a}) m\ddot{x} + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) Tx = 0, (\text{b}) \omega_n = \sqrt{\frac{T(a+b)}{mab}}$$

$$2.28 \quad T = 1656.3147 \text{ lbf}$$

$$2.30 \quad (\text{a}) N = 81.914 \text{ r/min}, (\text{b}) \omega_n = 37.5851 \text{ rad/s}$$

$$2.32 \quad \omega_n = \sqrt{\frac{2g}{L}}$$

$$2.34 \quad A = 0.9536 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$2.37 \quad \text{关于 } z \text{ 轴的扭矩}$$

$$2.39 \quad \omega_n = 2578.9157 \text{ rad/s}$$

$$2.42 \quad \mu = \sqrt{\frac{\omega^2 Wc - 2kgc}{Wg + Wa\omega^2 - 2kga}}$$

$$2.44 \quad m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x = 0$$

$$2.47 \quad \left(m + \frac{J_0}{r^2} \right) \ddot{x} + 16kx = 0$$

$$2.49 \quad \omega_n = 359.6872 \text{ rad/s}$$

$$2.51 \quad x(t) = 0.1 \cos 15.8114t + 0.3162 \sin 15.8114t \text{ m}$$

$$2.53 \quad x_0 = 0.007864 \text{ m}; \dot{x}_0 = -0.013933 \text{ m/s}$$

$$2.55 \quad \dot{x}_0 = 4 \text{ m/s}$$

$$2.57 \quad d = 0.1291 \text{ in}, N = 29.58$$

$$2.59 \quad \omega_n = 2 \text{ rad/s}, l = 2.4525 \text{ m}$$

$$2.61 \quad \tau_n = 1.4185 \text{ s}$$

$$2.63 \quad \omega_n = 13.4841 \text{ rad/s}$$

$$2.65 \quad \tau_n = 0.04693 \text{ s}$$

$$2.67 \quad \omega_n = 17.7902 \text{ rad/s}$$

$$2.69 \quad \omega_n = \left\{ \frac{(k_1 + k_2)(R + a)^2}{1.5mR^2} \right\}^{1/2}$$

$$2.71 \quad \frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} + (k_t + k_1a^2 + k_2l^2)\theta = 0$$

$$2.74 \quad m_{\text{eff}} = \frac{17}{35}m$$

$$2.76 \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{4m}}$$

$$2.79 \quad 45.1547 \text{ rad/s}$$

$$2.81 \quad \omega_n = \sqrt{\frac{\rho_0 g}{\rho_w h}}$$

$$2.83 \quad \omega_n = \sqrt{\frac{16kr^2}{mr^2 + J_0}}$$

$$2.85 \quad (\text{a}) 14\,265.362, (\text{b}) 3.8296$$

$$2.87 \quad x_{\max} = \left(x_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)e^{-(\dot{x}_0/(\dot{x}_0 + \omega_n x_0))}$$

$$2.90 \quad (\text{a}) c_c = 1000 \text{ N} \cdot \text{s/m}, (\text{b}) \omega_d = 8.6603 \text{ rad/s}, (\text{c}) \delta = 3.6276$$

$$2.92 \quad \theta = 0.09541^\circ$$

$$2.94 \quad \zeta = 0.013847$$

$$2.96 \quad m = 500 \text{ kg}, k = 27\,066.403 \text{ N/m}$$

$$2.99 \quad \omega_n = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$$

$$2.103 \quad \frac{3}{2}m\ddot{x} + c\dot{x} + 2kx = 0$$

$$2.105 \quad \rho_0 = 2682.8816 \text{ kg/m}^3$$

$$2.107 \quad (\text{a}) J_0 = 1.9436 \times 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2, (\text{b}) \tau_n = 1.8297 \text{ s},$$

$$(\text{c}) c_t = 5.3887 \times 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s/rad}, (\text{d}) k_t = 2.2917 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m/rad}$$

$$2.108 \quad (\text{a}) \zeta = 0.75, \omega_d = 6.6144 \text{ rad/s}, (\text{b}) \zeta = 1.0, \omega_d = 0, (\text{c}) \zeta = 1.25$$

$$2.110 \quad (\text{a}) 60.8368 \text{ J}, (\text{b}) 124.6784 \text{ J}$$

$$2.111 \quad \text{库仑阻尼}, 5 \text{ N}, 14.1421 \text{ rad/s}$$

$$2.113 \quad 5.8 \text{ mm}$$

$$2.115 \quad (\text{a}) 5, (\text{b}) 0.7025 \text{ s}, (\text{c}) 1.9620 \text{ cm}$$

$$2.117 \quad c_{\text{eq}} = \frac{4\mu N}{\pi\omega X}$$

$$2.120 \quad 1.40497 \text{ s}$$

$$2.122 \quad 1.7022 \text{ s}, 0.004 \text{ m}$$

$$2.124 \quad \beta = 0.03032, c_{\text{eq}} = 0.04288 \text{ N} \cdot \text{s/m}, \Delta W = 19.05 \times 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$2.126 \quad h = 0.583327 \text{ N/m}$$

第3章

3.2 5 s

3.4 (a) $x(t) = 0.1 \cos 20t + t \sin 20t$, (b) $x(t) = (0.5 + t) \sin 20t$,
(c) $x(t) = 0.1 \cos 20t + (0.5 + t) \sin 20t$,

3.6 (a) $x(t) = 0.18 \cos 20t - 0.08 \cos 30t$,
(b) $x(t) = 0.08 \cos 20t + 0.5 \sin 20t - 0.08 \cos 30t$,
(c) $x(t) = 0.18 \cos 20t + 0.5 \sin 20t - 0.08 \cos 30t$

3.8 9.1189 kg

3.11
$$X = \left| \frac{mrl^3 N^2}{22.7973 Eba^3 - 0.2357 \rho a b l^4 N^2} \right|$$

3.13 $\omega = 743.7442 \text{ Hz}$

3.17 0.676 s

3.19 $\theta_p(t) = \Theta \sin \omega t$, $\Theta = -8.5718 \times 10^{-4} \text{ rad}$, $\omega = 104.72 \text{ rad/s}$

3.21 $x_p(t) = 0.06610 \cos(10t - 0.1325) \text{ m}$
 $x_{\text{total}}(t) = 0.0345 e^{-2t} \cos(19.8997t + 0.0267) + 0.0661 \cos(10t - 0.1325) \text{ m}$

3.23 $x_p(t) = 0.25 \cos\left(20t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ m}$
 $x_{\text{total}}(t) = 0.2611 e^{-2t} \cos(19.8997t + 1.1778) + 0.25 \cos\left(20t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ m}$

3.25 $k = 6.6673 \times 10^4 \text{ lb/in}$, $c = 2.3983 \text{ lb} \cdot \text{s/in}$

3.27 $r = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$, $X_{\max} = \frac{\delta_{st}}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$

3.29 $\zeta = 0.1180$

3.32 (a) 64.16 rad/s, (b) 967.2 N · m

3.34 (a) $\zeta = 0.25$, (b) $\omega_1 = 22.2145 \text{ rad/s}$, $\omega_2 = 38.4766 \text{ rad/s}$

3.36 $169.5294 \times 10^{-6} \text{ m}$

3.38 $k = 1.0070 \times 10^5 \text{ N/m}$, $c = 633.4038 \text{ N} \cdot \text{s/m}$

3.42 $0.3339 \sin 25t \text{ mm}$

3.44 $X = 0.106 \text{ m}$, $s = 246.73 \text{ km/h}$

3.46 $c = (k - m\omega^2)/\omega$

3.48 $\theta(t) = 0.01311 \sin(10t - 0.5779) \text{ rad}$

3.51 $x_p(t) = 110.9960 \times 10^{-6} \sin(314.16t + 0.07072) \text{ m}$

3.54 $0.4145 \times 10^{-3} \text{ m}$, $1.0400 \times 10^{-3} \text{ m}$

3.56 1.4195 N · m

3.58 $\zeta = 0.1364$

3.61 最大力 = 26.68 lbf

3.64 $\mu = 0.1$

3.67 (a) 10.2027 lb/in, (b) 40.8108 lb · in

3.70 (c) $\frac{1}{\left\{ \frac{4\mu N}{\pi Xk} + \frac{3}{4k} c\omega^3 X^2 \right\}}$

3.73 (a) 1.0623 Hz, (b) 1.2646 m/s, (c) 5.557×10^{-4} m

第4章

4.2 $x(t) = \frac{F_0}{2k} - \frac{4F_0}{\pi^2 k} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{\sqrt{(1-r^2 n^2)^2 + (2\zeta n r)^2}} \cos(n\omega t - \phi_n),$

$r = \omega/\omega_n$ and $\phi_n = \arctan\left(\frac{2\zeta n r}{1 - n^2 r^2}\right)$

4.6 $\theta(t) = 0.0023873 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{318.3091 \sin 5.8905n \cos n\omega t + 318.3091(1 - \cos 5.8905n) \sin n\omega t}{n(392700.0 - 1096.6278n^2)} \right\} \text{rad}$

4.12 $x_p(t) = 6.6389 \times 10^{-4} - 13.7821 \times 10^{-4} \cos(10.472t - 0.0172)$
 $+ 15.7965 \times 10^{-4} \sin(10.472t - 0.0172) + \dots \text{m}$

4.15 $x(t) = \frac{F_0}{k} \left\{ 1 + \frac{\sin \omega_n(t - t_0) - \sin \omega_n t}{\omega_n t_0} \right\}, t \geq t_0$

4.19 $x(t) = \frac{F_0}{2k \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)} \left[2 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \left(1 - \cos \frac{\omega_n \pi}{\omega}\right) \right] + \frac{F_0}{k} \left[1 - \cos \omega_n \left(t - \frac{\pi}{\omega}\right) \right], t > \pi/\omega$

4.25 $x(t) = 1.7689 \sin 6.2832(t - 0.018) - 0.8845 \sin 6.2832t$
 $- 0.8845 \sin 6.2832(t - 0.036) \text{m}, t > 0.036 \text{ s}$

4.29 $x_p(t) = 0.002667 \text{ m}$

4.32 $\theta(t) = 0.3094e^{-t} + 0.05717 \sin 5.4127t - 0.3094 \cos 5.4127t \text{ rad}$

4.35 $x(t) = 0.04048e^{-t} + 0.01266 \sin 3.198t - 0.04048 \cos 3.198t \text{ m}$

4.37 $x(t) = 0.5164e^{-t} \sin 3.8729t \text{ m}$

4.42 $x_m = \frac{F_0}{k\omega_n t_0} [(1 - \cos \omega_n t_0)^2 + (\omega_n t_0 - \sin \omega_n t_0)^2]^{1/2}, t > t_0$

4.45 $d = 0.6 \text{ in}$

4.48 $k = 12771.2870 \text{ lbf/in}$

4.51 $x(t) = \begin{cases} \frac{F_0}{m\omega_n^2} (1 - \cos \omega_n t), & 0 \leq t \leq t_0 \\ \frac{F_0}{m\omega_n^2} [\cos \omega_n(t - t_0) - \cos \omega_n t], & t \geq t_0 \end{cases}$

$$4.54 \quad \dot{x}_i(t_i = \pi) = \begin{cases} -0.549\,289, & \text{式(4.68)} \\ -0.551\,730, & \text{式(4.71)} \end{cases}$$

第5章

$$5.1 \quad \omega_1 = 3.6603 \text{ rad/s}, \omega_2 = 13.6603 \text{ rad/s}$$

$$5.3 \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

$$5.5 \quad 1.1 \text{ in}^2$$

$$5.6 \quad \omega_1 = 7.3892 \text{ rad/s}, \omega_2 = 58.2701 \text{ rad/s}$$

$$5.7 \quad \omega_{1,2}^2 = \frac{48}{7} \frac{EI}{m_1 m_2} \left[(m_1 + 8m_2) \pm \sqrt{(m_1 - 8m_2)^2 + 25m_1 m_2} \right]$$

$$5.9 \quad \omega_1 = 0.7654 \sqrt{\frac{g}{l}}, \omega_2 = 1.8478 \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$5.12 \quad \omega_1 = 12.8817 \text{ rad/s}, \omega_2 = 30.5624 \text{ rad/s}$$

$$5.15 \quad \begin{aligned} x_1(t) &= 0.1046 \sin 40.4225t + 0.2719 \sin 58.0175t, \\ x_2(t) &= 0.1429 \sin 40.4225t - 0.09952 \sin 58.0175t \end{aligned}$$

$$5.17 \quad \omega_1 = 3.7495 \sqrt{\frac{EI}{mh^3}}, \omega_2 = 9.0524 \sqrt{\frac{EI}{mh^3}}$$

$$5.19 \quad \mathbf{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 2.3029 \end{Bmatrix}, \mathbf{X}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ -1.3028 \end{Bmatrix}$$

$$5.21 \quad x_2(0) = r_1 x_1(0) = \frac{x_1(0)}{\sqrt{3}-1}, \dot{x}_2(0) = r_1 \dot{x}_1(0) = \frac{\dot{x}_1(0)}{\sqrt{3}-1}$$

$$5.25 \quad x_1(t) = 0.5 \cos 2t + 0.5 \cos \sqrt{12}t; x_2(t) = 0.5 \cos 2t - 0.5 \cos \sqrt{12}t$$

$$5.28 \quad \omega_1 = 0.5176 \sqrt{k_1/J_0}, \omega_2 = 1.9319 \sqrt{k_1/J_0}$$

$$5.31 \quad \omega_1 = 0.38197 \sqrt{k_1/J_0}, \omega_2 = 2.61803 \sqrt{k_1/J_0}$$

$$5.33 \quad \text{频率方程}$$

$$\begin{aligned} & \omega^4 (m_1 m_2 l_1^2 l_2^2) - \omega^2 \{ m_2 l_2^2 (W_1 l_1 + k l_1^2) + m_1 l_1^2 (W_2 l_2 + k l_2^2) \} \\ & + (W_1 l_1 W_2 l_2 + W_2 l_2 k l_1^2 + W_1 l_1 k l_2^2) = 0 \end{aligned}$$

$$5.35 \quad \omega_{1,2}^2 = \left\{ \frac{(J_0 k + m k_1) \pm \sqrt{(J_0 k + m k_1)^2 - 4(J_0 - m e^2) m k k_1}}{2m(J_0 - m e^2)} \right\}$$

$$5.38 \quad \begin{aligned} 1000 \ddot{x} + 40\,000x + 15\,000\theta &= 900 \sin 8.7267t + 1100 \sin(8.7267t - 1.5708) \\ 810 \ddot{\theta} + 15\,000x + 67\,500\theta &= 1650 \sin(8.7267t - 1.5708) - 900 \sin 8.7267t \end{aligned}$$

$$5.41 \quad (a) \quad \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k & kl/6 \\ kl/6 & 17kl^2/36 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F(t) \\ lF(t)/3 \end{Bmatrix}, \text{式中 } J_0 = ml^2/12,$$

$$F(t) = F_0 \sin \omega t,$$

(b) 静态耦合

$$5.45 \quad (a) \quad \omega_1 = 12.2474 \text{ rad/s}, \omega_2 = 38.7298 \text{ rad/s}$$

$$5.48 \quad x_j(t) = X_j e^{i\omega t}$$

$$X_1 = (-40.0042 - 0.01919i) \times 10^{-4} \text{ in}$$

$$X_2 = (0.9221 + 0.2948i) \times 10^{-4} \text{ in}$$

$$5.49 \quad k_2 = m_2 \omega^2$$

$$5.50 \quad x_2(t) = \left\{ \frac{k_2 F_0}{(-m_1 \omega^2 + k_1 + k_2)(-m_2 \omega^2 + k_2) - k_2^2} \right\} \sin \omega t$$

$$5.52 \quad x_1(t) = (17.2915 F_0 \cos \omega t + 6.9444 F_0 \sin \omega t) 10^{-4}$$

$$x_2(t) = (17.3165 F_0 \cos \omega t + 6.9684 F_0 \sin \omega t) 10^{-4}$$

$$5.54 \quad x_1(t) = 0.009773 \sin 4\pi t \text{ m}, x_2(t) = 0.016148 \sin 4\pi t \text{ m}$$

$$5.56 \quad x_2(t) = \left(\frac{1}{60} - \frac{1}{40} \cos 10t + \frac{1}{120} \cos 10\sqrt{3}t \right) u(t)$$

$$5.58 \quad \omega_1 = 0, \omega_2 = \sqrt{\frac{4k}{3m}}$$

$$5.59 \quad b_1 c_2 - c_1 b_2 = 0$$

$$5.61 \quad \ddot{\alpha} + \left(\frac{k_1}{J_1} + \frac{k_1}{J_2} \right) \alpha = 0, \alpha = \theta_1 - \theta_2$$

$$5.63 \quad \omega_1 = 0, \omega_2 = \sqrt{\frac{6k(m+M)}{mM}}$$

$$5.66 \quad k \geq \frac{mg}{2l}$$

第 6 章

$$6.1 \quad \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + k \begin{bmatrix} 7 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & -1 \\ -5 & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{Bmatrix}$$

$$6.3 \quad \frac{m}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 15 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \frac{c}{25} \begin{bmatrix} 6 & -10 & 4 \\ 9 & -15 & 6 \\ -5 & 25 & -10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix}$$

$$+ \frac{k}{25} \begin{bmatrix} 6 & -10 & 29 \\ 34 & -15 & 6 \\ -15 & 25 & -10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_3(t) \\ F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix}$$

$$6.5 \quad I_1 \ddot{\theta}_1 + k_{t1}(\theta_1 - \theta_2) = M_1 \cos \omega t$$

$$\left(I_2 + I_3 \frac{n_2^2}{n_3^2} \right) \ddot{\theta}_2 + k_{t1}(\theta_2 - \theta_1) + k_{t2} \frac{n_2}{n_3} \left(\theta_2 \frac{n_2}{n_3} - \theta_3 \right) = 0$$

$$\left(I_4 + I_5 \frac{n_4^2}{n_5^2} \right) \ddot{\theta}_3 + k_{t2} \left(\theta_3 - \theta_2 \frac{n_2}{n_3} \right) + k_{t3} \frac{n_4}{n_5} \left(\theta_3 \frac{n_4}{n_5} - \theta_4 \right) = 0$$

$$I_6 \ddot{\theta}_4 + k_{t3} \left(\theta_4 - \theta_3 \frac{n_4}{n_5} \right) = 0$$

$$6.7 \quad k \begin{bmatrix} 7 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & -1 \\ -5 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$6.9 \quad \frac{k}{25} \begin{bmatrix} 34 & -15 & 6 \\ -15 & 25 & -10 \\ 6 & -10 & 29 \end{bmatrix}$$

$$6.11 \quad \begin{bmatrix} k_{t1} & -k_{t1} & 0 & 0 \\ -k_{t1} & k_{t1} + k_{t2} \left(\frac{n_2}{n_3} \right)^2 & -k_{t2} \left(\frac{n_2}{n_3} \right) & 0 \\ 0 & -k_{t2} \left(\frac{n_2}{n_3} \right) & k_{t2} + k_{t3} \left(\frac{n_4}{n_5} \right)^2 & -k_{t3} \left(\frac{n_4}{n_5} \right) \\ 0 & 0 & -k_{t3} \left(\frac{n_4}{n_5} \right) & k_{t3} \end{bmatrix}$$

$$6.13 \quad \begin{bmatrix} \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} & \frac{1}{k_1 r} \\ \frac{1}{k_1 r} & \frac{1}{k_1 r^2} \end{bmatrix}$$

$$6.15 \quad \begin{bmatrix} \frac{2}{3k} & -\frac{1}{3kl} \\ -\frac{1}{3kl} & \frac{2}{3kl^2} \end{bmatrix}$$

$$6.17 \quad \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 4ml^2 \end{bmatrix}$$

$$6.19 \quad [k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix}$$

$$6.21 \quad [a] = \frac{l^3}{EI} \begin{bmatrix} 9/64 & 1/6 & 13/192 \\ 1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 13/192 & 1/6 & 9/64 \end{bmatrix}$$

$$6.25 \quad 2k$$

$$6.27 \quad \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

$$6.29 \quad \frac{m}{3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 15 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$6.31 \quad \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 + I_3 \left(\frac{n_2}{n_3} \right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_4 + I_5 \left(\frac{n_4}{n_5} \right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_6 \end{bmatrix}$$

$$6.34 \quad 2m\ddot{x} + kx = 0, l\ddot{\theta} + g\theta = 0$$

$$6.36 \quad m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = 0$$

$$m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3x_3 = 0$$

$$m_3\ddot{x}_3 - k_3x_2 + (k_3 + k_4)x_3 = 0$$

$$6.39 \quad m_1\ddot{x}_1 + 7kx_1 - kx_2 - 5kx_3 = F_1(t)$$

$$m_2\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 - kx_3 = F_2(t)$$

$$m_3\ddot{x}_3 - 5kx_1 - kx_2 + 7kx_3 = F_3(t)$$

$$6.42 \quad \left(M + \frac{J_0}{9r^2} \right) \ddot{x}_1 - \frac{J_0}{9r^2} \ddot{x}_2 + \frac{41}{9}kx_1 - \frac{8}{9}kx_2 - \frac{8}{3}kx_3 = F_1(t)$$

$$- \frac{J_0}{9r^2} \ddot{x}_1 + \left(3m + \frac{J_0}{9r^2} \right) \ddot{x}_2 - \frac{8}{9}kx_1 + \frac{2}{9}kx_2 + \frac{2}{3}kx_3 = F_2(t)$$

$$m\ddot{x}_3 - \frac{8}{3}kx_1 + \frac{2}{3}kx_2 + 5kx_3 = F_3(t)$$

$$6.44 \quad \omega_1 = 0.44504\sqrt{k/m}, \omega_2 = 1.2471\sqrt{k/m}, \omega_3 = 1.8025\sqrt{k/m}$$

$$6.47 \quad \omega_1 = 0.533399\sqrt{k/m}, \omega_2 = 1.122733\sqrt{k/m}, \omega_3 = 1.669817\sqrt{k/m}$$

$$6.50 \quad \lambda_1 = 2.21398, \lambda_2 = 4.16929, \lambda_3 = 10.6168$$

$$6.53 \quad \omega_1 = 0.644798\sqrt{g/l}, \omega_2 = 1.514698\sqrt{g/l}, \omega_3 = 2.507977\sqrt{g/l}$$

$$6.56 \quad \omega_1 = 0.562587\sqrt{\frac{P}{ml}}, \omega_2 = 0.915797\sqrt{\frac{P}{ml}}, \omega_3 = 1.584767\sqrt{\frac{P}{ml}}$$

$$6.59 \quad \mathbf{X} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & \sqrt{2/3} \\ 1 & 1 & \sqrt{8/3} \end{bmatrix}$$

$$6.62 \quad \omega_1 = 0.7653 \sqrt{\frac{k}{m}}, \omega_2 = 1.8478 \sqrt{\frac{k}{m}}, \omega_3 = 3.4641 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$6.64 \quad \omega_1 = 0, \omega_2 = 0.752158 \sqrt{k/m}, \omega_3 = 1.329508 \sqrt{k/m}$$

$$6.66 \quad x_3(t) = x_{10} \left\{ 0.5 \cos 0.4821 \sqrt{\frac{k}{m}} t - 0.3838 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + 0.8838 \cos 1.1976 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right\}$$

$$6.68 \quad x_3(t) = x_{20} \left\{ 0.1987 \cos 0.5626 \sqrt{\frac{P}{lm}} t - 0.06157 \cos 0.9158 \sqrt{\frac{P}{lm}} t - 0.1372 \cos 1.5848 \sqrt{\frac{P}{lm}} t \right\}$$

$$6.71 \quad x_1(t) = \dot{x}_0 \left\{ \frac{t}{3} + \sqrt{\frac{m}{4k}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t + \sqrt{\frac{m}{108k}} \sin \sqrt{\frac{3k}{m}} t \right\}$$

$$6.73 \quad x_1(t) = \frac{1}{2} \left[\cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t + \cos \sqrt{12}t - \frac{1}{\sqrt{12}} \sin \sqrt{12}t \right]$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2} \left[\cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t - \cos \sqrt{12}t + \frac{1}{\sqrt{12}} \sin \sqrt{12}t \right]$$

$$6.75 \quad (\text{a}) \quad \omega_1 = 0.44497 \sqrt{k_t/J_0}, \omega_2 = 1.24700 \sqrt{k_t/J_0}, \omega_3 = 1.80194 \sqrt{k_t/J_0}$$

$$(\text{b}) \quad \theta(t) = \begin{Bmatrix} -0.0000025 \\ 0.0005190 \\ -0.0505115 \end{Bmatrix} \cos 100t \text{ rad}$$

$$6.77 \quad x(t) = \begin{Bmatrix} 5.93225 \\ 10.28431 \\ 12.58863 \end{Bmatrix} \frac{F_0}{k} \cos \omega t$$

$$6.80 \quad x(t) = \begin{Bmatrix} 0.03944(1 - \cos 18.3013t) + 0.01057(1 - \cos 68.3015t) \\ 0.05387(1 - \cos 18.3013t) - 0.00387(1 - \cos 68.3015t) \end{Bmatrix}$$

$$6.83 \quad x_3(t) = 0.0256357 \cos(\omega t + 0.5874^\circ) \text{ m}$$

第7章

$$7.1 \quad (\text{a}) \quad \omega_1 \simeq 2.6917 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}, (\text{b}) \quad \omega_1 \simeq 2.7994 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$$

$$7.3 \quad 3.5987 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$$

$$7.5 \quad 0.3015 \sqrt{k/m}$$

$$7.7 \quad 0.4082 \sqrt{k/m}$$

$$7.9 \quad 1.0954 \sqrt{\frac{T}{lm}}$$

$$7.13 \quad \omega_1 = 0, \omega_2 \simeq 6.2220 \text{ rad/s}, \omega_3 \simeq 25.7156 \text{ rad/s}$$

$$7.16 \quad \omega_1 = \sqrt{k/m}$$

$$7.18 \quad \omega_1 = 0.3104, \omega_2 = 0.4472, \omega_3 = 0.6869, \text{ 式中 } \omega_i = 1/\sqrt{\lambda_i}$$

$$7.21 \quad \bar{\omega}_1 = 0.765\,366, \bar{\omega}_2 = 1.414\,213, \bar{\omega}_3 = 1.847\,759 \text{ 而 } \omega_i = \bar{\omega}_i \sqrt{\frac{GJ}{IJ_0}}$$

$$7.26 \quad \omega_1 = 0.2583, \omega_2 = 3.0, \omega_3 = 7.7417$$

$$7.29 \quad \mathbf{U}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.447\,213\,59 & 0.083\,045\,475 & -0.123\,796\,87 \\ 0 & 0.415\,227\,38 & 1.176\,070\,2 \\ 0 & 0 & 1.795\,054\,7 \end{bmatrix}$$

$$7.47 \quad \omega_1 = 5.8694, \omega_2 = 85.5832, \omega_3 = 293.5470$$

$$7.49 \quad \omega_1 = 0.2430, \omega_2 = 0.5728, \omega_3 = 7.1842$$

第 8 章

$$8.1 \quad 28.2843 \text{ m/s}$$

$$8.3 \quad \omega_3 = 9000 \text{ Hz}, \text{ 二者均增加 } 9.54\%$$

$$8.6 \quad (\text{a}) 0.1248 \times 10^6 \text{ N}, (\text{b}) 3.12 \times 10^6 \text{ N}$$

$$8.8 \quad w(x, t) = \frac{8al}{\pi^3 c} \sum_{n=1,3,5,\dots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi ct}{l}$$

$$8.11 \quad w\left(x, \frac{l}{c}\right) = -\frac{\sqrt{39}h}{2\pi^2} \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{\sqrt{39}h}{8\pi^2} \sin \frac{2\pi x}{l} - \frac{\sqrt{39}h}{32\pi^2} \sin \frac{4\pi x}{l} + \frac{\sqrt{39}h}{50\pi^2} \sin \frac{5\pi x}{l}$$

$$8.15 \quad \tan \frac{\omega l}{c} = \frac{AE\omega c(k - M\omega^2)}{A^2 E^2 \omega^2 - M\omega^2 k c^2}$$

$$8.18 \quad \tan \frac{\omega l_1}{c_1} \tan \frac{\omega l_2}{c_2} = \frac{A_1 E_1 c_2}{A_2 E_2 c_1}$$

$$8.21 \quad \omega_n = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{G}{\rho}}; n = 1, 2, 3, \dots$$

$$8.23 \quad \omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{2} \sqrt{\frac{G}{\rho l^2}}; n = 0, 1, 2, \dots$$

$$8.26 \quad 5030.59 \text{ rad/s}$$

$$8.29 \quad \cos \beta l \cosh \beta l = -1$$

$$8.32 \quad \tan \beta l - \tanh \beta l = 0$$

$$8.34 \quad 20.2328 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$8.37 \quad \cos \beta l \cosh \beta l = 1, \tan \beta l - \tanh \beta l = 0$$

$$8.39 \quad \omega \approx \sqrt{120} \left(\frac{EI_0}{\rho A_0 l^4} \right)^{1/2}$$

$$8.44 \quad w(x, t) = \frac{F_0}{2\rho A c^2} \left\{ \cos \beta x + \cosh \beta x + \tan \frac{\beta l}{2} \sin \beta x - \tanh \frac{\beta l}{2} \sinh \beta x - 2 \right\} \sin \omega t$$

$$8.47 \quad w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) q_n(t), q_n(t) = \frac{M_0}{\rho A l \omega_n^2} \frac{dW_n}{dx} \bigg|_{x=l} (1 - \cos \omega_n t)$$

$$8.50 \quad \omega_{nm}^2 = \frac{\gamma_n P}{\rho}, J_m(\gamma_n R) = 0; m = 0, 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots$$

$$8.54 \quad w(x, y, t) = \frac{\dot{w}_0}{\omega_{12}} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} \sin \omega_{12} t$$

$$8.57 \quad 22.4499 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$$

$$8.59 \quad \omega = 15.4510 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$$

$$8.61 \quad 7.7460 \sqrt{\frac{EI_0}{\rho A_0 l^4}}$$

$$8.64 \quad 2.4146 \sqrt{\frac{EA_0}{m_0 l^2}}$$

$$8.66 \quad \omega \approx 13\,867.3328 \text{ rad/s}$$

$$8.68 \quad (\text{a}) 1.732\,05 \sqrt{\frac{E}{\rho l^2}}, (\text{b}) 1.576\,69 \sqrt{\frac{E}{\rho l^2}}, 5.672\,80 \sqrt{\frac{E}{\rho l^2}}$$

$$8.71 \quad \omega_1 = 3.142 \sqrt{\frac{P}{\rho l^2}}, \omega_2 = 10.12 \sqrt{\frac{P}{\rho l^2}}$$

第9章

$$9.1 \quad \text{约 } 46.78 \text{ km/h}$$

$$9.3 \quad m_c r_c = 3354.6361 \text{ g} \cdot \text{mm}, \theta_c = -25.5525^\circ$$

$$9.5 \quad m_4 = 0.99 \text{ oz}, \theta_4 = -35^\circ$$

$$9.8 \quad 1.6762 \text{ oz}, \alpha = 75.6261^\circ, \text{顺时针}$$

$$9.11 \quad \text{在平面 } B \text{ 上半径为 } 4 \text{ in、沿逆时针 } 10.8377^\circ \text{ 处去除 } 0.1336 \text{ lb, 以及在平面 } C \text{ 上半径为 } 4 \text{ in、沿逆时针 } 1.3957^\circ \text{ 处去除 } 0.2063 \text{ lb}$$

$$9.14 \quad (\text{a}) \mathbf{R}_A = -28.4021\mathbf{j} - 3.5436\mathbf{k}, \mathbf{R}_B = 13.7552\mathbf{j} + 4.7749\mathbf{k},$$

$$(\text{b}) m_L = 10.44 \text{ g}, \theta_L = 7.1141^\circ$$

$$9.17 \quad (\text{a}) 0.005\,124 \text{ m}, (\text{b}) 0.060\,74 \text{ m}, (\text{c}) 0.008\,457 \text{ m}$$

$$9.20 \quad (\text{a}) 0.5497 \times 10^8 \text{ N/m}^2, (\text{b}) 6.4698 \times 10^8 \text{ N/m}^2, (\text{c}) 0.9012 \times 10^8 \text{ N/m}^2$$

$$9.22 \quad F_{xp} = 0, F_{xs} = 3269.4495 \text{ lb}, M_{zp} = M_{zs} = 0$$

$$9.25 \quad \text{该发动机的力和力矩完全平衡}$$

$$9.27 \quad 0.2385 \text{ mm}$$

- 9.30 (a) $\omega < 95.4927 \text{ r/min}$, (b) $\omega > 276.7803 \text{ r/min}$
 9.32 $k = 152\,243.1865 \text{ N/m}$
 9.35 $79.7808 \text{ rad/s} - 1419.8481 \text{ rad/s}$
 9.37 $\delta_{st} = 0.027\,33 \text{ m}$
 9.40 $k = 1332.6646 \text{ lb/ft}$
 9.43 (a) $X = 11.4188 \times 10^{-3} \text{ m}$, (b) $F_T = 44.8069 \text{ N}$
 9.45 98.996%
 9.47 (a) 2775.66 lb , (b) $40\,145.81 \text{ lb}$
 9.49 $49\,752.86 \text{ N/m}$
 9.52 $\mu = 0.3403$; $m_2 = 102.09 \text{ kg}$; $k_2 = 2.519 \text{ MN/m}$; $X_2 = -0.1959 \text{ mm}$
 9.54 (a) 487.379 lb ; (b) $\Omega_1 = 469.65 \text{ r/min}$, $\Omega_2 = 766.47 \text{ r/min}$
 9.56 $D/d = 4/3$, $d = 0.5732 \text{ in}$, $D = 0.7643 \text{ in}$
 9.59 $0.9764 \leq \frac{\omega}{\omega_2} \leq 1.051\,25$
 9.61 $m_2 = 10 \text{ kg}$, $k_2 = 0.199\,86 \text{ MN/m}$
 9.63 165.6315 lb/in

第 10 章

- 10.2 18.3777 Hz
 10.4 3.6935 Hz
 10.6 0.53%
 10.9 35.2635 Hz
 10.12 73.16%
 10.14 $k = 33\,623.85 \text{ N/m}$, $c = 50.55 \text{ N} \cdot \text{s/m}$
 10.16 $m = 19.41 \text{ g}$, $k = 7622.8 \text{ N/m}$
 10.19 $111.20 \sim 2780.02 \text{ rad/s}$
 10.21 $r \approx 1$
 10.23 $\zeta = 0.1111$
 10.26 保持架(51.93 Hz), 内圈(1078.97 Hz), 外圈(830.88 Hz), 钢球(193.31 Hz)
 10.29 1.8
 10.30 2.9630
 10.32 $\zeta = 0.2$

第 11 章

$$11.2 \quad (\text{a}) \sqrt{\frac{m}{k_1}} \dot{x}_0, (\text{b}) \tau_n = \pi \left(\sqrt{\frac{m}{k_1}} + \sqrt{\frac{m}{k_2}} \right)$$

$$11.5 \quad \sqrt{\frac{k}{m}}, \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$11.7 \quad m \ddot{x} + k_1 x + k_2 x^3 / (2h^2) = F(t)$$

$$11.9 \quad \tau = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}, k = \sin(\theta_0/2)$$

$$11.11 \quad \frac{4}{\omega_0 \left(1 - \frac{\theta_0^2}{12}\right)} F\left(a, \frac{\pi}{2}\right), F(a, \beta) \text{ 是第一类不完全椭圆积分}$$

$$11.13 \quad x(t) = A_0 \cos \omega t - \frac{A_0^3 \alpha}{32 \omega^2} (\cos \omega t - \cos 3\omega t) - \frac{A_0^5 \alpha^2}{1024 \omega^4} (\cos \omega t - \cos 5\omega t);$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4} A_0^2 \alpha - \frac{3}{128} \frac{A_0^4}{\omega^2} \alpha^2$$

$$11.18 \quad (\text{a}) x(t) = e^{-0.2t} (-\cos 0.87178t + 1.7708 \sin 0.87178t)$$

$$11.21 \quad x(t) = 5[1 - 1.0013e^{-0.05t} \{\cos(0.9987t - 2.8681^\circ)\}]$$

$$11.25 \quad \text{对 } 0 < c < 2: \text{ 稳定焦距; 对 } c \geq 2: \text{ 稳定节点}$$

$$11.27 \quad \text{平衡点在中心}$$

$$11.30 \quad (\text{a}) \lambda_1 = \lambda_2 = 2, (\text{b}) \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$$

$$11.32 \quad x(t) = c_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} t e^{2t} + c_2 \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} e^{2t}$$

$$11.34 \quad x(t) = 2 \cos \omega t + \frac{\alpha}{4\omega} \sin 3\omega t + \frac{3\alpha^2}{32\omega^2} \cos 3\omega t + \frac{5\alpha^2}{96\omega^2} \cos 5\omega t; \omega^2 = 1 + \frac{\alpha^2}{8}$$

第 12 章

$$12.1 \quad 0.04$$

$$12.3 \quad 1.0, 1.3333, 0.5773$$

$$12.5 \quad 25$$

$$12.10 \quad (\text{a}) 1 - e^{-\nu}, (\text{b}) \frac{1}{\lambda}, (\text{c}) \frac{1}{\lambda}$$

$$12.12 \quad 0.3316 \times 10^{-8}$$

$$12.14 \quad X(\omega) = \left(\frac{Aa}{a^2 + \omega^2} \right) - i \left(\frac{A\omega}{a^2 + \omega^2} \right)$$

$$12.17 \quad (\text{b}) 3400.0$$

$$12.19 \quad \frac{2S_0}{\tau} (\sin \omega_2 \tau - \sin \omega_1 \tau)$$

$$12.26 \quad \sigma = 0.3106 \text{ m}$$

$$12.28 \quad E[z^2] = \frac{\pi S_0 \omega^4}{2\zeta \omega_n^3}$$

$$12.30 \quad m_{\text{eq}} = \left\{ \frac{\pi S_0}{2\delta \omega_1^2 (\omega_1^2 - \omega_2^2)^{1/2}} \right\}^{1/2}, k_{\text{eq}} = \left\{ \frac{\pi S_0 \omega_1^2}{2\delta (\omega_1^2 - \omega_2^2)^{1/2}} \right\}^{1/2}, C_{\text{eq}} = \left\{ \frac{2\pi S_0 (\omega_1^2 - \omega_2^2)^{1/2}}{\delta \omega_1^2} \right\}^{1/2}$$

$$12.32 \quad \overline{z_1^2(t)} = 42.4744 \times 10^{-6} \text{ m}^2, \overline{z_2^2(t)} = 133.9971 \times 10^{-6} \text{ m}^2, \\ \overline{z_3^2(t)} = 208.3902 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$